

Simone Reinhold

Alles nur im Kopf?

Kopfgeometrie zur Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens

Bei kopfgeometrischen Übungen geht es darum, Räumliches in der Vorstellung zu denken und gedanklich zu verändern. Konkrete Aktivitäten können dabei Ausgangspunkt und Ziel verschiedenster Vorstellungsübungen sein, die sich nur im Kopf abspielen. Aber welche Bandbreite von Übungen berücksichtigt diese „Geometrie im Kopf“? Wie lassen sich solche Übungen in den Unterricht integrieren?

BEISPIELE FÜR KOPFGEOMETRISCHE AUFGABEN

Beispiel 1:

Denk dir ein Stück Papier. Falte das Papier genau in der Mitte, indem du eine Seite des Papiers genau auf die andere legst. Stell dir nun vor, dass du entlang der Faltkante Dreiecke ab- oder ausschneidest.

Welche Formen könnten entstehen?

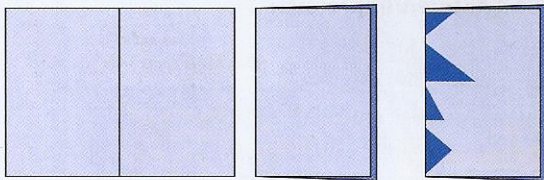


Abb. 1: Gedankliches Falten und Schneiden: „Verdoppelte Dreiecke“

Beispiel 2:

Wie viele Würfel müsstest du zu diesem Würfelbauwerk ergänzen, damit ein Quader entsteht?

Wie viele weitere Würfel müssten hinzugefügt werden, um einen anderen Quader daraus zu erstellen? Beschreibe, wie sich dieser (neue) Quader vom ersten unterscheidet.

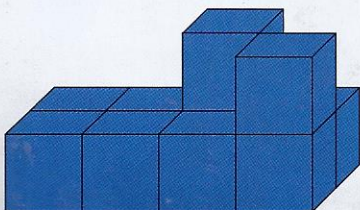


Abb. 2: Würfelbauwerke gedanklich zu Quadern ergänzen

Der Geometrieunterricht in der Grundschule ist geprägt von handlungsorientierten Aktivitäten, die den Kindern vielfältige Zugänge zu geometrischen Inhalten eröffnen sollen. Dabei besteht allerdings die Gefahr, dass die oftmals kreativ eingeleiteten und mit aufwändigem Materialeinsatz ausgestalteten Unterrichtsszenarien ausschließlich auf der konkret handelnden Ebene verbleiben. Die Ausbildung von Raumvorstellung, die in den Bildungsstandards als wesentliche Kompetenz ausgewiesen wird, ist jedoch aufs Engste mit einer Reflexion dieser Aktivitäten verbunden: Räumlich-visuelle Vorstellungen basieren auf zuvor praktisch Erprobtem bzw. visuell Wahrgenommenem. Gleichzeitig muss zu gegebener Zeit bewusst auch ein Loslösen vom Handeln erfolgen, das den Kindern Gelegenheit gibt, geometrische Phänomene, räumliche Zusammenhänge oder Veränderungen ausschließlich in der Vorstellung zu vollziehen. Hier setzt das methodische Prinzip der Kopfgeometrie an, wobei die Aktivitäten zur „Geometrie im Kopf“ durchaus mit Material initiiert oder flankiert sein dürfen. Entscheidend ist jedoch, dass die eigentliche kognitive Anforderung

„mit Köpfchen“ gelöst wird. Das heißt, der Lösungsprozess zur Bearbeitung einer geometrischen Aufgabe verbleibt in der Kopfgeometrie ausschließlich auf der mentalen Ebene.

Die erprobten Praxisideen dieses Heftes zeigen vielfältige Angebote der ebenen und räumlichen Geometrie, in denen besonderer Wert auf die Einbindung solcher kopfgeometrischer Übungen in den Unterricht gelegt wird. Zudem arbeiten die jeweiligen Artikel heraus, inwiefern besondere Vorstellungsleistungen von den Kindern erwartet und gefördert werden.

Bandbreite kopfgeometrischer Übungen

In der aktuellen Diskussion um die Kopfgeometrie wird häufig angeregt, von manuellen Handlungen oder Skizzen auszugehen, um den Kindern auch nonverbale Zugänge zum Ausbilden ihrer Vorstellungen zu eröffnen. Dies kann insbesondere in Lerngruppen mit heterogenen sprachlichen Kenntnissen von großer Bedeutung sein und zusätzlichen Differenzierungsspielraum geben.

Phase I (Aufgabenstellung)	Phase II (Aufgabenbearbeitung)	Phase III (Ergebnisdarstellung)
Lehrkraft verbalisiert geometrische Fragestellungen	Mentales Operieren, Vorstellen im Kopf	Schüler verbalisiert das Ergebnis seiner Überlegungen
Lehrkraft erläutert ihre Fragestellung unter Zuhilfenahme ihres eigenen Körpers (z. B. mit den Händen), zeigt ein Bild, eine Zeichnung oder ein konkretes Modell usw.		Schüler erläutert das Ergebnis seiner Überlegungen unter Zuhilfenahme seines eigenen Körpers, zeichnet, baut, schneidet, bastelt oder gestaltet dazu usw.

Die Beispielaufgaben in **Abb. 1** und **Abb. 2** geben erste Einblicke in kopfgeometrische Aktivitäten der ebenen und der räumlichen Geometrie.

Entscheidend ist bei diesen und anderen kopfgeometrischen Aufgaben nicht, dass die Kinder die jeweiligen Aktivitäten auch zeitgleich durchführen können – es ist also unerheblich, ob tatsächlich konkrete Scheren für alle Kinder zur Verfügung stehen, um einen Schnitt am gefalteten Papier tatsächlich durchzuführen oder ausreichend Würfel vorhanden wären, um ein Bauwerk in vorgeschlagener Weise ergänzen zu können. Vielmehr geht es darum, sich diese Aktivitäten und die sich daraus ergebenden Konsequenzen vorzustellen. Hierin lässt sich ein großer Vorteil kopfgeometrischer Übungen erkennen, die eben ohne großen Materialaufwand auskommen und damit prinzipiell jederzeit leicht in den Unterricht zu integrieren sind.

Phasen der Kopfgeometrie

Um verschiedene Aufgabentypen der Kopfgeometrie besser unterscheiden zu können, eignet sich eine von Senftleben (1996) vorgeschlagene Einteilung in drei Phasen: Unterschieden wird hier zwischen einer Phase I (Formulierung der Aufgabenstellung) und einer Phase III (Ergebnisdarstellung durch das Kind). In der dazwischenliegenden Phase II (Aufgabenbearbeitung) liegt die zentrale geometrische Aktivität, in der sich das gedankliche Operieren im Kopf vollzieht. Eichler (2017) schlägt ergänzend vor, auch eine Phase IV zur Ergebnissicherung einzuplanen.

Verschiedene Variationen zur Ausgestaltung der Phase I können darin

bestehen, dass die Lehrkraft ihre Fragestellung unter Zuhilfenahme ihres eigenen Körpers erläutert und beispielsweise eine Form oder die Veränderung der Raumlage eines Objektes mit den Händen andeutet.

Im klassischen Verständnis der Kopfgeometrie könnte die Lehrkraft sich aber auch sehr bewusst für das Verbleiben auf der verbalen Ebene entscheiden: „Schließe deine Augen und stell dir mal vor ...“

In vergleichbarer Weise sind auch in der Phase III verschiedene Varianten für die Artikulation der Ergebnisse der kopfgeometrischen Überlegungen durch die Lernenden denkbar. Oft ist es naheliegend, die Kinder ihre Überlegungen unter Zuhilfenahme ihres eigenen Körpers erläutern zu lassen, indem sie beispielsweise Gesten nutzen. Weitere Gelegenheit zur nonverbalen Artikulation der Ergebnisse ihrer kopfgeometrischen Übungen ergeben sich, wenn sie etwas zeichnen, bauen oder auf andere Weise darstellen können.

Werden die Kinder gebeten, ihre Ergebnisse verbal zu artikulieren, fordert und fördert dies in besonderer Weise auch die Weiterentwicklung ihrer geometrischen Sprache.

Aufgabentypen der Kopfgeometrie

Aus der Kombination dieser Varianten zur Aufgabenstellung bzw. zur Ergebnisdarstellung (vgl. **Abb. 3**) ergeben sich vier verschiedene Aufgabentypen der Kopfgeometrie, die die Lehrkraft in ihr methodisches Repertoire aufnehmen sollte:

Sofern keinerlei Hilfsmittel in den Phasen I und III genutzt werden und sowohl die Aufgabenstellung als

auch die Formulierung des Ergebnisses ausschließlich verbal erfolgen, kann man von reiner Kopfgeometrie im klassischen Verständnis sprechen (vgl. auch „Grundsätzliches“, S. 32).

Kopfgeometrie mit Hilfsmitteln in Phase I nutzt Gesten, Bilder oder Modelle zur Erläuterung der Aufgabe, die den Ausgangspunkt für die mentalen Operationen in der sich anschließenden Phase II bildet. Die Darstellung der Ergebnisse durch die Kinder verbleibt schließlich auf der verbalen Ebene.

Kopfgeometrie mit Hilfsmitteln in Phase III ist dadurch gekennzeichnet, dass die Lehrkraft die Aufgabenstellung lediglich verbal äußert. Im Anschluss an die wiederum mental zu bearbeitende Aufgabenstellung in Phase II wird den Kindern ermöglicht, die Ergebnisse ihrer kopfgeometrischen Übungen mit dem eigenen Körper, mit Zeichnungen oder anderen Medien auszudrücken.

Kopfgeometrie mit Hilfsmitteln in den Phasen I und III nutzt sowohl in der Phase der Aufgabenstellung als auch in der Phase der Dokumentation der gedanklich erzielten Ergebnisse Formen nonverbaler Unterstützung (vgl. Franke, Reinhold, 2016).

Vor diesem Hintergrund können kopfgeometrische Übungen ganze Geometriestunden prägen und im Mittelpunkt umfänglicher Lernumgebungen stehen, wie auch die Praxisanregungen dieses Heftes zeigen.

Literatur

- Eichler, K.-P.: Kopfgeometrie: Aufgaben zur Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens. Mathematik 5 – 10, Heft 39 (2017), S. 42 – 45.
- Franke, M., Reinhold, S.: Didaktik der Geometrie in der Grundschule. Springer Verlag. Wiesbaden 2016.
- Senftleben, H.-G.: Erkundungen zur Kopfgeometrie. Journal für Mathematik-Didaktik 17 (1996), S. 49 – 72.

Abb. 3: Phasen der Kopfgeometrie und ihre Ausgestaltung (in Anlehnung an Senftleben, 1996)