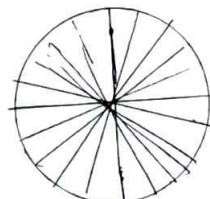


Das Achteck hat 8 Spiegelachsen.

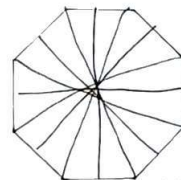


Der Kreis hat 10.000.000.000 Spiegelachsen.

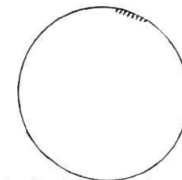
Was fällt dir auf?

Min fällt auf das wie das der Gegenstand echern hat kann man den Spiegel stellen

Ugur



Das Achteck hat 8 Spiegelachsen.



Der Kreis hat 1 Spiegelachsen.

Was fällt dir auf?

Es hat so viele Spiegelachsen wie es schon hat. Bei den ungeraden Zahlen geht es immer von Ecke zu Seite. Bei den geraden Zahlen geht es immer von Ecke zu Ecke oder von Seite zu Seite.

Pia

Am besten besorgen Sie sich zunächst einmal einen kleinen Taschenspiegel, bevor Sie die folgende Aufgabe bearbeiten: Stellen Sie den Spiegel so auf eines der oben abgebildeten Vielecke, dass genau dieses Vieleck jenseits und im Spiegel zu sehen ist, mit anderen Worten: Stellen Sie den Spiegel auf eine Symmetrieachse (Spiegelachse) des Vielecks. Wie finden Sie alle verschiedenen Möglichkeiten, das zu tun, und wie viele Möglichkeiten gibt es jeweils?

Zur Begriffsklärung: Ein regelmäßiges Vieleck ist eine ebene geometrische Figur, bei der alle Seiten gleich lang und alle Innenwinkel gleich groß sind. Das bekannteste regelmäßige Vieleck ist wohl das regelmäßige Viereck, das Quadrat. – Sicherlich haben Sie herausgefunden, dass jedes regelmäßige Vieleck so viele Symmetrieachsen wie Ecken hat. Das regelmäßige Dreieck hat genau 3 Symmetrieachsen. Wohlgedenkt: Diese Aussage gilt für regelmäßige Dreiecke, nicht für irgendwelche Dreiecke.

Diese Erkenntnis formuliert Ugur. Auch wenn die Zeichnung nicht sehr sauber angefertigt worden ist, kann man beim Achteck schon erkennen, dass die Symmetrieachsen entweder von Ecke zu Ecke oder von Seitenmitte zu Seitenmitte verlaufen. Streng genommen

gehen sie darüber hinaus, aber das soll uns hier nicht weiter beschäftigen. Die Lehrperson hatte auch gefragt, wie viele Symmetrieachsen dann wohl ein Kreis hat. Ugur notiert zunächst 12 Spiegelachsen, vielleicht weil er an eine Uhr denkt, dann korrigiert er seine Entdeckung zu 10.000.000.000 Spiegelachsen – eben einer sehr, sehr großen Anzahl. Pia beschreibt ihre Entdeckungen noch differenzierter, indem sie danach unterscheidet, ob ein Vieleck ungerade oder gerade viele Ecken hat. Zudem notiert sie expliziter, dass der Kreis überall, und damit meint sie vermutlich: unendlich viele Spiegelachsen hat.

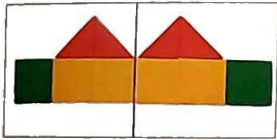
Herausgefunden haben das die beiden Viertklässler Ugur und Pia vermutlich so wie Sie, wenn Sie die Antwort nicht schon zuvor wussten: Sie haben den Spiegel auf der Figur platziert, geprüft, ob so die Ausgangsfigur wieder zu sehen ist, und dann den Spiegel so lange verschoben oder gedreht, bis es wieder passete. Sie haben nicht nur *gehandelt*, sondern auch über ihre Handlungen *nachgedacht*.

Dieses Kapitel vermittelt Grundlagen zum Nachdenken über Symmetrie und erläutert, warum der Unterricht das im Sinne des operativen Prinzips (Nachdenken über das Tun) ermöglichen sollte

Zugänge zur Behandlung der Achsensymmetrie in der Grundschule

In der Grundschule erfolgt die Begegnung mit dem Thema Symmetrie in der Regel in Bezug auf die Achsensymmetrie in der Ebene. Dabei wird ein grundlegender und ganz zentraler Aspekt von Symmetrie angesprochen. Es handelt sich um ein Thema, das im Verlauf der Schulzeit um diverse Aspekte erweitert wird. In Anlehnung an Franke/Reinhold (2016, S. 270ff.) sollen im Folgenden in der gebotenen Kürze sechs unterschiedliche Aktivitäten für den Mathematikunterricht in der Grundschule dargestellt werden.

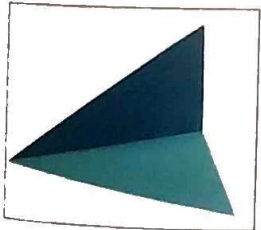
Legen



Beispielsweise bekommen die Schülerinnen und Schüler die Aufgabe, mit Material eine Figur

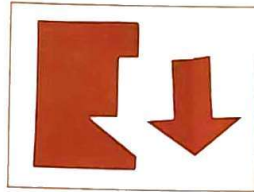
spiegelbildlich zu ergänzen, also auf der einen Seite „dasselbe spiegelverkehrt“ anzuordnen. Zur Überprüfung kann man zum Beispiel kleine Taschenspiegel verwenden.

Falten



Das Falten von Papier stellt einen anderen Zugangsweg dar, bei dem einerseits an hoffentlich vorhandene Vorerfahrungen der Lernenden ange-

knüpft werden kann und bei dem andererseits weiterführende Erfahrungen gesammelt werden können: Man kann ein regelmäßiges Dreieck so falten, dass Seiten aufeinanderliegen, also gleich lang sind.



Falten und Schneiden

Eine Ausweitung stellen die sogenannten Faltschnitte dar, bei denen die Lernenden zunächst falten und dann entweder an der

Faltkante oder an einer anderen „offenen“ Kante eine Teilfigur ausschneiden. Anschließend wird das Papier wieder entfaltet, und eine symmetrische Figur kann untersucht werden. Die Richtung kann auch umgekehrt werden, nachdem die Lernenden erste Erfahrungen gesammelt haben: Wie muss man schneiden, damit ein Quadrat entsteht? Man kann das Blatt auch (auf unterschiedliche Weise) zweimal falten und dann ausschneiden.

Klecksen



Bei diesem Zugang wird ein Blatt Papier gefaltet und wieder entfaltet, bevor die Kinder auf einer der beiden Hälften zum Beispiel mit kräfti-

gen Wasserfarben oder Tusche eine Figur malen. Dann wird das Blatt sehr zeitnah zusammengefasst und wieder entfaltet. Je nachdem, wo die Figur gemalt wurde, entsteht eine zusammenhängende symmetrische Figur oder zwei zueinander symmetrische Figuren.

Spiegeln mit Spiegeln

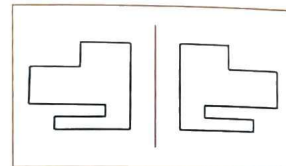


Durch das Spiegeln mit einem Spiegel kann sowohl das Spiegelbild einer Figur erzeugt werden als auch eine symmetrische Figur. Außerdem können



mithilfe eines Spiegels leichter als mit den bislang genannten Herangehensweisen systematische Veränderungen vorgenommen werden, also Spiegel vergleichsweise leicht an verschiedenen Stellen (innerhalb und außerhalb einer Figur, nah oder fern) und in verschiedenen Ausrichtungen (nicht nur vertikal und horizontal) aufgesetzt werden. Zudem ermöglicht der Einsatz zweier Spiegel das Sammeln neuer Erfahrungen, da Spiegelbilder gespiegelt werden.

Zeichnen



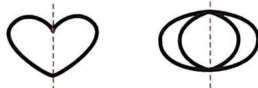
Hier werden symmetrische Figuren – häufig auf Karopapier – durch zeichnerisches Ergänzen erzeugt.

Durch das genaue Zeichnen können grundlegende Erfahrungen gesammelt werden, etwa dass Bild und Original gleich weit von der Symmetrieachse entfernt sind oder entsprechende Strecken gleich lang und entsprechende Winkel gleich groß sind.

Merkmale von Symmetrie

Lage der Symmetrieachse

Liegt die Symmetrieachse innerhalb einer Figur oder zwischen zwei Figuren?



Ausrichtung der Symmetrieachse

Verläuft die Symmetrieachse vertikal oder horizontal bzw. diagonal?



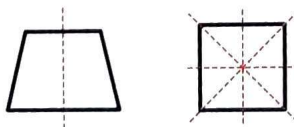
Orientierung der Symmetrieachse

Sind auf einer (und wenn ja: auf der rechten oder der linken) oder auf beiden Seiten der Symmetrieachse Ergänzungen vorzunehmen?



Anzahl der Symmetrieachsen

Verfügt die Figur über eine oder mehrere Symmetrieachsen?



Die unterschiedlichen Zugangsweisen haben ihre Vor- und Nachteile. Das Klecksen ist für viele Kinder sicherlich eine freudvolle Tätigkeit, aber sie müssen sehr genau arbeiten, damit wirklich ein (annähernd) symmetrisches Bild entsteht. Das Spiegeln ermöglicht aufgrund der einfachen Handhabbarkeit mit sofortiger Kontrollmöglichkeit vergleichsweise leicht viele weiterführende Einsichten. Die Ergebnisse dieses Tuns sind aber recht schwierig zu dokumentieren. Und so weiter. Insofern schlagen Franke/Reinhold (2016, S. 281) vor, diese unterschiedlichen Zugänge dosiert zunächst zu einer eher phänomenologisch orientierten Einführung zu verwenden, an die sich in der zweiten Hälfte der Grundschulzeit erste begriffliche Vertiefungen anschließen sollten.

In Anlehnung an Ruwisch (2013) identifizieren Franke/Reinhold (2016, S. 269f.) zudem verschiedene Merkmale, welche dazu beitragen können, die Aufgabenschwierigkeit zu beeinflussen. Das Wissen über dieses sollte nicht zu einer strikten Stufung der Aufgaben im Unterricht führen, wohl aber sollte es die Lehrperson für mögliche Lernhürden und unterschiedliche Aufgabenschwierigkeiten sensibilisieren.

Kongruenzabbildungen und Symmetrieabbildungen

F Eine Kongruenzabbildung bildet jede Figur auf eine Figur mit gleicher Form und Größe ab. Das linke F und das rechte F haben exakt dieselbe Form und dieselbe Größe, sie sind deckungsgleich (kongruent). Ein Spezialfall ist die sogenannte identische Abbildung, die *jeden Punkt einer Figur* auf sich selbst abbildet. Daneben gibt es vier *Kongruenzabbildungen*.

Ein Spezialfall von Kongruenzabbildungen sind die sogenannten *Deckabbildungen* (Symmetrieabbildungen), bei denen eine Figur auf sich selbst abgebildet wird. Stellt man beispielsweise einen Spiegel senkrecht auf eine Mittelsenkrechte des Quadrats, so wird dieses Quadrat auf sich selbst abgebildet, A auf A'. Im Auge des Betrachters entsteht keine neue Figur. Da Deckabbildungen ein Spezialfall von Kongruenzabbildungen sind, können die vier Typen von Kongruenzabbildungen auch Deckabbildungen sein, wenn eine Figur auf sich selbst

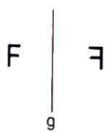
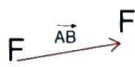
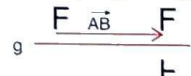
abgebildet wird. Auch hier lassen wir die identische Abbildung außer Betracht.

Um zu entscheiden, ob eine Abbildung eine Kongruenz- oder „sogar“ eine Deckabbildung ist, muss man wissen, was die Ausgangsfigur ist. Hätten wir als Ausgangsfigur ein Rechteck genommen, dessen eine Seitenlänge der des Quadrats entspricht und dessen andere Seite halb so lang wäre, und würde man an der längeren Seite spiegeln, entstünde eine neue Figur; es wäre also keine Deckabbildung.

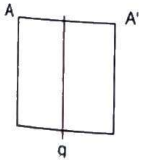
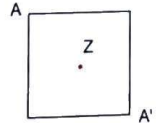
Ein Aspekt ist nun noch zu klären: Warum kann man bei der Verschiebung von einer Deckabbildung sprechen?

Das hat damit zu tun, dass man sich die sogenannten Bandornamente als unendlich vorstellt. Insofern wird nicht ein einzelnes Dreieck verschoben, sondern das ganze Ornament. So entsteht keine neue Figur. Natürlich gibt es nicht nur eine Symmetrie in der Ebene, sondern auch eine Symmetrie im Raum, auf die wir aus Platzgründen an dieser Stelle aber nicht weiter eingehen.

Kongruenzabbildungen

Spiegelung an einer Geraden g 	Drehung um einen Punkt Z, hier um 180 Grad 	Verschiebung um einen Vektor $\vec{AB}$ 	Schubspiegelung: Verschiebung um Vektor $\vec{AB}$ parallel zu g und Spiegelung an g 
--	--	---	--

Deckabbildungen

Spiegelung an einer Geraden g 	Drehung um einen Punkt Z, hier um 180 Grad 	Verschiebung um einen Vektor $\vec{AB}$ 	Schubspiegelung: Verschiebung um Vektor $\vec{AB}$ parallel zu g und Spiegelung an g 
--	--	--	--



Wie symmetrisch zeichnen Kinder?

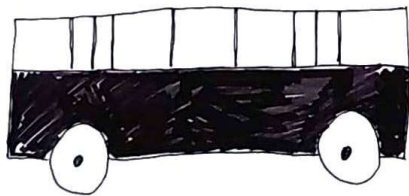
Viele spontane Kinderzeichnungen weisen Elemente der Symmetrie auf, nicht nur bei geometrischen Mustern, beispielsweise bei Blumen, Bäumen, Häusern, Tieren oder Fahrzeugen, sondern häufig auch bei Zeichnungen, die den menschlichen Körper oder auch Teile davon zeigen.

Dabei können im Wesentlichen vier Formen unterschieden werden (vgl. dazu den Beitrag von Ha 1989), von denen die Spiegelsymmetrie die am häufigsten vorkommende ist.

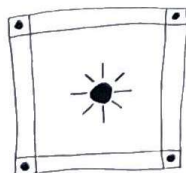
Dass die Zeichnungen der Kinder bei strenger Beurteilung gewisse Ungenauigkeiten aufweisen, ist sowohl ihren altersgemäßen zeich-

nerischen Fähigkeiten als auch der Tatsache zuzuschreiben, dass die Wahrnehmung noch nicht hinreichend differenziert erfolgt. Gleichwohl stellen die Kinder in ihren Zeichnungen aus ihrer Sicht spontan Symmetrien her. Warum? Ha (1989) erklärt das mit einem internen Bestreben, eine schöne, regelmäßige Gestalt wahrnehmen zu wollen. Das habe zur Folge, dass die Wahrnehmung stets auch vereinfachen müsse. Dieses Vereinfachungsprinzip führe dazu, dass Kinder beispielsweise Köpfe spontan als Kreise malen, weil sie Kreise für alles malen würden, was tendenziell rund sei – nicht, weil sie sich denken würden, dass ein Kopf eine Kugel sei und man Kugeln durch Kreise repräsentiere.

Spiegelsymmetrie: Bei Bildern dieses Typs kann die Zeichnung entlang einer vorgestellten Spiegelachse in zwei Teile zerlegt werden, die dieselbe Größe aufweisen und dieselben Formen enthalten. Häufig kann man diese Achse in der Vertikalen lokalisieren, bisweilen auch in der Horizontalen.



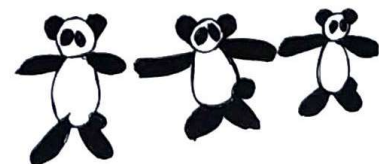
Drehsymmetrie: Diese Zeichnung stellt eine Decke dar, in deren Mitte eine Sonne gezeichnet wurde. Das Bild kann jeweils um 90 Grad gedreht werden und sieht „gleich“ aus, auch weil die vier Seiten gleich lang sind.



Pseudo-Spiegelsymmetrie: Im ersten Moment sieht auch diese Zeichnung symmetrisch aus, aber wenn man genauer hinschaut, stellt man fest, dass weder der linke Teil zum rechten noch der obere zum unteren passt. So hat die Tischdecke rechts zwei Ecken, links aber nur eine, man vergleiche auch die Platzierung der Teller.



Verschiebesymmetrie: Die Bären in dieser Zeichnung sind in regelmäßigen Abständen nebeneinander gezeichnet worden. Sie weisen – im Großen und Ganzen – dieselbe Form und Größe auf. (alle Abbildungen nach Ha 1989)



Welcher Faltschnitt passt?

Bereits in der Vorschulzeit haben viele Schülerinnen und Schüler Erfahrungen zur Symmetrie gesammelt, die sich nicht nur auf Phänomene aus der Umwelt (zum Beispiel die Symmetrie am eigenen Körper), sondern auch auf das Herstellen symmetrischer Figuren durch Schneiden, Falten oder Legen beziehen. An diese Erfahrungen sollte der Unterricht anknüpfen, um sie nachfolgend zu systematisieren und zu erweitern. Im Weiteren beschreiben wir in diesem Sinne eine Lernumgebung zum Thema „Faltschnitte“.

Unter einem Faltschnitt verstehen wir eine Figur, die durch das Falten eines Blattes Papier und das anschließende Ausschneiden einer Teilfigur entsteht, wobei dies an der Faltkante des Blattes erfolgen muss. Die aufgeklappte Figur ist dann achsensymmetrisch, und ihre Symmetrieachse entspricht der Faltkante. Die Schüler kennen Faltschnitte oftmals schon aus dem Kindergarten. Allerdings ist es auch Lernenden ohne Vorerfahrungen in der Regel schnell möglich, die Vorgehensweise beim Erzeugen der Faltschnitte kennenzulernen und die Auswirkung des Aufklappens der ausgeschnittenen Teilfigur zu erproben.

Möglich werden so Bearbeitungen auf unterschiedlichen Niveaus im Sinne der natürlichen Differenzierung, sodass die Lernumgebung den verschiedenen Vorerfahrungen der Schülerinnen und Schüler gerecht werden kann. Durch das Erzeugen von und das Nachdenken über Faltschnitte lassen sich zudem die Eigenschaften achsensymmetrischer Figuren erforschen und beschreiben. Auch hier sind im Sinne der natürlichen Differenzierung Entdeckungen auf unterschiedlichen Niveaus möglich. Beim Vergleich der selbst hergestellten Faltschnitte sind

die Tatsachen, dass jede Figur eine Faltkante besitzt und aus zwei Hälften bzw. Teilfiguren besteht, für alle leicht ersichtlich.

Des Weiteren kann die Abstandstreue gegenüberliegender Kanten zur Symmetrieachse, die Längentreue gegenüberliegender Kanten sowie die Flächentreue der beiden Teilfiguren erkannt werden. Über die Herstellungsweise der Faltschnitte können diese Eigenschaften anschaulich begründet werden, denn die beiden Teilfiguren liegen beim Ausschneiden direkt übereinander.

Auch die Entdeckung, dass die beiden Teilfiguren spiegelverkehrt sind, wäre aufgrund von Vorerfahrungen der Kinder zum Spiegeln denkbar. Die gefundenen Besonderheiten von Faltschnitten sowie die konkreten Handlungen mit ihnen bilden den Grundstein für das mentale Operieren mit Faltschnitten.

Darum geht es

Im Weiteren beschreiben wir eine entsprechende Unterrichtseinheit, die in Jahrgangsstufe 1 von Stange/Tiefenthal (2017) durchgeführt wurde (vgl. auch Häring 2014). Die Unterrichtsreihe zum Thema „Wir werden Symmetrie-Experten“ hatte zum Ziel, dass die Schülerinnen und Schüler weitere Erfahrungen zur Achsensymmetrie sammeln und dadurch ihre Kenntnisse über achsensymmetrische Figuren erweitern sollten, indem sie zunächst individuell, dann zielgerichtet Faltschnitte erstellen und diese anschließend mental zu Zielbildern zuordnen sollten. Die Reihe war wie folgt aufgebaut:

- Was können wir schon?
- Wie stellt man einen Faltschnitt her?
- Wie stellt man einen Faltschnitt zu bestimmten Zielbildern her?



- Welcher Faltschnitt passt? – Woran erkennst du das?
- Das haben wir gelernt.

In der Auseinandersetzung mit den unterschiedlichen Handlungskontexten können vielfältige **Kompetenzerwartungen** erreicht werden. Im *inhaltsbezogenen* Bereich „Raum und Form“ können die Lernenden

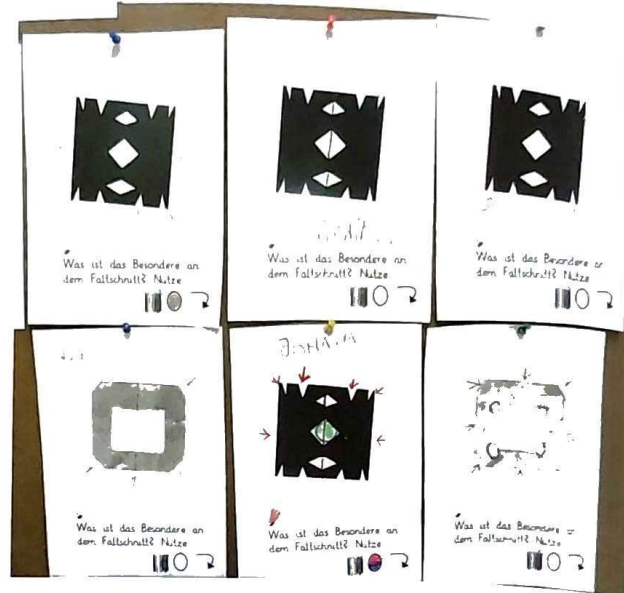
- achsensymmetrische Figuren und Bilder erzeugen (*Symmetrie*),
- ebene Figuren auf Achsensymmetrie prüfen, indem sie Faltschnitte und Zielbilder einander zuordnen (*Symmetrie*) und dabei
- die Beziehung von Teil- und Gesamtfigur erkennen und sie sich diese in der durch die Spiegelung veränderten Lage vorstellen (vgl. Merschmeyer-Brüwer 2007, S. 159f.) (*Raumvorstellung*).

Auch die *prozessbezogenen* Kompetenzen werden gefordert und gefördert, da die Lernenden

- zunehmend systematisch und zielorientiert Faltschnitte herstellen und ihre Einsicht in Zusammenhänge zur Problemlösung nutzen (*Problemlösen*);
- ihre Ergebnisse in Form der Faltschnitte auf Angemessenheit reflektieren und ihre Herleitung und Zuordnung überprüfen (*Problemlösen*);

Zu spät dran

Frank kommt oft zu spät zur Arbeit. Sein Chef fragt ihn, warum er schon wieder zu spät komme. „Ich bin aufgestanden, habe in den Spiegel geschaut, gesehen, dass ich müde bin, und musste mich wieder hinlegen.“ Daraufhin der Chef: „Häng den Spiegel ab, dann kommst du auch pünktlich zur Arbeit!“ Am nächsten Tag kommt Frank erst am Nachmittag. Der Chef schnauzt ihn an und fragt, was passiert sei. „Ich bin aufgestanden, habe in den Spiegel geschaut, und gesehen, dass ich schon weg war.“



- Vermutungen über die achsensymmetrischen Eigenschaften von Faltschnitten anstellen (*Argumentieren*);
- geeignete Begriffe und Formen der Beschreibung verwenden (*Darstellen*);
- ihre Vermutungen und Ergebnisse visuell unter der Nutzung von sogenannten Forschungsmitteln darstellen (*Darstellen*).

So sind wir vorgegangen

Die Voraussetzungen

In der Reihe konnten die Lernenden zunächst einen handelnden Zugang zu Faltschnitten erhalten. Die praktischen Erfahrungen der Lerngruppe sollten dabei im Vordergrund stehen.

Daher wurden die Lernenden zu Beginn der Reihe dazu angeregt, Faltschnitte frei zu erstellen, wobei deutlich wurde, dass die Kinder wenig bis keine Erfahrungen mit der Symmetrieachse, in diesem Fall der Faltkante, hatten. Mithilfe von mündlichen Impulsen und visuellen Anregungen konnten im weiteren Verlauf die Besonderheiten der Faltschnitte entdeckt und beschrieben werden.

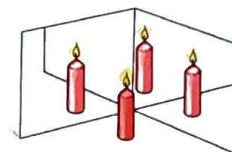
Um eine Erweiterung des mathematischen Wortschatzes zu erreichen und eine inhaltliche Transparenz zu erzeugen, wurde mit den Kin-

Was
macht eine Person, die eine
Kerze in ein Spiegelbuch gestellt hat?



Sie feiert den vierten Advent.

Zusatzfrage: Wie hat sie das
Spiegelbuch gestellt, als sie
den ersten, den zweiten
und den dritten Advent
gefeiert hat?



dem an dieser Stelle ebenfalls besprochen, dass die Faltfiguren eine Symmetrieachse aufweisen und somit *symmetrisch* sind. In der darauffolgenden Einheit wurden die praktischen Erfahrungen erneut erweitert und zunehmend systematisiert, indem die Lerngruppe Faltschnitte zielgerichtet erstellen sollte.

Die hier dargestellte Unterrichtsstunde knüpft an die zuvor handelnd erworbenen Kenntnisse an und vertieft sie, indem der Fokus auf kopfgeometrische Strategien gelegt wird. Dabei geht es um das mentale Zuordnen von Faltschnitten zu Zielbildern. Dieser Inhalt bietet sich an, um die kopfgeometrischen Kenntnisse der Schülerinnen und Schüler zu fördern. Konkret bedeutet dies, dass die Lernenden den Zusammenhang von Teil- und Gesamtfigur zunächst praktisch erfahren sollten, um ihn in der hier beschriebenen Stunde auch in Gedanken nachvollziehen zu können.

Aufgrund der Nutzung verschiedener Arbeitsblätter, die aus unterschiedlichen Faltschnitt-

Sets mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad aufgebaut sind, wurde es jeder/jedem Lernenden gemäß ihres/seines individuellen Lernstandes ermöglicht, den passenden Faltschnitt für das jeweilige Zielbild zu finden.

Weiterhin bestand die Möglichkeit, dass Kinder eine Klarsichtfolie mit Zielbild sowie einem passenden Faltschnitt zuhelfe nehmen konnten (siehe Abbildung), wenn sie trotz

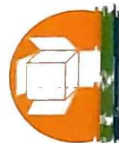
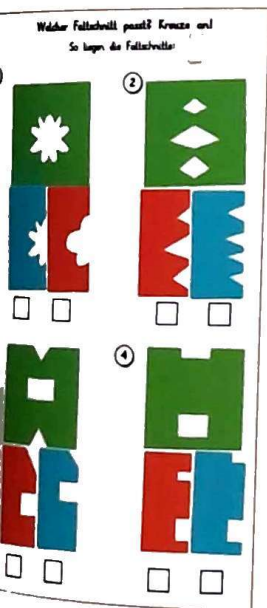
intensiven Nachdenkens nicht weiter vorankamen. Bei Faltschnitt 3 passen übrigens beide Vorlagen nicht.

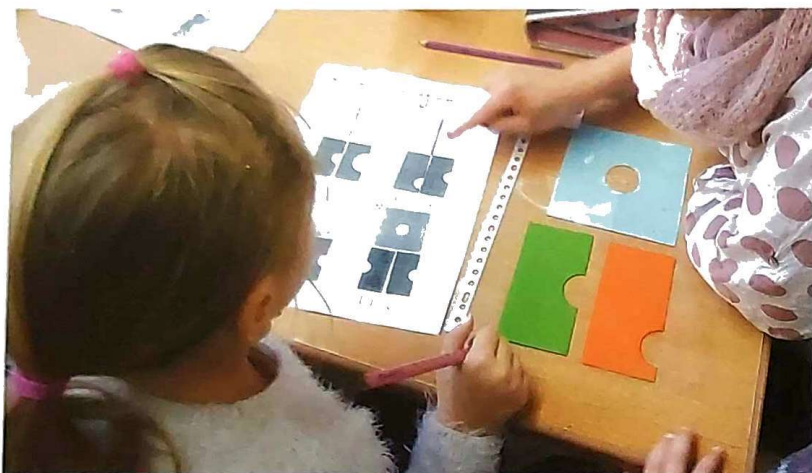
Problemstellung

Zu Beginn der Stunde besprach die Lehrperson gemeinsam mit den Kindern im Theaterkreis die Schwerpunkte der vorangehenden Stunden und formulierte sodann die Leitmotivation dieser Stunde: „Wir wollen heute herausfinden, welche Faltschnitte zu den Zielbildern passen. Dafür benutzen wir keine Schere, sondern nur unseren Kopf!“

Anschließend zeigte sie das sogenannte Reflexionsplakat, welches eine vergrößerte Version des Reflexionsarbeitsblatts darstellte. Die Lernenden äußerten erste Vermutungen darüber, welcher Faltschnitt passen und woran das liegen könnte. Die Lehrperson sammelte diese Vermutungen auf Papierstreifen und heftete sie an die Tafel.

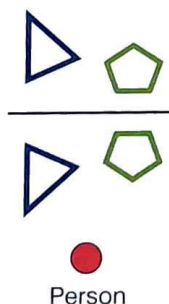
Die Lehrperson formulierte nun den Arbeitsauftrag: „Welcher Faltschnitt passt zum





Warum vertauscht der Spiegel rechts und links, aber nicht oben und unten?

Auch diese Antwort mag überraschen. Der Spiegel vertauscht gar nicht links und rechts. Wenn man vor dem Spiegel steht und die rechte Hand bewegt, dann wird auch die Hand in der rechten Hälfte des Spiegels bewegt. Das gleiche trifft auch für die linke Hand zu ebenso für den Kopf und die Füße. Insofern vertauscht der Spiegel erst einmal nichts. Dass wir denken, dass es so ist, hat damit zu tun, dass wir uns in unser Spiegel-Gegenspiegel hineinversetzen. Dadurch wird die rechte zu einer imaginären linken Hand, auch wenn man sie rechts im Spiegel sieht. Dass wir denken, rechts und links würden vertauscht, hat damit zu tun, dass unsere Drehachse in der vertikalen ist (relativ zum Bezugssystem), während oben und unten ein absolutes Bezugssystem ist, das durch die Schwerkraft vorgegeben wird. Und doch vertauscht der Spiegel etwas nämlich vorne und hinten. Das was uns näher ist, erscheint im Spiegel weiter entfernt.



Zielbild? Schau genau hin. Kreuze an." Darüber hinaus formulierte sie auch einen Auftrag in Vorbereitung auf die Reflexionsphase, den sogenannten Reflexionsauftrag: „Woran erkennst du den richtigen Faltschnitt?“

Problemlösung

In der Arbeitsphase versuchten die Lernenden, die zu den Zielfiguren passenden Faltschnitte zu finden und sie entsprechend auf dem Arbeitsblatt anzukreuzen. Die Lehrperson gab währenddessen individuell angepasste Hilfestellungen:

- Schau dir die *Form* des Zielbildes genauer an. (Form = Teilfigur)
- Ist die Form *genauso lang/groß* wie auf dem Zielbild?
- Ist es die *gleiche Form*?
- Befindet sie sich an der *gleichen Stelle*?
- Zeigt sie in dieselbe *Richtung*?

Die Schülerinnen und Schüler trafen sich so dann an der sogenannten Haltestelle zum Ma-

Mathetreff - Regeln

- ① Zeigt und erklärt eure Ideen und Ergebnisse!
- ② Klärt Fragen! 
- ③ Vergleicht eure Ideen und Ergebnisse!
- ④ Schreibt eure gemeinsame Ideen auf! 



the-Treff, wenn sie ihr individuelles Arbeitsblatt beendet hatten, um das gemeinsame Arbeitsblatt mit der Reflexionsfrage – in der Sprache der Kinder den „Forscherauftrag“ – „Woran erkennst du den richtigen Faltschnitt?“ zu bearbeiten.

Reflexion

Zur Reflexion bat die Lehrperson die Kinder dann wieder nach vorn in den Theaterkreis und erinnerte an den Forscherauftrag. Die Vermutungen aus der Einführungsphase wurden erneut betrachtet, bestätigt oder revidiert, und so wurde das Problem aus der Einführungsphase gelöst. Der Wortspeicher wurde erweitert, und die Lehrperson gab einen Ausblick auf die kommende Stunde, in der man darüber sprechen werde, „wie“ bzw. „woran“ man Faltschnitte erkennen kann.

So kann es weitergehen

Als Letztes erfolgte in der abschließenden Stunde eine Lernrückschau und Evaluation der Unterrichtsreihe zur Bewusstmachung von Lernerfolgen. Hierbei sollte eine abschließende Standortbestimmung das Wissen der Unterrichtsreihe sichern und verdeutlichen, inwiefern die Schülerinnen und Schüler ihr Verständnis von Achsensymmetrie bei Faltschnitten erweiterten.

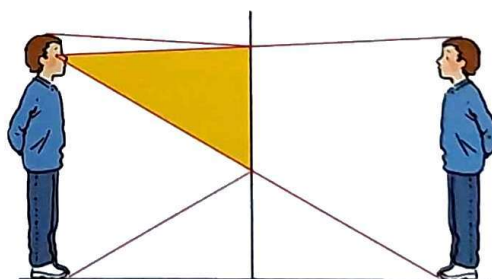


Wie groß muss ein Spiegel sein, in dem man sich vollständig sehen kann?

Es hat nichts mit dem Abstand vom Spiegel zu tun. Die überraschende Antwort lautet: Der Spiegel muss halb so groß sein. Verdeutlichen kann man sich diese Antwort mithilfe der Zeichnung: Wir zeichnen jeweils einen Strahlengang vom Auge der Person (links) zur Kopf- bzw. zur Fußspitze des Spiegelbildes. Einfallswinkel ist gleich Ausfallswinkel, man kann den Strahlengang hinter dem Spiegel gerade fortsetzen. Nun muss man sich noch für das Dreieck, das aus den Augen der Person sowie der Kopf- und der Fußspitze des Spiegelbildes besteht, an die Strahlensätze erinnern.

Der Abstand Person – Spiegel ist halb so groß wie der Abstand Person – Spiegelbild, also muss der Spiegel mindestens halb so groß sein wie die Person.

Diese Antwort gilt für Planspiegel. Gekrümmte Spiegel sind da „leistungsfähiger“, denken Sie an den Außenspiegel am Auto.

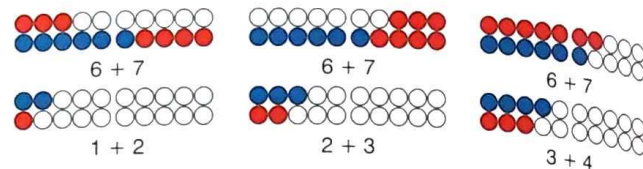


Das Nachdenken anregen

Was auf den Seiten dieses Kapitels am Beispiel der Symmetrie gezeigt wurde, lässt sich auch auf viele andere Bereiche der Mathematik übertragen: Wie entsteht Wissen im Kopf, wie löst man Aufgabenanforderungen, wie lernen Menschen? Folgt man Jean Piagets wegweisender Theorie, so wird Lernen als aktiver Konstruktionsprozess verstanden, der sich bereits existierender Zusammenhänge, des vorhandenen kognitiven Netzwerkes bedient, um neue Anforderungen bewältigen zu können.

Wenn ein Kind also beispielsweise die Aufgabe $6 + 7$ dadurch löst, dass es zunächst $6 + 6$ und anschließend $12 + 1$ rechnet, ereignet sich Lernen dann, wenn es nach und nach versteht, warum es nicht nur diese Aufgabe, sondern auch viele weitere baugleiche Aufgaben so lösen kann (verdoppeln; $+ 1$). Es wendet also Wissen in neuen Situationen an und erweitert es dadurch, dass es erkennt, warum es nicht nur in einzelnen, isolierten Fällen gilt, sondern für eine ganze Klasse von gleichartigen Aufgaben: Der Rechenweg klappt nicht nur bei $6 + 7$, sondern auch bei $7 + 8$, bei $10 + 11$ usw. Piaget spricht hier von *Assimilation*.

Lernen findet andererseits dann statt, wenn existierende Zusammenhänge, kognitive Netzwerke, nicht nur übertragen, sondern auch modifiziert werden. Denn lautet die Aufgabenanforderung beispielsweise $6 + 8$, muss ein Umlernen stattfinden, da die Vorgehensweise „verdoppeln; $+ 1$ “ hier nicht greift, sondern in „verdoppeln; $+ 2$ “ modifiziert werden muss. Das gleiche trifft beispielsweise auch zu, wenn der zweite Summand um 1 oder 2 kleiner wäre. Hier wird das Wissen also dadurch erweitert, dass das Kind erkennt, warum die für eine Klasse von gleichartigen Aufgabenanforderungen



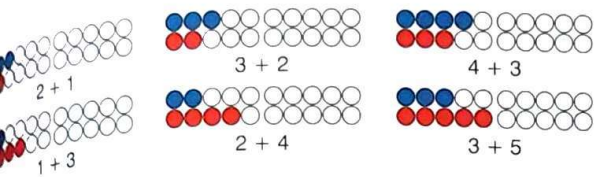
gen gültige Vorgehensweise geeignet verändert werden muss: Bei $6 + 8$ rechnet man nicht ganz genauso wie bei $6 + 7$, aber so ähnlich. Piaget spricht hier von *Akkommodation*. Dass man $6 + 8$ natürlich auch dadurch lösen kann, dass man den ersten Summanden um 1 vergrößert und im Gegenzug den zweiten um 1 verkleinert, ist für uns offensichtlich, bedarf aber bei den Schülerinnen und Schülern weiterer aktiver Konstruktionsprozesse.

Wichtig ist in diesem Zusammenhang die Erkenntnis, dass Lernen sich nicht automatisch ereignet. Unterricht kann Lernerfolge nicht garantieren, aber Unterricht kann das Eintreten von Lernerfolgen wahrscheinlicher machen. Hierzu bedarf es der aktiven Einordnung in das kognitive Netzwerk durch die Lernenden. Diese ereignet sich häufig nicht spontan, sondern muss dann durch die Lehrperson angeregt und unterstützt werden.

Das hört sich vielleicht anspruchsvoll an. Gemeint ist damit, dass die Schülerinnen und Schüler nicht nur Aufgaben bearbeiten, sondern auch dazu angeregt werden, darüber nachzudenken. Die Aufgabe $6 + 7$ kann man ganz unterschiedlich lösen, wie die Rechenplättchen-Abbildung zeigt. Der Abbildung kann man entnehmen, warum man $6 + 7$ lösen kann, indem man zunächst die (in der Regel auswendig verfügbaren) Verdopplungsaufgaben heranzieht und dann die noch fehlende 1 addiert.

Wie sehen die entsprechenden Darstellungen bei $1 + 2$, $2 + 3$, $3 + 4$ usw. aus? Es ist immer das gleiche Muster: eine „Doppelreihe mit Zapfen“. Und auch über den Zwanzigerraum hinaus. Denken Sie an $12 + 13$ oder $100 + 101$.

Wie sieht es jetzt aus bei $2 + 1$, $3 + 2$, $4 + 3$ usw., und wie mit $13 + 12$? Nicht ganz genau so, aber so ähnlich. Was ist gleich, was ist verschieden?



Und bei $1 + 3$, $2 + 4$, $3 + 5$ usw.? Wieder gilt: Nicht ganz genau so, aber so ähnlich. Was ist gleich, was ist verschieden?

Und natürlich könnte man $6 + 7$ auch lösen, indem man zunächst $7 + 7$ rechnet und dann 1 subtrahiert. Wie sieht das bei $1 + 2$, $2 + 3$, $3 + 4$ aus? Was ist gleich, was ist verschieden?

Schließlich sollte man auch die Frage stellen, bei welchen Aufgaben sich diese Strategie gut eignet und bei welchen eher weniger gut. Hier kann man zum Beispiel die folgenden Aufgaben gemeinsam mit den Kindern einordnen und diese begründen lassen, warum eine Aufgabe sich gut für den Verdopplungs-Trick eignet bzw. warum nicht. Die Kinder können auch anschließend selbst begründet Aufgaben erfinden, die sich eignen oder eher nicht.

$1 + 2$	$5 + 9$	$4 + 3$	$2 + 5$
$6 + 7$	$8 + 9$	$9 + 3$	$6 + 3$

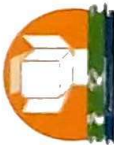
Die Fragen „Was ist gleich, was ist verschieden?“ beziehen sich zum einen auf den Vergleich der verschiedenen Aufgaben innerhalb einer Serie: Zu einer Verdopplungsaufgabe wird 1 addiert, weil der zweite Summand um 1 größer ist. Zum anderen sollen sie auch das Nachdenken über Gemeinsamkeiten und Unterschiede von Aufgabenserien anregen: Zu einer Verdopplungsaufgabe wird nicht 1, sondern 2 addiert, weil der zweite Summand um 2 (und nicht 1) größer ist.

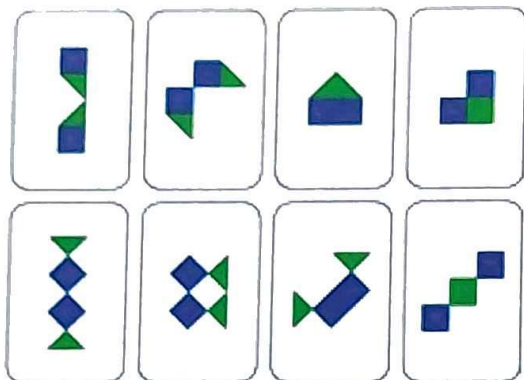
Wir sind damit am Kern des sogenannten **operativen Prinzips** angelangt, welches an anderer Stelle auf der Grundlage von Wittmann (1985) wie folgt formuliert wurde (Selter 2017, S. 14): „Der Unterricht sollte den Lernenden durchgängig Gelegenheit geben, mathematische Objekte und Operationen im Hinblick auf ihre Eigenschaften und Beziehungen zu unter-

suchen. So können die Lernenden entdecken, beschreiben und begründen, welche Auswirkungen die angewendeten Operationen auf die Eigenschaften und Beziehungen der mathematischen Objekte haben („Was passiert mit ..., wenn ...?“).“

Was bedeutet das nun für unser Beispiel? Die mathematischen Objekte, um die es hier geht, sind die Aufgaben des Typs Fastverdopplungsaufgabe, also beispielsweise $6 + 7$. Die Operation, um die es hier geht, ist nicht das Ausrechnen von $6 + 6$, sondern das Zerlegen von $6 + 7$ in $6 + (6 + 1)$, was dasselbe ist wie $(6 + 6) + 1$. Die Eigenschaften und Beziehungen, die die Lernenden entdecken, beschreiben und begründen können, bestehen darin, dass man solche Fastverdopplungsaufgaben lösen kann, wenn man sie zunächst in Verdopplungsaufgaben „verwandelt“ und dann die zunächst weggenommene 1 wieder (kompensierend) hinzuaddiert.

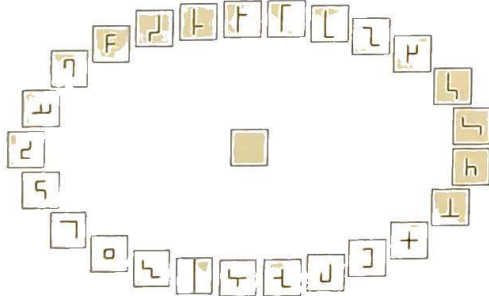
Um diese Erkenntnisse gewinnen zu können, benötigen die Lernenden hinreichend viele Beispiele, an denen sie ihre Handlungen vollziehen können. Mit dem Begriff der Handlung ist dabei nicht allein das Hantieren, das äußere Tun gemeint, sondern auch das sogenannte Denkhanteln, das Operieren in der Vorstellung mit für die Lernenden sinnbehafteten Objekten. Das können Plättchen sein, aber auch in späteren Phasen des Lernens Zahlsymbole als Repräsentanten für Zahlen. Dabei gilt: Nicht die Handlung an sich erzeugt Verständnis, sondern erst das Nachdenken über sie ermöglicht es! Denken Sie an das Finden aller Symmetrieachsen regelmäßiger Vielecke! Bloßes Verschieben des Spiegels auf den Figuren führt zwar dazu, dass schöne Bilder entstehen, aber Erkenntnisse gewinnt man nur, wenn man darüber nachdenkt, wie man den Spiegel platziert und welche Folgen dieses hat.





Durch Faltschnitte kann Lernenden ein handlungsorientierter Zugang zur Achsensymmetrie ermöglicht werden. Die Herstellung von Faltschnitten ist mit wenig Material und ohne großen Zeitaufwand möglich. Die Schülerinnen und Schüler stellen zunächst selbst Faltschnitte her. Aufbauend auf ihren praktischen Erfahrungen operieren sie anschließend mit den Teil- und Gesamtfiguren der Faltschnitte im Kopf, sodass ihr räumliches Vorstellungsvermögen geschult wird (pikas.dzlm.de/315).

Zeichne einen eigenen Streichholzvierling in die Mitte. Verbinde diesen mit Hilfe von Linien mit allen anderen Streichholzvierlingen, die du durch Umlegen eines Streichholzes erzeugen kannst.



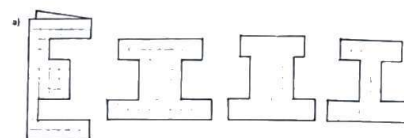
Im Projekt primakom beschreibt eine Seite zum Thema „Symmetrie“ fachliche und fachdidaktische Hintergründe. Die folgenden Fragen werden thematisiert: Was ist Symmetrie? Welchen Symmetriebegriff brauchen Grundschulkinder? Wie kann ein solcher entwickelt werden? Außerdem wird die Lernumgebung Faltschnitte ausführlich beschrieben (primakom.dzlm.de/500).

Literatur

- Franke, M./Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule*. Heidelberg: Springer.
 Helmenich, M./Lengnik, K. (2016). *Einführung Mathematik Primarstufe*. Heidelberg: Springer.
 Schupper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Hannover: Schroedel.

Die Kira-Seite zur Achsensymmetrie illustriert, wie Erstklässlerinnen und Erstklässler, die im Mathematikunterricht noch keine Erfahrungen im Bereich der Achsensymmetrie machen konnten, mit dem sogenannten Spiegeltangramm arbeiten. Hierbei handelt es sich um ein Material zur Schulung der Fähigkeit, achsensymmetrische Figuren zu erzeugen und sich gleichzeitig mit Formen zu beschäftigen. Ziel ist es, die Formenplättchen (verschiedene Dreiecke, ein Quadrat und ein Parallelogramm) so vor einem Spiegel zu platzieren, dass die gelegte Figur zusammen mit der Figur im Spiegel das Bild auf einer Spielkarte ergibt (kira.dzlm.de/140).

1) Arbeite mit einem Partner zusammen. Könnt ihr herausfinden welche aufgeklappte Figur zu welchem Faltschnitt gehört? Verbindet.



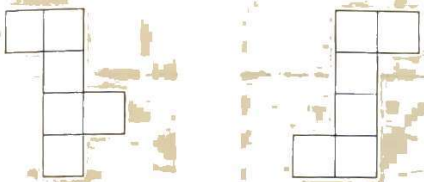
Eine weitere PIKAS-Seite widmet sich der Lernumgebung „Streichholzvierlinge & Co.“. Ein Streichholzvierling besteht aus 4 Streichhölzern, die immer Ecke an Ecke und nur linear oder im rechten Winkel aneinandergelegt werden. Es entstehen 25 verschiedene Vierlinge, mit denen man Aktivitäten durchführen kann, etwa aus einem Vierling durch Umlegen eines Streichholzes einen neuen Vierling erzeugen. Neben Unterrichtsmaterial (pikas.dzlm.de/298) gibt es auch Fortbildungsmaterial (212).



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Die Entdecker-Päckchen (auch „schöne Päckchen“) stellen ein vergleichsweise leicht zugängliches Aufgabenformat dar. Darunter werden operative Aufgabenserien verstanden, welche die Kinder zum Entdecken, zum Erforschen und zum Erklären anregen. Inhaltsbezogene Kompetenzen werden dabei ebenfalls geschult. Hierzu findet sich auf PIKAS sowohl Unterrichtsmaterial (pikas.dzlm.de/edp) als auch Fortbildungsmaterial (161).

Würfelnetz oder kein Würfelnetz?



Die Kira-Website behandelt Denkweisen von Schülerinnen und Schülern zu einigen weiteren Aufgabenformaten, bei deren Bearbeitung das operative Prinzip angesprochen wird: Nim-Spiel (kira.dzlm.de/142), Schöne Päckchen (169) oder Zahlengitter (114). Auch auf PIKAS finden sich Hinweise für konkrete unterrichtliche Umsetzungen für Unterrichtsbeispiele, bei denen die Lernenden operative Zusammenhänge erforschen können, wie zum Beispiel Rechenquadrate mit Ohren (pikas.dzlm.de/116), Umkehrzahlen (115), Mal-Plus-Häuser (026) oder Zahlenmauern (195).

Literatur
Selter, Ch. (2017). *Guter Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen.
Wittmann, E. Ch. (1985). Objekte – Operationen – Wirkungen. *mathematik lehren* 11, S. 7–11.

Das operative Prinzip meint, dass die Kinder an geeigneten Aufgaben Variationen vornehmen, dabei Erkenntnisse gewinnen und diese anwenden. Leider wird diese Forderung häufig vollkommen missverstanden, sodass nahezu jede körperliche Tätigkeit oder Handlung der Kinder als „operativ“ bezeichnet wird. Auf der Kira-Website zum operativen Prinzip (kira.dzlm.de/147) wird daher beschrieben, was das operative Prinzip bedeutet und welche Rolle es im Mathematikunterricht einnimmt.



Hanna

Auf PIKAS gibt es sowohl ein Fortbildungsmodul (pikas.dzlm.de/210) als auch Unterrichtsmaterial (148) zur Lernumgebung „Inter-Netzzo“. Die Namensgebung lässt schon vermuten, worum es im Sinne des operativen Prinzips gehen soll: sich Gedanken darüber zu machen und herauszufinden, was zwischen den Netzen auf dem Weg vom Netz zur Schachtel bzw. zum Würfel passiert – und auch umgekehrt, was auf dem Weg von der Schachtel bzw. vom Würfel zum Netz passiert und welche Netze zusammengehören.

