Geeignete Aufgaben für den Geometrieunterricht

Raumvorstellung als Ziel

Materialien im Heft und auf CD-ROM
M 1, M 3, M 4
zusätzlich auf CD-ROM
M 2, M 5 bis M 11

Heinrich Besuden **Die Förderung der Raumvorstellung in der Schule wird zu Recht immer wieder gefordert. Vor allem an den Geometrieunterricht werden dabei hohe Erwartungen gestellt. Aber was für Aufgaben sind dafür besonders geeignet? Das soll hier durch viele Beispiele beantwortet werden; Beispielaufgaben, die sich auf den dreidimensionalen Raum beziehen und doch wenig Aufwand für die Lehrerin und kaum Kosten und Material erfordern.**

Vorbemerkungen und Hintergrund

Die Bedeutung räumlichen Vorstellungsvermögens

In allen Richtlinien der Länder der Bundesrepublik wird durchgängig die Förderung der Raumvorstellung als allgemeines Lernziel des Geometrieunterrichts angesprochen. In der Tat ist diese Qualifikation schon während der Schulzeit wichtig: Im Sachunterricht, in Kunst und Werken, beim Lesen und im Rechnen wird sie benötigt. Rechenschwäche soll nicht selten auf mangelndes Vorstellungsvermögen zurückzuführen sein. Das kann nicht überraschen, wenn Denken als verinnerlichtes Tun aufzufassen ist; und der Prozess der Verinnerlichung erfolgt natürlich über Vorstellungen.

Erst recht wird in fast allen Berufen vom Erwachsenen Raumvorstellung verlangt; nicht nur vom Architekten und Ingenieur. Der Zahnarzt, der Chirurg, ja, jeder Handwerker, jeder Verkehrsteilnehmer braucht diese Fähigkeit. Dabei sind die weiblichen Personen natürlich mitgemeint. Das wirft aber zugleich zwei Fragen auf, zunächst:

Sind Mädchen und Frauen auf dem Gebiet weniger talentiert?

Angestoßen durch das diesbezügliche verbreitete Vorurteil (»Warum Frauen nicht rückwärts einparken können und Männer nicht zuhören«) habe ich in den 90er Jahren mit 230 Studierenden an der Universität Oldenburg einen Test durchgeführt. Es ging um eine Geometrieveranstaltung mit ausgiebigen Übungen an Modellen, die geeignet waren, Raumvorstellung nicht nur einzusetzen, sondern auch zu erwerben oder zu verbessern. Kurz das Ergebnis: Im Prätest waren die Studenten etwas schwächer als die weiblichen Teilnehmer, aber der Zuwachs in der Qualifikation war stärker als bei den Studentinnen, sodass im Posttest mit durchschnittlich 8,98 bzw. 8,90 Punkten (von max. 12) beide Gruppen gleich stark waren. Erst recht haben alle Teilnehmer und Teilnehmerinnen deutlich mehr gewonnen als eine Vergleichsgruppe, die in die Veranstaltung nicht einbezogen war.

Das Ergebnis ist vielleicht nicht verallgemeinerungsfähig, aber zu der zweiten Frage ist damit sicher ein Beitrag geleistet:

Ist Raumvorstellung angeboren?

Eine gewisse und unterschiedliche Veranlagung dafür gibt es gewiss, wie auch für andere Fähigkeiten. Aber die Behauptung. »Ich kann das nicht, weil es mir nicht gegeben ist«, kann nicht heißen, dass Raumvorstellung nicht geschult werden kann, und zwar unabhängig vom Geschlecht. Raumvorstellung gehört nach Aussage der Psychologen zu den elementaren Faktoren menschlicher Intelligenz, so wie sprachliches Ausdrucksvermögen oder Rechenfähigkeit. Und da zweifelt niemand an der Möglichkeit einer Förderung. Warum also das Vorurteil, Raumvorstellung sei nicht verbesserungsfähig? Dann dürfte ja die Schulung der Raumvorstellung gar nicht als Lernziel in die Richtlinien aufgenommen werden. Was man dort nur häufig vermisst, sind konkrete Beispiele für den Unterricht. Und darum soll es mir jetzt im Folgenden gehen. Dazu müssen wir aber noch eben genauer wissen, was unter Raumvorstellung zu verstehen ist.

Was ist das: »Raumvorstellung«?

Wer als Unterrichtender um die Förderung der Raumvorstellung bei Kindern bemüht ist, sollte meines Erachtens unterscheiden zwischen »räumlichem Sehen«, »räumlicher Orientierung«, »räumlicher Vorstellung« und »räumlichem Denken«. Unter »räumlichem Sehen« verstehe ich die Fähigkeit, eine Zeichnung, ein Bild, eine Abbildung oder grafische Anleitung räumlich zu verstehen und zu interpretieren. So wie Kinder nach dem Begleitzettel im Überraschungsei die Teile richtig zusammensetzen sollen, oder wie wir die Zeichnung zu einer Betriebsanleitung für ein technisches Gerät verstehen müssen.

»Räumliche Orientierung« ist die Fähigkeit, sich im Raum einzuordnen und zurechtzufinden. Beispiel: Wo habe ich vor dem Einkaufsbummel in der Stadt mein Auto abgestellt? Oder: Wie findet

Literatur

- M 1 und M 2: Heinrich Besuden: Knoten, Würfel, Ornamente. Klett, Stuttgart 1984, S. 15 ff.
- M 3: Ebd., S. 56 ff.
- M 4: Heinrich Besuden: Aufgaben zur Förderung der Raumanschauung, in: Mathematik in der Schule 10, 11, 12/1992
- M 5: Heinrich Besuden: Arbeitsmittel für den Geometrieunterricht in der Grundschule, in: Beiträge zum Mathematikunterricht, 1994
- M 6: Heinrich Besuden: Knoten, Würfel, Ornamente, S. 70 ff.
- M 7: Ebd., S. 109 ff.
- M 8: Heinrich Besuden: Arbeitsmittel zur Geometrie in der Grundschule. Wenner, Osnabrück, 1994
- M 9: Heinrich Besuden: Räumliche Orientierung; die Rechts/links-Beziehung, in: Mathematik in der Schule, 7, 8/1994
- M 10 und M 11: Heinrich Besuden: Knoten, Würfel, Ornamente, S. 119 ff.

Abb. 1

ein Kind den kürzesten Weg vom Klassenzimmer zur Aula und ist in der Lage, diesen zu beschreiben?

»Räumliche Vorstellung« ist die Fähigkeit, einen Gegenstand noch deutlich vor sich zu sehen, nachdem er gar nicht mehr vorliegt. Das kann man üben oder abprüfen zum Beispiel mit der Frage nach der Anzahl der Kanten eines Würfels, die am besten beantwortet wird mit:
$4 + 4 + 4$, nämlich 4 auf dem Boden, 4 oben am »Deckel« und 4 als Verbindung von unten nach oben.

»Räumliches Denken« schließlich ist die Fähigkeit, mit den Gegenständen in der Vorstellung, also gedanklich, umzugehen, ihre Lage oder auch meine Position zu ihnen zu verändern. Dazu gehört auch, sich in die Lage eines Anderen zu versetzen, durchaus nicht nur bildlich. Also: Wie sieht dieses (Modell vom) Haus von der linken Seite her - oder von hinten - aus? Oder: Kann ich diese Abwicklung zu einem Würfel zusammenfalten, und welches Quadrat liegt dann oben?

Solche Aufgaben, die geeignet sind räumliches Denken zu fördern, sollen jetzt vorgestellt werden, Aufgaben, die ich selbst erstellt oder wenigstens erprobt und schon verbreitet habe.

Beispielaufgaben

Ich will auf die vielen Legespiele, Anregungen zu Spiegelungen von Figuren, Anordnungen von Plättchen auf dem Tisch, das Aufspannen von Formen auf einem Brett, das Computerspiel TETRIS oder andere Übungen zum Legen von Plättchen in der Ebene verzichten. Die haben sehr wohl ihren Wert, indem optische Wahrnehmung und vorausschauendes Sehen geübt wird. Das spielt sich aber nicht eigentlich im dreidimensionalen Raum ab[1].

Verknotet (+) oder nicht (-)?

Dabei handelt es sich um eine Aufgabe, bei der fast alle Komponenten der Raumvorstellung, die wir oben unterschieden haben, angesprochen sind (vgl. M 1): Zunächst müssen die Kinder die Abbildungen räumlich deuten können. Das ist aber an den Zeichnungen leicht; leichter jedenfalls als an Fotos, weil unten/oben an den Kreuzungsstellen deutlich zu erkennen ist. Dann sollen sie sich vorstellen, wie Überführungen aufgelöst werde können: O. l. kann man die nach links führende Bucht nach oben freischieben. Rechts daneben kann man die beiden Überführungen links unten durch Herunterziehen des Endes beseitigen und die entstehende einfache Schlinge aufdrehen. L. u. kann man genauso die Schlaufe, die nach rechts führt, herunterziehen und damit zwei Überführungen beseitigen. Die anderen drei Schnüre bleiben verknotet, nämlich l. m., r. m. und r. u. Wer erst lernen muss, das zu sehen, erhält von der Lehrerin eine 50 cm lange Kordel.

Kleeblattschlingen und Brezelknoten

Diese Aufgabe (vgl. M 2 auf) ist eine Steigerung gegenüber M 1. Dass man die Kleeblattschlinge l. o. ebenso wie den Brezelknoten r. u. auflösen kann, ist durch vorgestellte Operationen, wie vorher beschrieben und angewendet, noch leicht zu erkennen. Dass sich die anderen beiden Figuren aber auch ineinander überführen lassen, ist ohne Experiment kaum vorstellbar. Dazu muss die Lehrerin eine geschlossene und einmal verknotete Kordel bereithalten. Eine offene Kordel von M 1 muss dazu geschlossen werden. Man hält die beiden Enden über eine Kerzenflamme und schmilzt sie zusammen.
Die beiden Figuren l. o. und r. u. sowie die anderen beiden, heißen, da sie sich ineinander überführen lassen, »isotop«.

Streichholzschachtel kippen

Kaum eine andere Aufgabe ist so gut geeignet, räumliches Denken zu fördern, wie die auf M 3. An Material ist nur eine Streichholzschachtel erforderlich, die die Kinder mitbringen. Um den Kippvorgang deutlich zu machen, kann die Lehrerin dies mit einem größeren Quader an der Tafel demonstrieren: Kippen ist also ein Drehen der Schachtel um eine der am Boden (an der Tafelfläche) liegenden Kante. Dann können die Kinder in den vier Fällen unter einem ihre Streichholzschachtel auf die Ausgangslage legen und das Kippen aktiv ausführen. Ziel ist natürlich, dies auch in der bloßen Vorstellung zu leisten, immer an die Oberseite und Unterseite der Schachtel denkend. Man sieht in der Endlage bei l. o.: U, bei r. o.: U, bei m.: O, bei u. : O.
In den fünf Fällen unter 2: U, U, O, O, U.
Es sollten sich Übungen in der »Kopfgeometrie« anschließen: Alle Kinder haben ihre Schachtel vor sich ausgerichtet liegen, dürfen sie aber nicht bewegen. Die Lehrerin diktiert: «Nach hinten, rechts, hinten, links, links. Was seht ihr?« Also: h, r, h, l, l. Antwort: O. Oder: l, v, l, v, r, l. Antwort: U.

Würfel abrollen

Die Aufgaben auf M 4 entsprechen denen mit der Streichholzschachtel. Auch hier sollen die Kinder lernen, sich den Vorgang schließlich vorzustellen. Allerdings müssen sie nicht nur an Ober- und Unterseite denken, sondern alle sechs Seiten mit den Zahlbildern (»Augen«) im Blick behalten. Jedes Kind braucht wieder nur einen Spielwürfel in der auf die Vorlagen passenden Größe. Aber Vorsicht! Wenn auch die Grundregel immer die gleiche ist (gegenüberliegende Augensumme gleich 7), so gibt es doch im Handel zwei Typen. Also auf die Lage der Augen zueinander wie hier vorgezeichnet achten!

Würfel falten

Bei M 5 (auf) handelt es sich um sehr klassische Aufgaben, die geeignet sind, mögliche Handlungen in reine Denkoperationen zu überführen. An ausgeschnittenen Abwicklungen sollte also beim Falten der Vorgang verfolgt werden. Die Aufgaben können leicht variiert werden, entweder durch andere Würfelabwicklungen oder indem hier andere Quadrate mit u ausgezeichnet werden.

Würfel drehen oder kippen

Vom vorigen Thema her sollte noch ein Würfelmodell vorhanden sein, das jetzt (vgl. M 6 auf) nach der vorgegebenen Zeichnung eingefärbt werden kann. Für einige Kinder ist das vielleicht auch nicht erforderlich. Ziel ist ja hier wieder das Drehen und Kippen in der Vorstellung.
Schneiden und falten

1: Ohne Experiment sehen die Kinder, dass die Quadrate (vgl. M 7 auf) ganz links und ganz rechts nicht passen können, weil bei ihnen die untere Hälfte der 1 an eine Kante stößt, ohne an die obere Hälfte anzuschließen. Ob aber der Austausch zur Abwicklung führt, die passend aufgeklebt werden kann, ist zu überprüfen (... und es geht!).
2: Auch hier sieht man sofort, dass die Einschnitte 1 und 3 (von links) nicht richtig sein können, weil sie die Postkarte in zwei Teile zerlegen. 2 ist richtig, und eine Postkarte, entsprechend eingeschnitten, sollte das zeigen.
Eine gute Übung in der Vorstellung ist auch, wenn die Lehrerin eine entsprechend eingeschnittene Postkarte bereits zum »Denkmal« gefaltet hat mit der Frage, ob man das in die Ebene zu einem Rechteck legen kann. Das geschieht in der Vorstellung so: Das nach vorn weisende Rechteck festhalten und die beiden größeren Teile gegensinnig nach hinten drehen.

Zwillinge

Die Zwillinge (vgl. M 8 auf) sind räumliche Spiegelbilder voneinander, wie linker und rechter Handschuh. Das Ziel ist auch hier wieder, beide in der Vorstellung zusammenzustellen, d. h., L und R gedanklich in die richtige Position zu transportieren. Das erste Gebilde l. o. ist tatsächlich aus zwei L zu denken, kann also gar nicht mit den Modellen realisiert werden.
Die Lösungen: l. o.: L + L, r. o.: R + L, l. u.: R + L, r. u.: R + L (immer von links her aufgezählt).

Rechts und links

Der Bearbeitung des Blattes M 9 auf sollte im Unterricht die Einübung der Begriffe an vor der Klasse aufgestellten Kindern vorausgehen;

Anmerkungen

1 z. B. Knapstein, Kordula u. a.: Spiegel-Tangram, Geometrische Formen spielerisch entdecken. Kallmeyer Verlag, Velber 2005
Wittig, Reinhold: Cubus, Räumliches Denken entwickeln und fördern. Kallmeyer Verlag, Velber 2005
Besuden, Heinrich: Geometrie mit Winkelplättchen, Legen, spielen, drehen, messen. Kallmeyer Verlag, Velber 2005
Götze, Uwe/Spiegel, Hartmut: Umspannwerk, Spielen auf dem Geobrett. Kallmeyer Verlag, Velber 2005

Abb. 2

und zwar mit diesen beiden Anforderungen:
a) Wie stehen die Kinder?
b) Stellt euch so auf, wie ich es sage.
Die Aufgaben dienen der Förderung räumlicher Orientierung (s. o.). Voraussetzung bei den Kindern ist die absolute Sicherheit von rechts und links an sich selbst: Dies ist mein rechter Arm, dies ist mein linkes Ohr usw.

Ansichten

Den Aufgaben auf M 10 und M 11 (auf) sollte wieder im Unterricht die Betrachtung an Modellen vorausgehen, die vor den Kindern aufgestellt werden: Eine Puppe, ein Stofftier oder ein kleines Fahrzeug, das von allen Seiten betrachtet werden darf. Das sollte dazu verhelfen, sich die betreffende Ansicht nur noch vorzustellen.
M 10: 1 Die Ansichten in der Folge: von vorn, von links, von hinten, von rechts.
M 10: 2 Diese Übung kann mehrfach variiert werden.
M 11 bietet weitere Möglichkeiten zu Ansichten zu arbeiten.
M 11: 1 Die Ansichten in der Folge: von links, von vorn, von rechts, von hinten.
Eine gute Übung wird veranlasst durch die Frage: Wie ändern sich die vier Ansichten, wenn ich den Quader nach vorn (oder die Pyramide nach hintern) verschiebe? Wie ändern sie sich, wenn ich den Quader nach links (oder die Pyramide nach rechts) verschiebe?
M 11: 2 Auch hier sollte die Aufstellung variiert werden. Zunächst, indem nur eine Schachtel verschoben wird.

Abschließene Bemerkung

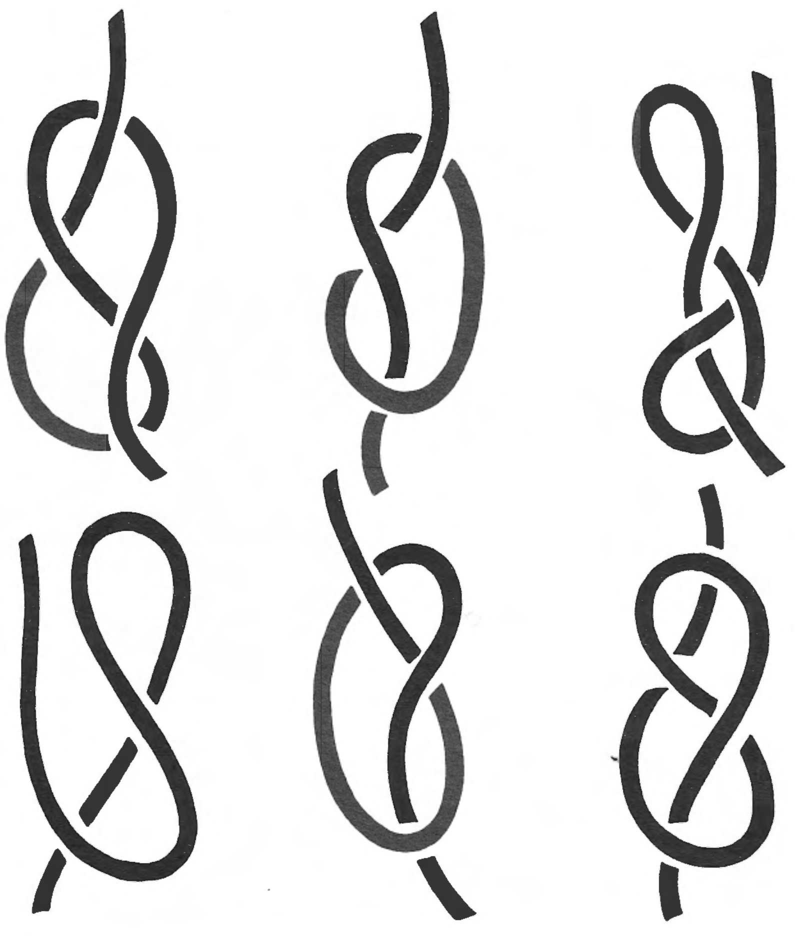
Aufgaben der vorstehenden Art finden sich gelegentlich auch in der Unterhaltungsliteratur oder in der »Rätselecke« von Zeitschriften. Dort sind sie als Test gedacht.
Hier aber geht es um den Lernprozess. Die Schülerinnen und Schüler sollen die Antworten aus ihrer Erfahrung mit entsprechendem Material gewinnen, auch wenn am Ende die Fähigkeit stehen sollte, die Probleme allein aus der Vorstellung zu lösen. ■

Autor
Prof. Dr. Heinrich Besuden
Elchweg 6
26129 Oldenburg

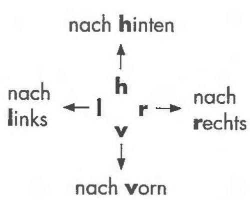
M 1

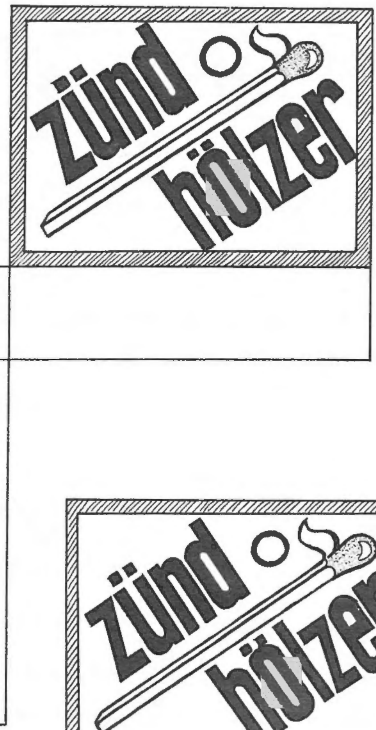
Verknotet (+) oder nicht verknotet (–)?

Bei welchen Schnüren würde sich ein Knoten ergeben wenn du die Enden anfasst und auseinander ziehst? Lege die Figuren mit einem Schnürband, einem Bindfaden oder einer Halskette nach, wenn du das nicht siehst.

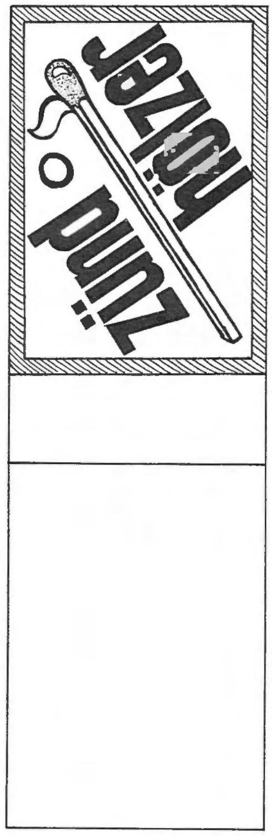


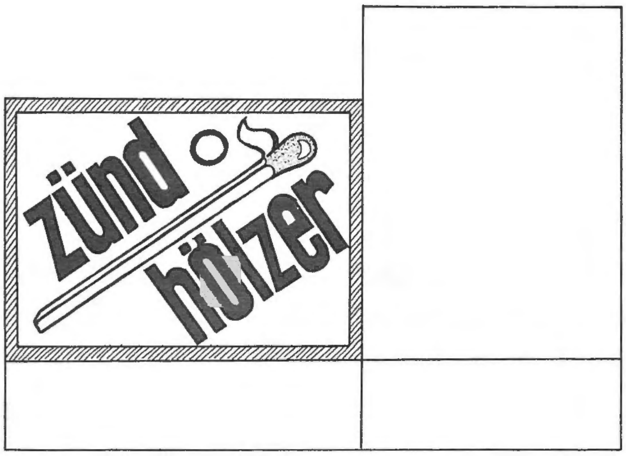
Streichholzschachteln kippen

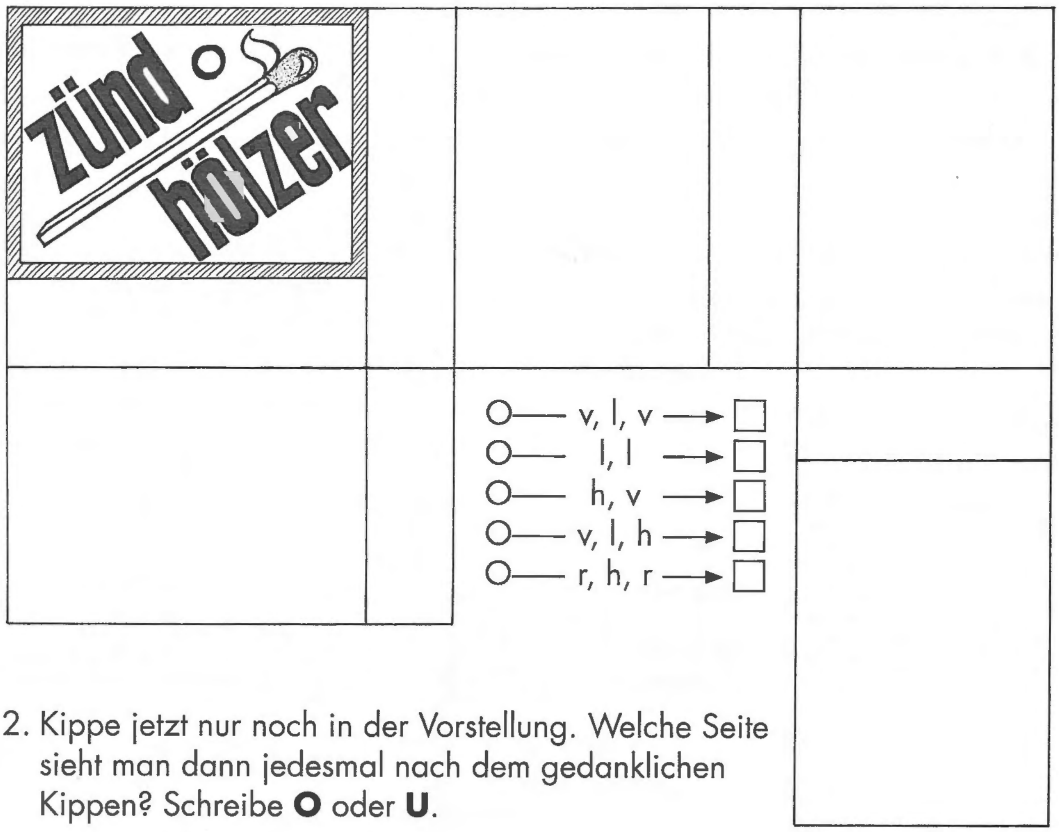




1. Male **O** (Oberseite) und **U** (Unterseite) auf eine Sreichholzschachtel. Welche Seite siehst du dann nach der Kippfolge?







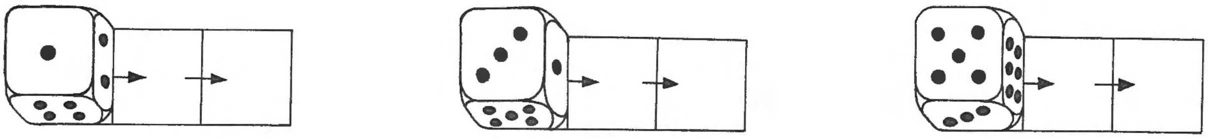
O— v, l, v → ☐
O— l, l → ☐
O— h, v → ☐
O— v, l, h → ☐
O— r, h, r → ☐

2. Kippe jetzt nur noch in der Vorstellung. Welche Seite sieht man dann jedesmal nach dem gedanklichen Kippen? Schreibe **O** oder **U**.

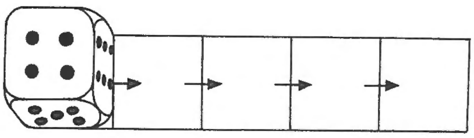
Würfel abrollen

1. Auf dem Spielwürfel ist die Summe gegenüberliegender Würfelzahlen immer 7. Welche Würfelzahlen liegt also der »6« gegenüber? Trage die »Augen« ein.

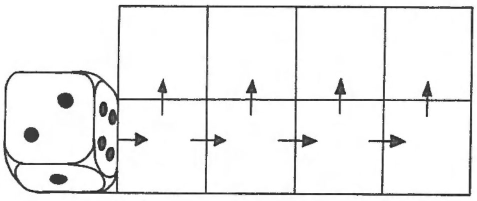
2. Stelle einen Spielwürfel wie abgebildet auf. Kippe ihn zweimal nach rechts. Welche Würfelzahl liegt oben nach dem ersten Kippen, welche nach dem zweiten Kippen?



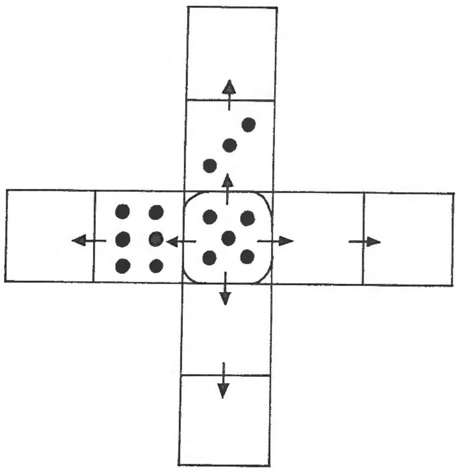
3. Der Würfel wird nach rechts abgerollt. Welche Würfelzahlen liegen der Reihe nach oben?



4. Welche Würfelzahl liegt oben, wenn jedesmal nach hinten gekippt wird?



5. Kannst du sagen, ohne einen Würfel wirklich zu kippen, welche Würfelzahlen in die leeren Felder gehören?



6. Welche Würfelzahlen gehören in die leeren Felder?