

Simone Reinhold

Kopfgeometrie

Geometrische Begriffe schulen und Raumvorstellung fördern

Im klassischen Verständnis des Begriffs „Kopfgeometrie“ waren kopfgeometrische Übungen ausschließlich in der Vorstellung zu lösen. Modelle oder Zeichnungen zur Unterstützung des Lösungsprozesses durften während der Aufgabenbearbeitung nicht herangezogen werden. Dies wird in der aktuellen Diskussion allerdings weniger streng gesehen.

Kopfgeometrie – begriffliche Ursprünge

Der Begriff der Kopfgeometrie lässt sich u. a. auf Ausführungen von Kerst (1920) oder Breidenbach (1964) zurückführen. Gemeinsam ist diesen Konzepten wie auch den Überlegungen von Senftleben (1995, 1996) die Auffassung, dass durch die Beschäftigung mit der Kopfgeometrie eine Förderung des räumlich-visuellen Vorstellungsvermögens erzielt wird. Im klassischen Verständnis des Be-

griffs waren kopfgeometrische Übungen ausschließlich in der Vorstellung (z. B. mit geschlossenen Augen) zu lösen. Modelle oder Zeichnungen zur Unterstützung des Lösungsprozesses durften während der Aufgabenbearbeitung nicht herangezogen werden. Im Beitrag „Zur Sache“ (S. 2) und in weiteren Artikeln dieses Heftes wird jedoch deutlich, dass dies in der aktuellen Diskussion weniger streng gesehen wird. So bieten konkrete Handlungserfahrungen mit Materialien (vgl. z. B. Willms „Farbcodes“,

S. 16), Bildbetrachtungen (vgl. z. B. Roos „Fisch ist Fisch“, S. 8) oder andere Aktivitäten oft einen reizvollen Ausgangspunkt für die Kopfgeometrie und können dabei helfen, die Lösung einer kopfgeometrischen Übung darzustellen bzw. zu kommunizieren. Entscheidend bleibt dabei, dass die innerhalb der Aufgabe enthaltenen räumlich-visuellen Anforderungen an die Vorstellung mental gelöst werden (Abb. 1).

Sprachliche Begleitung beim Begriffslernen

Im Zentrum der Kopfgeometrie steht das gedankliche, räumlich-visuelle Operieren mit geometrischen Figuren und Objekten. Die bei dieser kognitiven Anforderung ablaufenden mentalen Prozesse können prinzipiell auch ohne die Verwendung geometrischer Begriffe stattfinden und alle Bereiche der Raumvorstellung betreffen, die im folgenden Abschnitt ausführlicher betrachtet werden. Damit sind kopfgeometrische Übungen im Zusammenhang mit sämtlichen der im Geometrieunterricht typischerweise eingesetzten Aktivitäten (Falten, Schneiden, Legen usw.) denk- und realisierbar. Die Phasen I

Abb. 1:
Ohne wirklich an
den Seilenden zu
ziehen, soll die
Aufgabe gelöst
werden.

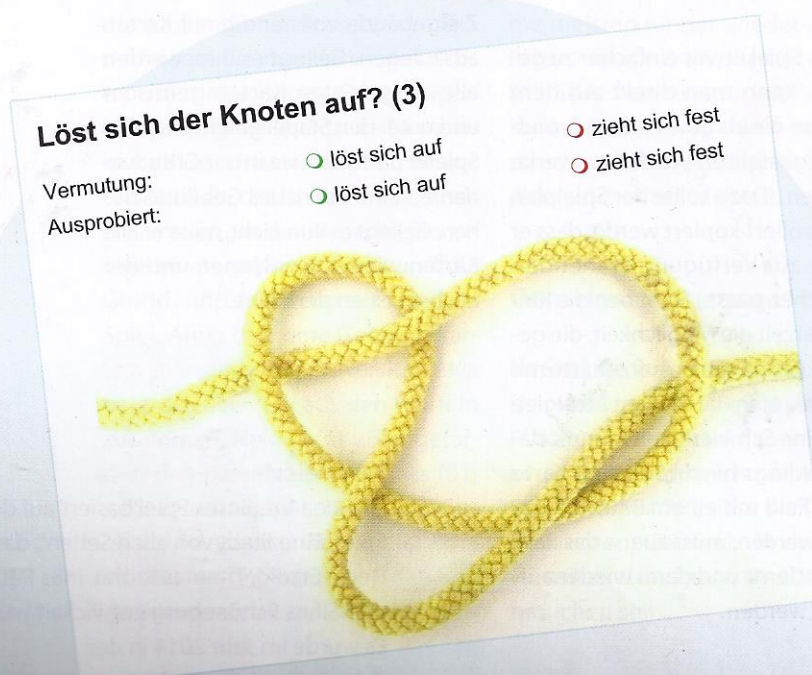




Abb. 2: Welche Augenzahl liegt unten?

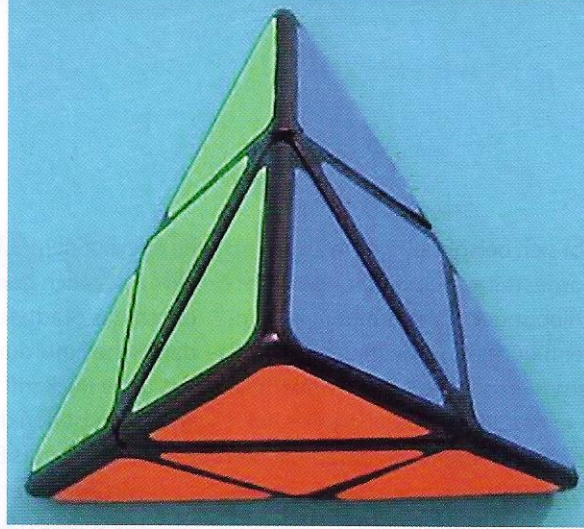


Abb. 3: Was passiert beim Kippen auf die blaue Seite?

(Aufgabenstellung) und III (Ergebnisdarstellung, vgl. Abb. 3 im Beitrag „Zur Sache“) bieten jedoch besondere Chancen zur bewussten Einbeziehung sprachlicher Begleitung.

Verbalisiert die Lehrkraft eine geometrische Fragestellung bei der Präsentation bzw. Aufgabenstellung, mit der die Kinder kopfgeometrisch aktiv werden, nutzt sie selbst als sprachliches Vorbild geometrische Begriffe und Satzstrukturen, die von den Kindern erfasst und in räumlich-visuelle Repräsentationen „übersetzt“ werden müssen. Insbesondere Kinder, die die deutsche Sprache (noch) nicht sicher beherrschen, aber auch andere Kinder, benötigen dazu Hilfen und gezielte, evtl. auch durch weitere Symbole oder Bilder unterlegte, Wiederholungen, damit die sprachliche Ebene tatsächlich den visuellen Vorstellungsprozess anregt.

Um das oft noch intuitive Verständnis geometrischer Begriffe zunehmend zu einem integrierten Begriffsverständnis zu entwickeln, bei dem beispielsweise auch Begriffshierarchien erkannt werden, ist neben diesem sprachlich-symbolischen Handeln der Lehrkraft auch bei den Kindern eine sprachliche Begleitung ihrer mentalen Aktivitäten in Phase II bedeutsam (vgl. dazu auch die Beiträge von Anders, S. 4 und Roos, S. 8). Wortspeicher mit Fachbegriffen oder Anregungen zum Formulieren wiederkehrender Satzstrukturen erleichtern schließlich auch den Austausch über das Vorgestellte in Phase III und festigen die zu erwerbenden geometrischen Begriffe.

Raumvorstellung fördern

Raumvorstellung gilt als Teil der Intelligenz und wird zumeist als Bündel von Teilfähigkeiten angesehen. So stehen in Phase II der Kopfgeometrie (Aufgabenbearbeitung) räumlich-visuelle Fähigkeiten im Mittelpunkt, die sich auf verschiedenartige Anforderungen an die Raumvorstellung richten können. Franke und Reinhold (2016) verweisen in der Darstellung verschiedener Theorien zur Differenzierung der Raumvorstellung in Teilaspekte allerdings darauf, dass in der Literatur diesbezüglich keinesfalls Einigkeit besteht. Vielmehr sind sowohl die Differenzierungen selbst als auch die Terminologie zur Beschreibung verschiedener Teilaspekte oft so divergent, dass hier vorgeschlagen wird, sich im Grundsatz an der vielfach belegten faktorenanalytischen Differenzierung nach Thurstone (1950) zu orientieren. Er unterscheidet dabei im Wesentlichen drei Bereiche: das Erfassen und Vorstellen räumlicher Beziehungen, die gedankliche Manipulation räumlicher Begebenheiten sowie die Orientierung im Raum, die auch die Fähigkeit zur gedanklichen Perspektivübernahme einschließt.

Erfassen und Vorstellen räumlicher Beziehungen

Die räumlichen Beziehungen in ebenen Konfigurationen oder in räumlichen Arrangements stehen oftmals in einem sehr stabilen Zusammenhang: Beispielsweise ändert sich die

räumliche Struktur eines Spielwürfels und die Lage der einzelnen Seitenflächen des Würfels zueinander nicht, wenn der Würfel beim Spielen gedreht und damit als Gesamtes in andere Lage gebracht wird. Besteht die Anforderung nun darin, anzugeben, welche Augenzahl auf einer nicht mehr sichtbaren Seite liegt, muss dies anhand der noch sichtbaren Augenzahlen mental rekonstruiert werden (Abb. 2).

Auch Aufgaben wie die Bestimmung der Anzahl von Einzelwürfeln in einem Würfelgebäude erfordern das Vorstellen solcher stabilen räumlichen Beziehungen: Oft sind solche Bauwerke so umfänglich, dass es zahlreiche, nicht von außen sichtbare oder in einer Abbildung erkennbare, Einzelwürfel gibt, die gedanklich unter Berücksichtigung aller räumlichen Beziehungen mental rekonstruiert werden müssen. Auch die räumlichen Beziehungen der farbigen Flächen eines eingefärbten Tetraeders im Spiel „Pyramiden-Duell“ (vgl. Häring, S. 24 in diesem Heft) bleiben stets stabil – vorzustellen hat der Spielende sich lediglich, dass das Tetraeder als Gesamtes über die Kanten gekippt wird (Abb. 3).

Gedankliche Manipulation räumlicher Begebenheiten

Aufgaben, die Raumvorstellung erfordern, können auch dadurch geprägt sein, dass man sich Veränderungen innerhalb eines ebenen oder räumlichen Arrangements vorstellen soll. Eine solche interne Dynamik er-

gibt sich beispielsweise im Zuge von (vorgestellten) Spiegelungen, Verschiebungen, Zerlegungen, Zusammenfügungen, Ergänzungen, Vergrößerungen oder Rotationen innerhalb einer räumlichen Situation. Das heißt einzelne Elemente einer räumlichen Situation werden hinzugefügt, verkleinert, entfernt usw. und dabei in ihren räumlichen Bezügen zu anderen Elementen der Situation verändert. Dies wird in der Literatur vielfach als „Veranschaulichung“ (oder „Visualisierung“) bezeichnet und wird beispielsweise eingefordert, wenn Flächenformen im Spiel „Farbcode“ (vgl. Wilms, S. 16 in diesem Heft) immer wieder gedanklich und konkret zu neuen Arrangements und neuen Zielfiguren ergänzt werden sollen.

Orientieren und Perspektiven einnehmen

Neben der Rechts-links-Orientierung und der räumlichen Orientierung im wahrgenommenen oder vorgestellten Raum können Anforderungen an die Raumvorstellung auch das Hineinversetzen in andere Perspektiven umfassen. Besonders naheliegend sind hier zunächst kopfgeometrische Übungen, die sich auf die von den Kindern bereits gemeinsam erkundete Umgebung im Schulgebäu-

de oder auf dem Schulgelände beziehen. Aber auch gedankliche „Reisen“ durch das Stadtviertel oder die gedankliche Einordnung eines Betrachters unter Rückgriff auf markante Perspektiven ist denkbar:

- Wie würde das Bild aussehen, wenn der Maler von links auf das Haus schauen würde? (Abb. 4)
- Stell dir vor, du läufst den Gang vor deinem Klassenraum entlang und stehst unten an der Treppe im hinteren Treppenhaus. Steige in den ersten Stock, drehe dich nach links und laufe weiter bis zur großen Palme. Dort gehst du noch etwa zehn Schritte weiter nach rechts. Vor welchem Klassenraum stehst du?

Zur Relevanz der Raumvorstellung

Die Bedeutung von kopfgeometrischen Fähigkeiten, die unser räumliches Vorstellungsvermögen fordern, lässt sich zunächst in Alltagssituationen erkennen: Im Straßenverkehr sollten wir uns vorstellen können, wann ein sich näherndes Auto wohl voraussichtlich unseren Weg kreuzen wird. Die Realisierung von Umzugsplänen oder die Orientierung in

unbekannter Umgebung – etwa unter Zuhilfenahme einer Wanderkarte – ist geprägt von unserer Fähigkeit, die Umwelt wahrzunehmen, uns aber darüber hinaus auch Veränderungen oder bislang unbekannte räumliche Begebenheiten vorstellen zu können.

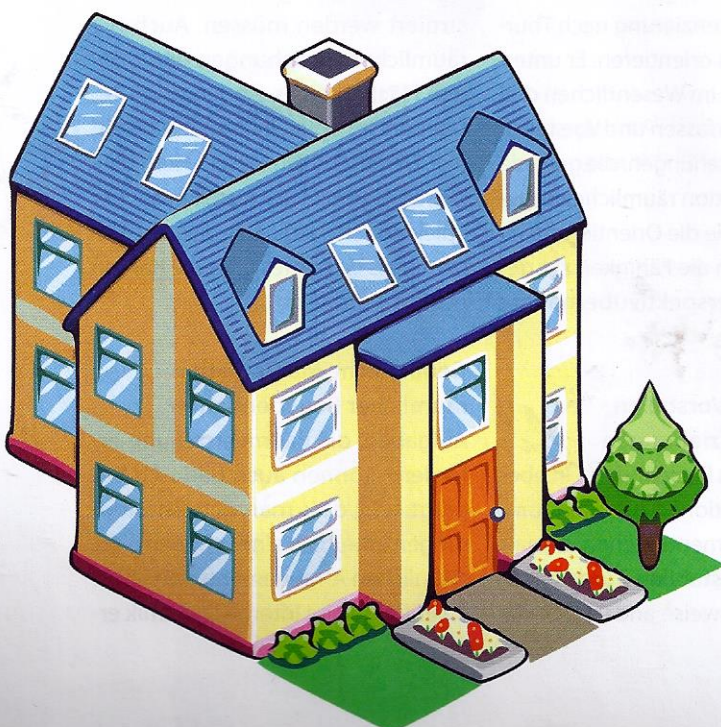
Ob beim Erwerb der Schriftsprache (Wiedererkennen und Unterscheiden der Buchstabenformen in unterschiedlichen Raumlagen), im Sachunterricht (vgl. Raumbezogene Perspektive, GDSU 2013) oder im Kunst-, Werk- und Sportunterricht – der Erwerb von Raumvorstellung kann als fächerübergreifendes Lernziel für die Grundschule angesehen werden. So werden seit Langem auch Zusammenhänge zwischen räumlichen und mathematischen Fähigkeiten diskutiert (vgl. Franke, Reinhold, 2016, S. 80–83 für eine ausführlichere Darstellung).

Die Fähigkeit zur Vorstellung von räumlichen Veränderungen ist innerhalb des Mathematikunterrichts besonders relevant für die Vorstellung von Rechenoperationen. So ergibt sich im Umgang mit arithmetischen Arbeitsmitteln häufig die Anforderung, enaktive oder ikonische Darstellungen auch zu verändern – etwa um eine Additionsaufgabe durch Hinzufügen von Plättchen zu veranschaulichen.

Mit der anzustrebenden und bedeutsamen sukzessiven Ablösung von den Arbeitsmitteln müssen die Kinder auch die Fähigkeit erlangen, sich solche Prozesse nur noch vorstellen zu können. Insofern liegt es durchaus nahe, kopfgeometrische Übungen im Zusammenhang mit arithmetischen Inhalten zu betrachten und gedankliche Veränderungen an arithmetischen Arbeitsmitteln vorzunehmen, sofern diese Arbeitsmittel geometrische Eigenschaften, d. h. räumliche Strukturen aufweisen (Abb. 4).

Eine solche Aktivität, die kopfgeometrische Übung mit einem arithmetischen Inhalt verbindet, ergibt sich beispielsweise, wenn Kinder sich die Verdopplung einer Anzahl von Plätt-

Abb. 4:
Wie sieht das Bild aus, wenn man direkt von vorn auf das Haus schaut?



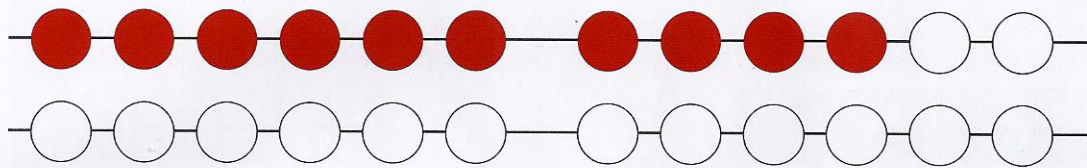


Abb. 5:

chen (< 10) in einem Zwanzigerfeld im Sinne einer Spiegelung an der Längsachse des Zwanzigerfeldes vorstellen sollen. Aber auch Veränderungen anderer Art (additiv oder subtraktiv) lassen sich mit solchen Vorstellungsübungen zunehmend verinnerlichen (vgl. Abb. 5). Vielfach wird vor diesem Hintergrund die Forderung erhoben, die Geometrie nicht als bloßes Anhängsel der Arithmetik zu betrachten und gezielt Möglichkeiten zum Verbinden geometrischer und arithmetischer Aktivitäten zu suchen.

Strategien für Aufgaben zur Raumvorstellung

In der einschlägigen Literatur wird vielfach darauf verwiesen, dass Aufgaben zur Raumvorstellung keineswegs immer mit der Strategie bearbeitet werden, die man erwarten würde. Geht es beispielsweise darum, sich verschiedene Ansichten eines (Würfel-)Bauwerks mit unterschiedlichen Erhebungen, „Türmchen“ usw. vorzustellen, würde man wohl vor allem erwarten, dass die Vorstellungsleistung v. a. über eine gedankliche Perspektivübernahme erfolgt. Die beim Individuum ablaufenden kognitiven Prozesse könnten aber ebenso auch dadurch geprägt sein, dass ein Kind sich vorstellt, das (Würfel-)Bauwerk vor dem inneren Auge als Gesamtes zu drehen (während die eigene Perspektive unverändert bleibt). Vielleicht geht ein anderes Kind auch analytisch vor, zerlegt das vorgegebene Bauwerk mental und fokussiert in besonderer Weise nur auf hervorstechende Merkmale eines Bauwerks, die es dann in Bezug zu verschiedenen Perspektiven setzt.

Beide Strategien können zu richtigen Lösungen einer Raumvorstellungsaufgabe führen – oder aber im Gegenteil fehlerbehaftet sein, weil beispielsweise beim analytischen Vorgehen nicht alle markanten Elemente richtig in ihren Beziehungen zueinander visualisiert werden und die Kinder eher additiv und sequenziell statt integrativ und simultan vorgehen. Festzuhalten ist aber, dass solche individuell unterschiedlichen Strategien zu den verschiedensten Raumvorstellungsaufgaben beobachtet werden und sowohl für Raumvorstellungsaufgaben aus der ebenen als auch aus der räumlichen Geometrie dokumentiert sind (vgl. Franke, Reinhold, 2016, S. 72–80 für eine Übersicht). Die Effektivität dieser Strategien variiert oft stark von Kind zu Kind oder in Abhängigkeit von Aufgabenmerkmalen (z. B. Komplexität oder Darstellungsweise).

Somit begegnet uns auch im Geometrieunterricht eine Fülle unterschiedlicher Bearbeitungsstrategien und individueller geometrischer Denkweisen von Kindern. Im Unterrichtsgespräch können diese Strategien zum Gegenstand der Kommunikation bzw. Reflexion einer kopfgeometrischen Aufgabe gemacht werden. Je jünger die Kinder sind, desto schwerer fällt es ihnen allerdings, über intern ablaufende Vorstellungsprozesse zu reflektieren und sprachlich zu fassen, welcher Art die (nicht-sprachliche) Aufgabenbearbeitung in Phase II war. Die darin liegende besondere Herausforderung stellt gleichzeitig aber auch wieder ein besonderes Potenzial in der Begegnung mit kopfgeometrischen Übungen dar. Sprache spielt

„Stell dir vor, hier kommen 6 rote Plättchen dazu. Wohin könnte man sie legen? Kannst du dir verschiedene Bilder dieser Situation vorstellen? Wie sieht das dann aus? Kannst du die roten Plättchen in Gedanken so legen, dass in deinem Kopf ein Bild entsteht, mit dem du schnell zum Ergebnis kommst?“

hier auch insofern eine bedeutsame Rolle als dass räumlich-visuelle Strategien mitunter auch durch sprachliche Analysen bzw. durch (vorausgegangenes) logisch-schlussfolgerndes Denken unterstützt werden können. Unterstützend für die Versprachlichung von Strategien wirken zudem oft (bewusst) eingesetzte Gesten oder Kopfbewegungen, mit denen sich oft die Veränderung einer Raumlage leichter vorstellen lässt.

Literatur

- Breidenbach, W.: Raumlehre in der Volksschule. Schroedel Verlag, Hannover 1964.
- Eichler, K.-P.: Kopfgeometrie: Aufgaben zur Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens. Mathematik 5–10, Heft 39 (2017), S. 42–45.
- Franke, M., Reinhold, S.: Didaktik der Geometrie in der Grundschule. Springer Verlag, Wiesbaden 2016.
- Gesellschaft für Didaktik des Sachunterrichts: Perspektivrahmen Sachunterricht. Klinkhardt Verlag 2013.
- Kerst, B.: Kopfgeometrie. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht aller Schulgattungen, Heft 51 (1920), S. 217–228.
- Senftleben, H.-G.: Kopfgeometrie im Mathematikunterricht der Grundschule. In: Müller, K.-P. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht (S. 440–443). Franzbecker Verlag, Hildesheim 1995.
- Senftleben, H.-G.: Erkundungen zur Kopfgeometrie. Journal für Mathematik-Didaktik 17 (1996), S. 49–72.
- Thurstone, L. L.: Some primary abilities in visual thinking. Psychometric Laboratory Research Report 59. The University of Chicago Press, Chicago 1950.