

Karin Anders

Kippen und addieren

Geometrische und arithmetische Vorstellungen verbinden

Der Spielwürfel ist ein fester Bestandteil des Arithmetikunterrichts. Ob als Zufalls-generator z. B. für Rechenaufgaben oder zur Unterstützung der strukturierten Mengenerfassung der Zahlen bis sechs, er verbindet die Geometrie mit der Arithmetik besonders anschaulich. Deshalb lohnt es sich schon in Klasse 1 den Spielwürfel unter geometrischen und arithmetischen Aspekten zu betrachten.

Ein Würfel wird auf einer geraden oder geknickten Bahn gekippt. Die Zahl, die nach jedem Kippen oben liegt, wird dabei notiert. Die Zahlenfolgen, die sich dabei ergeben, werden in dieser Unterrichtsreihe von Erstklässlern untersucht.

Theoretisch sind für dieses Format folgende Forscherfragen denkbar:

- Welche und wie viele Zahlenfolgen entstehen bei der gleichen Startzahl?
- Welche Eigenschaften weisen diese Zahlenfolgen auf?

- Wie groß ist die Summe aller Zahlen, die auf einem Weg oben liegen, mindestens oder höchstens?
- Wie lässt sich die Summe leicht berechnen?

Für Erstklässler reicht es aber aus, wenn sie Zahlenmuster erkennen, darstellen, nutzen und geschickt rechnen.

Angestrebt wird auch ein flexibles Kippen der Würfel im Kopf. Dazu können die Kinder durch vorausschauende Fragen angeregt werden, wie z. B.:

- Welche Zahl liegt voraussichtlich bei einer bestimmten Startzahl auf dem Zielfeld oben?

Lernfortschritte werden besonders im Bereich des flexiblen Rechnens und im Erkennen und Formulieren von Zahlenmustern angestrebt.

WÜRFELBAHNEN

Gerade Bahnen

Das gerade Fünferfeld erlaubt, von einer bestimmten Startzahl aus, vier Kippungen, bis wieder dieselbe Zahl oben liegt. Die Gesamtsumme der Feldzahlen einer Bahn einschließlich der Zielzahl beträgt für die Fünferbahn immer das Zweifache von 7 plus Startzahl, sodass als maximale Summe die 20 und als minimale Summe die 15 erreicht werden kann.

Durch systematisches Ordnen nach der Startzahl ergeben sich 6 mal 4, also insgesamt 24 unterschiedliche Bahnen, z. B.:



Geknickte Bahnen

Die Zahlenfolgen auf dem geknickten Siebenerfeld unterliegen komplexeren Strukturen: Es sind pro Startzahl vier unterschiedliche Wege möglich. Die Zielzahl entspricht der Startzahl, die Mittelzahl entspricht der Differenz von 7 und der Startzahl. Die beiden hinteren Randzahlen ergeben zusammen 7. Die vorderen Innenzahlen sind gleich. Die Summen der Feldzahlen einschließlich der Startzahl reicht von 18 bis 31.

Die algebraische Formel zur Berechnung der Summe (das Doppelte von 7 plus das Doppelte einer Zahl, die weder Startzahl noch Mittelzahl ist, plus das Einfache der Startzahl) ist nicht Gegenstand des Unterrichts. Die möglichen Summen lassen sich auch nicht so leicht berechnen wie bei der Fünferbahn.



Anknüpfen und Sichern von Vorkenntnissen

Die Reihe „Würfel kippen“ findet in der zweiten Hälfte einer ersten Klasse statt. Sie setzt geometrische Kenntnisse über den Spielwürfel und motorische Sicherheit im Würfeln voraus. Arithmetische Voraussetzungen sind das Bilden von Plusaufgaben, Tauschaufgaben, Verdoppelungen

Der Spielwürfel – Mein Wortspeicher

Ein Würfel hat 8 Ecken.
Ein Würfel hat 6 Seiten (mit Punkten).

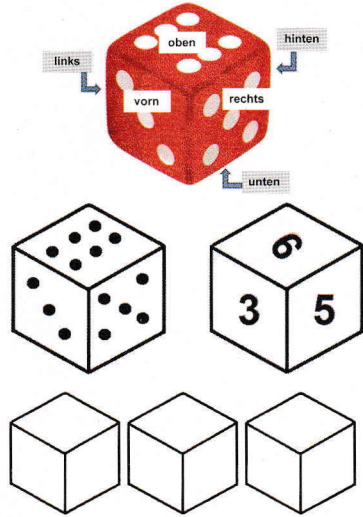


Abb. 1: Wortspeicher zum Spielwürfel

und die Kenntnis der Passeraufgaben zu 10, auch das Addieren über den ersten Zehner sollte unter Anwendung unterschiedlicher Strategien – schrittweise oder über Ableitungen aus verwandten Aufgaben – schon thematisiert sein. In dieser Klasse sind zum Zeitpunkt der Erprobung Plusaufgaben mit mehr als zwei Summanden neu. Gemeinsam wird ihnen der Name „Kettenaufgaben“ gegeben.

Die Eingangsabfrage über die Vorkenntnisse der Klasse ergibt, dass ein Drittel über keine Erfahrung mit dem Spielwürfel verfügt und einzelne Kinder die Punktbilder noch zählend erfassen. Über die Verteilung der Punktbilder auf den Würfelseiten machen vier Kinder richtige Aussagen, diese wissen auch, dass die Augensumme der gegenüberliegenden Seiten sieben beträgt.

Damit von einem einheitlichen Wissensstand ausgegangen werden kann, bespricht die Lehrkraft mit der Klasse die Würfeigenschaften „sechs Seiten“, „acht Ecken“ sowie die Raum-Lage-Beziehungen „gegenüber, oben, unten, rechts, links, vorne, hinten“. Auch wird die Struktur der Punktbilder an einem großen Schaumstoff-Würfel analysiert. Am Modell können alle Kinder die Augenzahlen und ihre

Zusammensetzung aus anderen Würfelbildern beschreiben: die 6 als zwei Dreier, die Fünf als Vier plus einem Punkt in der Mitte, die Drei als Zwei plus den Einer-Punkt in der Mitte, die Fünf als Drei und Zwei.

Weil es beim Würfeln immer um die Zahl geht, die oben liegt, wählt die Lehrkraft für den Wortspeicher eine isometrische Würfel-darstellung und kennzeichnet die passenden Positionen und Mathewörter. Die Kinder würfeln mehrere Male, lesen die oberen Zahlen ab und tragen sie als Punktbilder und als Ziffer in Blanko-Schrägbilder ein (Abb. 1, AB 2)

Einführung in das Aufgabenformat

Um auch die Kinder mit Lernschwierigkeiten sowie diejenigen mit geringen Deutschkenntnissen in der Handlungsplanung mit einzubeziehen, wird die Einführung in das Aufgabenformat konkret und kleinschrittig vorgenommen. Alle Kinder sitzen im Kinokreis, sodass alle die gleiche Perspektive auf den Plan haben. Das Probearbeiten wird permanent sprachlich begleitet, damit sich die Mathewörter (relevante und weniger bekannte Wörter und Begriffe) einschleifen:

„Der Würfel liegt auf dem Startfeld (St), die Zahl 1 oben und die Zahl 3 vorn, wie in der Vorlage. Ich kippe den Würfel nach rechts. Jetzt steht die Zahl 2 oben. Ich notiere die 2 in das Feld neben der 1.“ usw.

In mehreren Durchgängen wird in alle vier Richtungen gekippt. Die Zahlen, die oben liegen, können zur Differenzierung auch als Punktbild dargestellt werden.

Ungewollt passiert es leicht, dass die Kinder den Würfel beim Kippen drehen. Dann werden die Zahlenfolgen verfälscht. Zur Kontrolle sollten sie den Weg noch einmal gehen. Deshalb ist es wichtig, die genaue Startposition durch die Zahl oben und die

Zahl vorne anzugeben bzw. von den Kindern einzeichnen zu lassen.

Die Kinder erhalten nun einen eigenen Plan (AB 3) und einen Spielwürfel, kippen ihn wie vorgegeben in alle Richtungen und notieren selbstständig die oben liegenden Zahlen. Die Startpositionen der Würfel sind grün markiert und können frei gewählt werden.

Leon nutzt zur Unterstützung in dieser Phase einen vergrößerten Plan und einen größeren Holzwürfel.

In der Auswertungphase vergleichen die Kinder exemplarisch alle Möglichkeiten zur Startzahl 1 und entdecken, dass

- alle fünf Zahlen verschieden sind;
- immer die untere Würfelzahl fehlt,
- die Reihenfolge der Zahlen gleich bleibt,

KLASSENSTUFE

1 – 2

ZEITBEDARF

ca. 4 – 6 Unterrichtsstunden

KOMPETENZEN INHALTSBEZOGEN

- räumliche Beziehungen erkennen, beschreiben und nutzen
- Addierens von mehreren Summanden im Zahlenraum bis 20
- Gesetzmäßigkeiten in arithmetischen Mustern erkennen und beschreiben

KOMPETENZEN PROZESSBEZOGEN

- Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen
- eine Darstellung in eine andere übertragen
- Darstellungen miteinander vergleichen und bewerten

MATERIALPAKET



Material auf der CD-ROM

- 2 Arbeitsblätter „Wortspeicher“ und „Würfelbilder“
- 3 Arbeitsblatt „In alle Richtungen“
- 4 Vorlagen zur geraden und geknickten Bahn

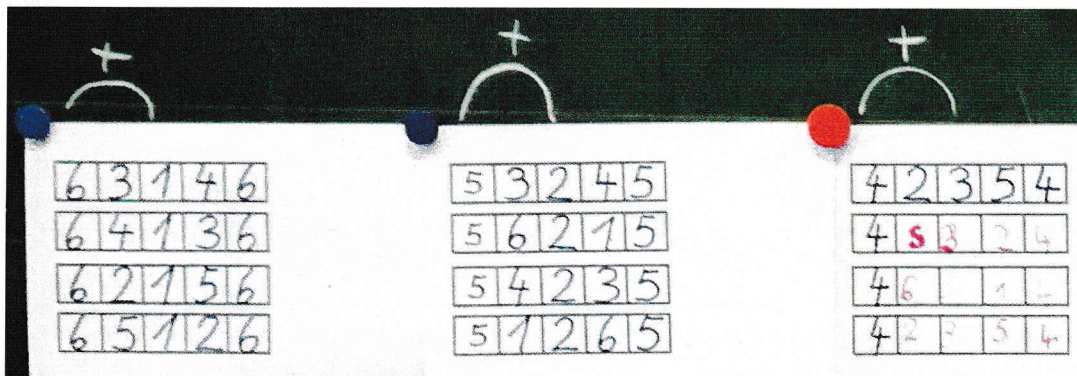


Abb. 2: Von den Kindern gefundene Zahlenfolgen

- immer die gleichen Zahlen gegenüberliegen.

Da die Kinder nicht aufgefordert sind, die Zahlen zu addieren, fällt an dieser Stelle nur Milan auf, dass die Summe der gegenüberliegenden Zahlen immer 7 ergibt.

Die Fünferbahn

Nun demonstriert die Lehrkraft eine fortgesetzte Kippung auf einer vergrößerten Fünferbahn und notiert die Zahlen, die oben liegen. Die

Abb. 4: Fridas Arbeitsblatt zur geraden Bahn

→ rechts Plusaufgabe

5	4	2	3	5	$5+4+2+3+5=19$
5	1	2	6	5	$5+1+2+6+5=19$
5	3	2	4	5	$5+3+2+4+5=19$
5	1	2	6	5	$5+1+2+6+5=19$
5	6	2	1	5	$5+6+2+1+5=19$
5	6	2	1	5	$5+6+2+1+5=19$
5	4	2	3	5	$5+4+2+3+5=19$
5	1	2	6	5	$5+1+2+6+5=19$

immer 19

5. Zahl in der Reihe bezeichnet sie mit Zielzahl. Das wiederholte Kippen in eine Richtung vereinfacht es, zu einer vorgegebenen Startzahl Vermutungen über die Zielzahl anzustellen. An einem Beispiel ermitteln die Kinder kopfgeometrisch die Zielzahl und überprüfen sie durch konkretes Kippen. Sie sind erstaunt, dass Start und Zielzahl übereinstimmen. Lisa findet eine Erklärung dafür: „Das ist, weil der Würfel einmal „rund um“ gekippt ist und deshalb nach vier Kippungen wieder in die Startposition zurückkehrt.“ In der Arbeitsphase notieren die Kinder nun eigene Beispiele zu einer frei gewählten Startzahl (AB 4a). Durch den Differenzierungsauftrag: „Finde zu einer Startzahl alle möglichen Wege!“ sortieren sie doppelte oder fehlerhafte Bahnen selbstständig aus. Einige Kinder übertragen ihre Ergebnisse auf Plakate und hängen sie geordnet nach der Startzahl an die Tafel (Abb. 2).

Die Zahlenmuster werden mit Hilfe von Pfeilen und Farbe markiert (Abb. 3).

Zum Stundenende werden die Entdeckungen zusammengetragen:

- Es gibt 6 Startzahlen, weil jede Würfelzahl Startzahl sein kann.
- In jedem Päckchen kommen alle Zahlen von 1 bis 6 vor.
- Die mittlere Zahl ist die Zahl gegenüber der Startzahl.
- Die zweite und die vierte Zahl liegen sich auf dem Würfel gegenüber.

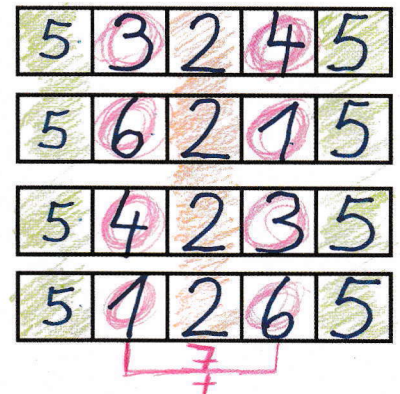


Abb. 3: Markieren der Zusammenhänge

- In der Mitte steht immer dieselbe Zahl.
- Die zweite und die vierte Zahl ergeben immer 7.

In der folgenden Stunde untersucht die Klasse die Summe der Zahlen, die oben liegen, indem jeweils die „Kettenaufgabe“ aus den fünf Summanden gebildet wird. Exemplarisch notiert die Lehrkraft zunächst zu einer Bahn die Plusaufgabe und erklärt, wie man mit dem Ergebnis immer „weiterrechnet“. Die Kinder erhalten ihre Arbeitsblätter der letzten Stunde zurück und ergänzen die Plusaufgaben. Es stehen ihnen zusätzliche Blankoblätter zur Verfügung, um neue Fünferbahnen mit Plusaufgaben zu erproben. In der Rechenphase nutzt Milan die Passeraufgabe $6 + 4$ und vertauscht die Summanden passend. Maja addiert zuerst die kleinen Zahlen und dann die größeren. Anna legt die Summanden mit Würfeln vor und orientiert sich beim Rechnen an den Punktebildern. Frida beginnt im Kopf mit den Randzahlen und verdoppelt sie. Sie füllt alle Felder aus, kennzeichnet die doppelten Aufgaben und stellt fest, dass bei gleicher Startzahl immer die gleiche Summe herauskommt (Abb. 4).

Milan wendet sich unterschiedlichen Startzahlen zu und trifft bis auf die 16 alle möglichen Summen. Seine Feststellung: „Bei Startzahl 1 kommt das kleinste Ergebnis und bei 6 das größte heraus.“ Eine Liste der Start-

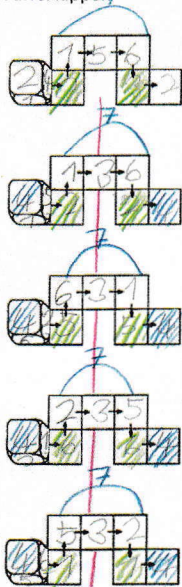


Abb. 5: Franz markiert mit Farben und Pfeilen

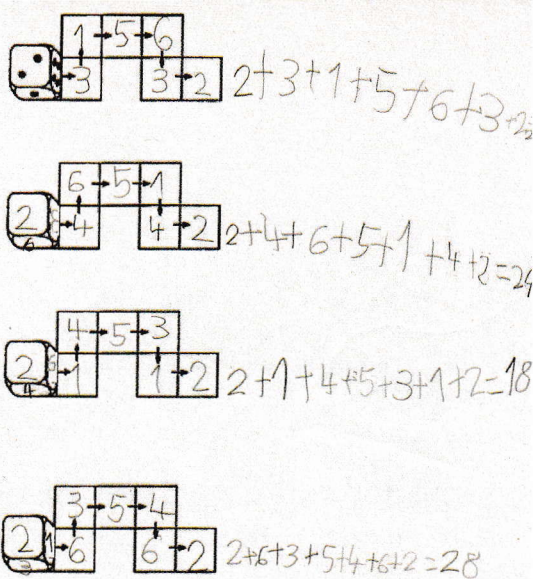


Abb. 6: Milans Arbeitsblatt

zahlen und der dazugehörigen Summen erleichtert das Entdecken. Eine arithmetische Begründung der Phänomene wird von den Erstklässlern nicht verlangt.

Die geknickte Bahn

In der folgenden Stunde wendet sich die Lehrkraft dem geknickten Wegeplan zu und demonstriert die Kippungen, die durch die Pfeile angezeigt sind. Außer nach rechts wird auch nach hinten und nach vorne gekippt. Das Einstiegsbeispiel zur Startzahl 2 wird schriftlich festgehalten. Die Schülerinnen und Schüler bekommen ein Arbeitsblatt (AB 4b) und Spielwürfel. Sie wählen eine Startzahl von 1 bis 6, notieren die Wege und markieren die Auffälligkeiten selbstständig. Malte und Franz verwenden dabei wieder Pfeile und Farben, wie in der letzten Stunde (Abb. 5).

Alle 24 Bahnen werden nach Startzahlen sortiert an die Tafel gehängt. Die Entdeckungen von Malte und Frida lassen sich auf alle Päckchen übertragen. Mündlich wird festgehalten:

- Die Startzahl und die Zielzahl sind gleich.
- Die zweite Zahl und vorletzte Zahl sind gleich.
- Die Mittelzahl kommt immer nur einmal vor und ist in jedem Päckchen gleich.
- Die oberen Randzahlen ergeben zusammen 7.

Zur Reduktion der möglichen 24 Plusaufgaben mit Summen von einschließlich 18 bis 31 wird in der nächsten Stunde die Startzahl 2 vorgegeben. Blankovorlagen stehen für andere Startzahlen zur Verfügung.

Erwartungsgemäß stellt die 20er-Überschreitung für manche Kinder eine besondere Herausforderung, aber auch einen besonderen Reiz dar. Einige brechen die Berechnung mit einem Zwischenergebnis ab. Die meisten möchten aber die Plusaufgabe zu Ende führen und nehmen den Abakus hinzu oder wenden sich an die Lehrkraft. Gegenüber der geraden Bahn erhalten sie nun 14 verschiedene Summenzahlen.

Die Zahlbeziehungen sind für Erstklässler zu komplex. Eine Auswertung der Summen im Klassenverband findet deshalb nicht mehr statt. Einen größeren Gewinn erbringt die Reflexion der Lösungswege. Milan zum Beispiel gibt an, systematisch die vier Zahlenfolgen zur Startzahl 2 gefunden zu haben, indem er das Zahlenmuster „5 in der Mitte, die Zahlen unten „gleich“ und oben die Zahlen auf 7“ anwandte (Abb. 6).

Forscherfragen beantworten

Zum Abschluss der Unterrichtsreihe soll nun versucht werden, die Forscherfragen zur geraden Fünferbahn (vgl. Seite 8) zu beantworten. Dabei

wird der Sachverhalt noch einmal mit einem Würfel, an den gesammelten Abbildungen und mit Hilfe von Schülerarbeiten verdeutlicht.

- Welche Zahl liegt voraussichtlich bei einer bestimmten Startzahl auf dem Zielfeld oben? (Nach vier Kippungen liegt dieselbe Zahl wieder oben.)
- Welche und wie viele Zahlenfolgen entstehen bei der gleichen Startzahl? (Es sind für jede der 6 Augenzahlen vier verschiedene Zahlenfolgen möglich.)
- Welche Eigenschaften weisen diese Zahlenfolgen auf? (Die Zahlenfolgen sind bezüglich der Mittelzahl symmetrisch, die erste und die letzte Zahl sind gleich, die zweite und die vorletzte Zahl ergeben die Summe 7.)
- Wie groß ist die Summe aller Zahlen, die auf einem Weg oben liegen, mindestens oder höchstens? (Die Summe beträgt mindestens 15 und höchstens 20.)
- Wie lässt sich die Summe leicht berechnen? (Zum Beispiel durch Verdoppeln)

LERNEN BEGLEITEN – INKLUSIV DENKEN

Beobachtungshinweise

- Wer kann die Ortsbeschreibungen rechts, links, vorn, hinten, oben, unten unterscheiden?
- Wer erkennt die Zahlbilder auf dem Würfel sicher?
- Wer kann den Würfel nach Vorschrift kippen?
- Wer ist in der Lage, Zusammenhänge bei den erstellten Zahlenfolgen zu erkennen?
- Wer kann die Vorgehensweise von der einen auf die andere Bahn übertragen?

Förderhinweise

Bei Schwierigkeiten beim Übersetzen von Punktbildern zu Ziffern, kann ein Würfel mit Ziffern beklebt werden.

Kinder mit Schwierigkeiten beim Entdecken der arithmetischen Zusammenhänge sollten bei der geraden Bahn verweilen und evtl. Tipps zum systematischen Vorgehen erhalten.