

Raum und Form begreifen und sich vorstellen

Strukturen und Begriffe bilden

VON CARLA MERSCHMEYER-BRÜWER

Zentrales Ziel aller geometrischen Tätigkeiten ist die Entwicklung mentaler räumlicher Vorstellungen zu den in den Bildungsstandards geforderten geometrischen Inhaltsbereichen. Damit einher geht auch das Lernen geometrischer Begriffe.

Geometrische Kompetenzen gelten als unverzichtbar im Hinblick auf das weitere Mathematiklernen und das naturwissenschaftliche und technische Denken. Auch der Verhaltensforscher Konrad Lorenz (1968, S. 68) geht davon aus, dass wahrscheinlich „das gesamte Denken des Menschen aus von der Motorik gelösten Operationen im ‚vorgestellten‘ Raum seinen Ursprung genommen hat“ und in dieser ursprünglichen Funktion „auch für unsere höchsten und komplexesten Denkkakte die unentbehrliche Grundlage bildet.“ Er konstatiert, dass es keine Form des Denkens gibt, „die vom zentralen Raum-Modell unabhängig wäre.“ Heinrich Winter stellte schon 1976 fest: „... denn wohl jede Art von Denken – vielleicht mit Ausnahme des formalisierten – hat einen räumlichen Aspekt. So wird ja in allen Fächern Anschaulichkeit gefordert, und was ist Anschauung anderes als Geometrisierung von Begriffen?“

Ein Verständnis von Raum und Form basiert ganz wesentlich zunächst auf Wahrnehmungen. Das Wahrnehmen ist ein aktiver kognitiver Prozess und hängt von subjektiven Erfahrungen und Erwartungen ab. Aufgrund der individuellen Wahrnehmung konstruieren wir unsere mentalen Vorstellungen zu räumlichen Phänomenen. Diese Vorstellungsbilder entstehen dabei durch Re- und Neukonstruktion des Wahrgenommenen. Innerhalb des

Inhaltsbereichs „Raum und Form“ der Bildungsstandards für die Primarstufe sollen auch Grundschul-kinder als eine von vier Leitideen befähigt werden, geometrische Figuren zu erkennen, benennen und darzustellen.

EINFÜHRUNG IN GEOMETRISCHE BEGRIFFE

Das Lernen geometrischer Begriffe geht einher mit dem Kennenlernen geometrischer Formen und Körper. Nicht jedes Wort mit geometrischem Inhalt ist schon ein Begriff. Auch ein Name für einen Gegenstand, einen Zusammenhang oder ein Ereignis ist noch kein Begriff. Ein Begriff bezeichnet vielmehr eine Klasse bzw. Kategorie von Objekten mit gemeinsamen Eigenschaften und Beziehungen zueinander. Ein Begriff umfasst damit immer auch die gemeinsamen charakterisierenden relevanten Eigenschaften der Objekte einer Kategorie und blendet andere individuelle und spezifische Eigenschaften eines Objektes aus (vgl. Franke 2007). Aufgrund dieser kognitiven Differenzierung von Eigenschaften stellen Begriffe Idealisierungen eines bestimmten Typus von Objekten dar. Drei Wege zur Einführung geometrischer Begriffe sind denkbar:

Deduktives Vorgehen

Die Kinder können Begriffe deduktiv entwickeln, indem die Lehrkraft ihnen die notwendigen In-

formationen zu Charakteristiken eines Begriffs zur Verfügung stellt. Die Kinder untersuchen dann Objekte auf das Vorhandensein bestimmter Merkmale und prüfen so die Zuordnung zu einem Begriff.

Konstruktives Vorgehen

Eine konstruktive Erarbeitung eines Begriffs erfolgt, indem die Kinder Repräsentanten einer Figurenklasse herstellen und dabei die charakteristischen Eigenschaften des zu dieser Figurenklasse gehörenden Begriffs in ihr Bewusstsein rufen. Beispielsweise können sich die Kinder beim Herstellen eines Quaders aus Knetmasse anhand ihrer Handlungen Quadereigenschaften verdeutlichen, indem sie zwecks Herstellung paralleler Seitenflächen wiederholt gegenüberliegender Flächen der Knetmasse auf die Tischplatte stoßen.

Induktives Vorgehen

Besonders wichtig ist die induktive Begriffsbildung. Dabei bezeichnen die Kinder als relevant erarbeitete und erkannte Eigenschaften einer geometrischen Figurenklasse mit dem Begriff. Aufgabe der Lehrkraft dabei ist es, solche Modelle für den zu erwerbenden Begriff auszuwählen, „die adäquate manuelle, zeichnerische oder mentale Handlungen anregen und das Entdecken relevanten Beziehungen und Strukturen ermöglichen“ (Maier/Schweiger 1999, S. 83). Die Modelle sind keineswegs selbsterklärend und ihre Eigenschaften nicht unmittelbar

erkennbar. Deshalb muss die Lehrkraft die Kinder durch geeignete Impulse (z. B. durch Kontrastierung oder Hinterfragung) auf relevante Eigenschaften so aufmerksam machen, dass die Kinder diese Betrachtungsweise selbst entdecken können und sich Kennzeichen des Begriffs in ihr Bewusstsein rufen.

Dabei wird auch ein wichtiger Beitrag zur Fähigkeit des Kommunizierens und mathematischen Argumentierens geleistet. Problematisch ist häufig die fehlende Eindeutigkeit des Modells. Die Kinder abstrahieren möglicherweise irrelevante Eigenschaften. Beim Sortieren von Körpern konzentrieren sie sich z. B. auf Farbe oder Materialbeschaffenheit, oder sie nehmen das Modell nicht als Repräsentant einer ganzen Gruppe von Objekten wahr, sondern werten auch nicht notwendige Eigenschaften des Modells als prototypisch für den Begriff des Objekts. So können beispielsweise häufig in Schulbüchern abgebildete Quader mit Kantenlängen im Verhältnis 4:2:1 bei Kindern zu der Vorstellung führen, dass Quader immer ähnliche Verhältnisse der Kantenlängen zueinander aufweisen bzw. in der Dimension ähnlich zu einer Streichholzschachtel oder einem Ziegelstein sein müssen. Quader mit davon deutlich abweichenden Kantenverhältnissen, z. B. mit einer Kante, die mehr als 10mal so lang wie eine dazu senkrechte Kante ist, werden möglicherweise nicht als Quader identifiziert.

Herausfordern kann man dieses Denken zum Erkennen notwendiger Eigenschaften auch, indem man die Kinder fragt, was wäre herausgekommen, wenn ... (z. B.: „wir bei diesem Quader eine Kante und seine Parallelen um das Zehnfache verlängern würden?“) Dabei regt man die Kinder zu abstraktem räumlichen Vorstellen an. Eine unmittelbare Überprüfung durch Handlung wie z. B. Nachbauen ist nicht mehr nötig. Sprachliche Äußerungen haben bei dieser Vorgehensweise eine hohe Bedeutung.

AUSBILDUNG GEOMETRISCHER BEGRIFFE

Die Sprache ist für die mathematische Begriffsbildung nicht nur

	Eigenschaftsbegriffe	Relationsbegriffe	Objektbegriffe
Räumliche Geometrie	Ecke, Kante, (Seiten-)Fläche, würfelförmig, quaderförmig, zylinder- oder walzenförmig, kugelig u. a.	steht neben, auf, hinter, vor oder links / rechts von genauso groß wie volumengleich mit, u. a. identisch mit ähnlich zu	Würfel Quader (Prisma) Pyramide Zylinder Kugel Kegel
Ebene Geometrie	Linie, Gerade, Strecke, Dreieck, gerade, eben, gekrümmt / krumm, eckig, dreieckig, viereckig, quadratisch, rechteckig, fünfeckig, etc., rund, kreisförmig, u. a.	ist deckungsgleich mit symmetrisch zu parallel zu senkrecht zu flächengleich zu genauso lang wie	Viereck Quadrat Rechteck (Fünfeck, Sechseck, etc.) (Parallelogramm) Kreis

in der Geometrie von hoher Bedeutung. Alle Kinder müssen quasi neue Vokabeln als Bezeichnungen für geometrische Objekte, ihre Eigenschaften und Relationen zueinander erwerben. Kinder lernen dabei Begriffe auf verschiedenen Abstraktionsebenen (vgl. van Hiele 1976). Zunächst können die Kinder ihnen präsentierte geometrische Objekte ganzheitlich wahrnehmen und bezeichnen. Dabei verwenden sie häufig selbst gewählten Namen. Im nächsten Entwicklungsschritt vermögen die Kinder Eigenschaften geometrischer Figuren aufzulisten. Diese Eigenschaften bleiben aber noch lokal beschränkt auf einzelne Figuren. Dabei finden spezifische Eigenschaftsbegriffe Verwendung. Diese Eigenschaftsbegriffe differenzieren Kinder weiter aus, wenn sie gemeinsame und unterschiedliche Eigenschaften beim Vergleichen geometrischer Objekte anführen. Dann treten logische Beziehungen zwischen Objekten vergleichbarer Eigenschaften in den Vordergrund der kindlichen Wahrnehmung und führen zur Artikulation von Relationsbegriffen. Erst wenn Kinder eine geometrische Figur anhand von notwendigen und hinreichenden Eigenschaften charakterisieren können, haben sie einen Objektbegriff so ausgebildet, dass sie ihn auch für verschiedene Repräsentanten sicher anwenden können.

VERSTÄNDNIS GEOMETRISCHER BEGRIFFE

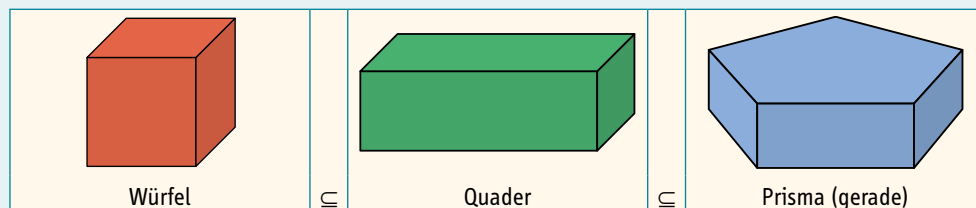
Da ebene Figuren Flächen an (dreidimensionalen) Körpern bilden, sind Begriffe zu ebenen Figuren auch im Kontext der Betrachtung geometrischer Körper im Raum notwendig. Hier ist darauf zu achten, dass Kindern beim Beschreiben und Argumentieren immer deutlich ist, ob sie sich partiell auf eine Fläche an einem spezifischen Körper beziehen oder auf die räumliche Figur, den Körper in seiner Ausdehnung und Anordnung im Raum. Eine Übersicht über relevante geometrische Begriffe gibt Abb. 1.

Um die Übersicht zu ebenen und räumlichen Figuren zu erhalten, ist es wichtig, die Klasseninklusionen sowohl innerhalb der geometrischen Körper (siehe Abb. 2) als auch innerhalb der ebenen Figuren (siehe Abb. 3) bei der Begriffsbildung zu erarbeiten. Im Unterricht kann man so vorgehen: Gemeinsam mit den Kindern werden aus einer Menge von verschiedenen Prismen zunächst die Menge der Quader anhand der Vorgabe von zwei Repräsentanten herausgesucht. Anschließend sortieren die Kinder analog dazu aus dieser Menge an Quadern alle Würfel heraus. Ebenso können die Kinder an den Körpern jeweils die entsprechenden Vielecke identifizieren und diese dann gemeinsam sortieren. Dabei sortieren sie aus ei-

Abb. 1: Übersicht über geometrische Begriffe, wie sie im inhaltlichen Kompetenzbereich in der Grundschule gefordert sind. Die eingeklammerten Begriffe gehören nicht zu den Anforderungen der Bildungsstandards, sondern stellen eine für leistungsstarke Lerngruppen sinnvolle Erweiterung dar (vgl. Franke 2007).

GEOMETRISCHE KÖRPER

Ein **Polyeder** (Vielfach) ist ein Körper, der von ebenen Flächen aus (beliebigen) n -Ecken (Polygone, Vielecke) begrenzt wird. Von den Polyedern sind die **Nicht-Polyeder** abzugrenzen. Diese stellen Körper dar, die durch gekrümmte Flächen begrenzt sind. Dazu gehören u. a. Zylinder, Kegel und Kugel.



Prisma heißt ein Polyeder (Vielfach), das mindestens zwei zueinander kongruente und parallele Grund- und Deckflächen besitzt. Die Seitenflächen sind Rechtecke („gerades“ Prisma) oder allgemeine Parallelogramme (ggf. „schiefes“ Prisma).

Quader sind gerade Prismen mit rechteckigen Grundflächen. Im Quader sind die Raumdiagonalen gleich lang.

Würfel sind Quader mit gleichen Kantenlängen.

Pyramide wird ein Polyeder genannt, dessen Grundfläche ein n -Eck ist und dessen Seitenflächen n Dreiecke sind, die in einem Punkt zusammenlaufen. **Pyramiden** heißen **gerade**, wenn der Fußpunkt des Lotes von der Spitze auf die Grundfläche deren Mittelpunkt ist. Sie heißen **regulär**, wenn die Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck ist.

Abb. 2: Klasseninklusionen zwischen den Mengen Würfel, Quader und Prismen.

ner Menge von diversen Vielecken zunächst alle (konvexen) Vierecke heraus. Aus dieser greifen sie die Menge der Parallelogramme heraus, aus der wiederum die Menge der Rechtecke. Damit ist die Menge der Quadrate als (Teil-)Menge der Rechtecke dargestellt.

PROZESSBEZOGENE KOMPETENZEN

Zentrales Ziel aller geometrischen Tätigkeiten ist die Entwicklung mentaler räumlicher Vorstellungen zu den in den Bildungsstandards geforderten geometrischen Inhalts-

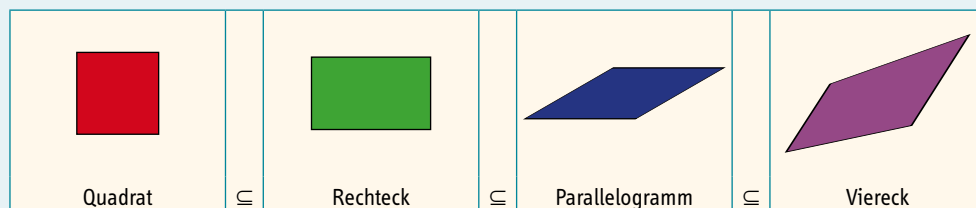
bereichen, hier der geometrischen Begriffsbildung. Ausgangspunkt eines Lernprozesses auch in der Geometrie kann zunächst die Simulation der mathematischen Problemstellung durch Handlungen an Materialien sein. Diese Handlungen müssen die Kinder reflektieren, untereinander diskutieren und sich ihre Lösungen im Gespräch mitteilen. So kann die Kompetenz zur mathematischen Kommunikation gefördert werden. Wenn die Kinder verschiedene Lösungswege vorstellen, denken sie auch über die Sinnhaftigkeit ihres Vorgehens bei der Lösung nach. Dieses unterstützt

das mathematische Argumentieren. Das Versprachlichen ihrer individuellen Erfahrungen im Umgang mit dem Material zwingt die Kinder zur Darstellung. Die Dokumentation beispielsweise durch Zeichnen oder durch Legen oder Bauen des geometrischen Objekts fördert auch das Denken auf verschiedenen Repräsentationsebenen eines geometrischen Sachverhalts. Kinder sollen zwischen den Ebenen der Handlung, der Beschreibung und Darstellung sowie der abstrakten Begriffsbildung wechseln können. Schließlich sollen sie auch ohne materiale Hilfe, nur mit Hilfe ihrer räumlich strukturierter Vorstellungen von geometrischen Objekten und mit „verinnerlichten“ Strategien Aufgaben lösen können und so den geometrischen Sachverhalt „begreifen“. Vielen Kindern gelingt dieses jedoch nicht „von selbst“ nur durch immer wiederholte Handlungen am Material. Für diese Kinder sind gezielte unterstützende Übungen notwendig, die sie fordern, ihre Erfahrungen entweder zu beschreiben oder durch andere Dokumentationsformen wie Zeichnen, Bauen oder Legen, die Umstrukturierungen demonstrieren, darzustellen. ●

Abb. 3: Klasseninklusion der für die Grundschule relevanten Vierecke.

EBENE FIGUREN

Ein **Polygon (Vieleck)** entsteht, indem mindestens drei voneinander verschiedene Punkte in einer Zeichenebene durch Strecken miteinander verbunden werden, sodass durch den entstandenen Linienzug eine zusammenhängende Fläche umschlossen wird. Ein Vieleck ist **konvex**, wenn es ganz auf einer Seite jeder der Geraden liegt, zu denen man sich jede Kante fortgesetzt denken kann. Ein konvexes Vieleck (konvexes Polygon) hat also keine einspringenden Ecken, jeder Winkel ist kleiner als 180° . Je nach Anzahl n der Ecken eines Polygons werden die verschiedenen n -Ecke unterschieden: Dreiecke, Vierecke, Fünfecke, Sechsecke usw.



Parallelogramm wird ein Viereck genannt, das die folgenden Eigenschaften besitzt: Die einander gegenüberliegenden Seiten sind gleich lang und parallel. Einander gegenüberliegende Winkel sind gleich groß. Die Diagonalen halbieren einander.

Ein Parallelogramm ist ein **Rechteck**, wenn es nur rechte Winkel enthält oder zwei gleich lange Diagonalen besitzt, wobei die eine Eigenschaft die andere zur Folge hat. Wenn die Kanten gleich lang sind, wird ein Rechteck **Quadrat** genannt.

DIE AUTORIN

Dr. Carla Merschmeyer-Brüwer ist Professorin für Didaktik der Mathematik und Elementarmathematik an der TU Braunschweig. Sie ist Mitglied des wissenschaftlichen Beirats von Mathematik differenziert und moderierte dieses Heft.

LITERATUR

- Franke, Marianne:** Didaktik der Geometrie in der Grundschule. München 2007
- Lorenz, Konrad:** Vom Weltbild des Verhaltensforschers. München 1968
- Maier, Hermann/Schweiger, Fritz:** Mathematik und Sprache. Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht. Wien 1999
- Van Hiele, P. M.:** Wie kann man im Mathematikunterricht den Denkstufen Rechnung tragen? In: Educational Studies of Mathematics, No. 7/1976, S. 157–169
- Winter, Heinrich:** Was soll Geometrie in der Grundschule. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 1976, S. 14–18