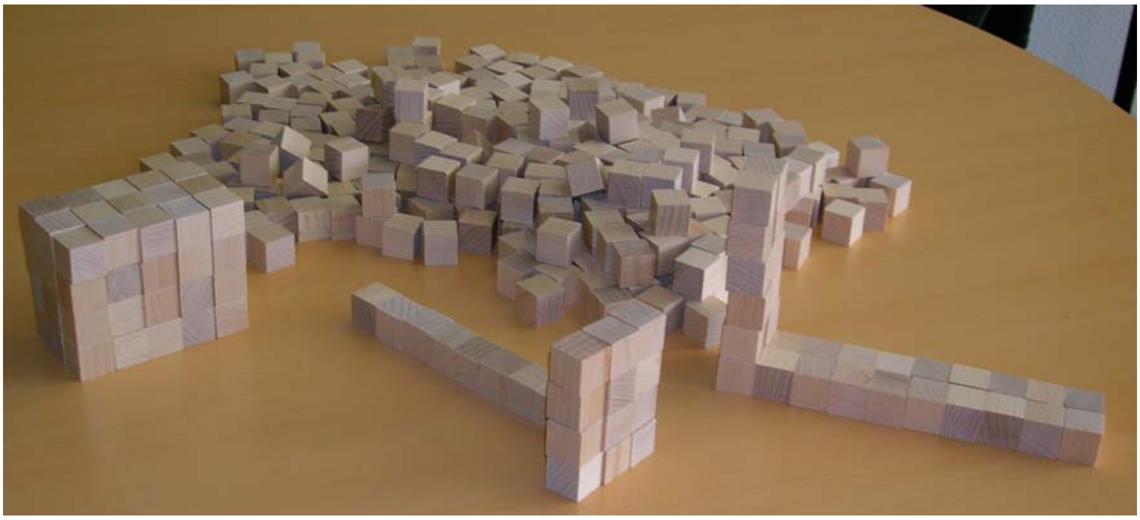
Quader bauen aus 24 Würfeln –
Kinder auf dem Weg zur Volumenformel

Susanne Prediger

Vorversion eines Artikels, erschienen in der Zeitschrift MNU-PRIMAR 1(2009) 1 , S. 8-12.

Zusammenfassung: „Hier habt Ihr 24 Holzwürfel. Welche Quader könnt ihr damit bauen?“ Mit diesem offenen, materialgestützten Erkundungsauftrag machen sich Kinder auf den Weg. Unterwegs entwickeln sie verbale, numerische und geometrische Notationen für Quader, entdecken Teilbarkeitszusammenhänge und erarbeiten sich die Volumenformel. Wer genau hinschaut, lernt viel über das geometrische und arithmetische Denken von Kindern.



Übungsaufgabe: Welches Volumen hat der Quader mit der Kantenlänge 2cm, 3cm, 4cm, 5cm?

Solche Standardaufgaben trainieren Lernende, nachdem die Volumenformel erarbeitet wurde. Viele moderne Schulbücher nutzen als produktive Übungsaufgabe inzwischen die Umkehraufgabe (z. B. Mathematikus 4, S. 33, ähnlich bei Franke 2007, S. 280). Wir drehen beides herum, die Fragestellung selbst und die Reihenfolge Erarbeiten-Üben, indem wir statt einer schrittweisen Einführung in die Volumenformel mit der Umkehr-Frage einsteigen:

Erkundungsaufgabe: Hier habt Ihr 24 Holzwürfel.
Welche Quader könnt ihr damit bauen?
Notiert, welche ihr schon gefunden habt.
Wie viele findet ihr?

Diese simple offene, aber durch Material gestützte Frage stellt sich als sehr reichhaltig heraus. Sie führt Lernende auf einen Weg zum Volumenkonzept, an dessen Ende die Volumenformel stehen kann. Geübt wird unterwegs, das reduziert die Trainingsarbeit nach der Einführung.

Angebahnt wird mit der Erkundung die mathematische Grundidee der Volumenmessung als Legen von Körpern mit Einheitswürfeln, aus der sich dann die Beziehung Länge x Breite x Höhe erarbeiten lässt. Wird der Quader mit Holzwürfeln der Kantenlänge 1cm gelegt, so entspricht die Anzahl der verwendeten Würfel dem Größenwert des Volumens der Figur (vgl. Hefendehl-Hebeker 2002, S. 120f).

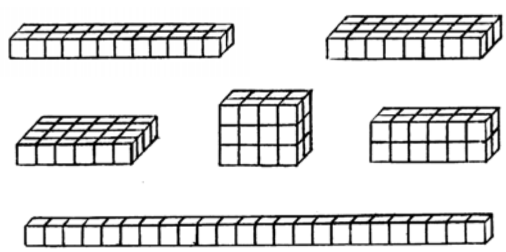


Abb. 1: Die sechs möglichen Quader mit 24 Würfeln

Während der Erkundung können sich die Lernenden im Umgang mit den Holzwürfeln folgendes erarbeiten:

- Quader mit 24 Würfeln können ganz unterschiedliche Formen haben,
- manche Quader, die man für weitere Lösungen hält, lassen sich durch Drehung auf die bekannten zurückführen,
- es gibt sechs verschiedene Quader (vgl. Abb.1),
- die Quader lassen sich zwar auch zeichnen (s.u.), aber bequemer können sie durch ihre Seitenlängen notiert werden,
- multipliziert man die Seitenlängen, kommt man immer auf die Zahl 24,
- alle möglichen Seitenlängen sind Teiler der 24,
- die systematische Suche nach Teilern ergibt nur diese 6 Möglichkeiten: $1 \cdot 1 \cdot 24$, $1 \cdot 2 \cdot 12$, $1 \cdot 3 \cdot 8$, $1 \cdot 4 \cdot 6$, $2 \cdot 3 \cdot 4$, $2 \cdot 2 \cdot 6$.

Die Aufgabe ist insofern selbstdifferenzierend, als alle Kinder mindestens einen Quader finden, die meisten mehrere. Nach Anspruch gestufte Impulse fordern jedes Kind auf seinem Niveau heraus, nicht alle müssen beim letzten ankommen (vgl. Hußmann/Prediger 2007):

- Findest du einen?
- Findest du viele?
- Findest du alle?
- Wie kannst Du sicher sein, dass du alle gefunden hast?

Die typischen Lernwege von Kindern der Klassen 4-6 sollen hier an Lernwegen von Fünftklässlerinnen und Fünftklässlern einer Dortmunder Hauptschule und einer Soester Realschule nachgezeichnet werden, deren Erkundungsprozesse im Rahmen einer von der Autorin betreuten Bachelorarbeit (Lorenz/Schiwe 2008) dokumentiert wurden.

Die Kinder bearbeiteten (nach einer kurzen Sicherung der Kenntnis des mathematischen Begriffs des Quaders) die vorgestellte Aufgabe in Partnerarbeit so, wie es ab Klasse 4 gut nutzbar ist.

Erste Quader finden

Die ersten Quader finden die Kinder ganz unterschiedlich: Einige starten mit zu kleinen Quadern und bauen an, bis es passt. Saskia und Julian dagegen wissen sofort, dass man Rechtecke durch Multiplizieren erhält und suchen multiplikative Zerlegungen der 24. Kai legt Quader hin, und findet den nächsten durch Umbauen des ersten.

Sara (und ebenso Cora, vollständig):

ein länglicher Quarder.
An den kurzen seiten sind 4 Würfel und an den Länglichen seiten sindes 6 Würfel.
An den kurzen seiten sindes 2 Würfel, un an den Länglichen seiten sindes 12 Würfel.
- 8 · 3 = 24 Würfel
- 1 · 24 = 24 Würfel.

Vicky (und ebenso Gina, vollständig):

3 Senkrecht
4 Wagerecht
2 Stockwerk hoch

8 Senkrecht
3 Wagerecht
1 Stockwerk hoch

4 Senkrecht
6 Wagerecht
1 Stockwerk hoch

2 Senkrechte
12 Wagerecht
1 Stokwerk hoch

1 Senkrechten
24 Wagerecht
1 Stockwerk hoch

2 Senkrecht
6 Wagerecht
2 Stockwerk hoch

Saskia (vollständig):

4 runter 6 nach lenks
8 runter 3 nach lenks
12 runter 2 nach lenks
24 runter 1 nach lenks
2 nach oben 4 nach unten 3 nach lenks
2 nach oben 2 nach unten 6 nach lenks

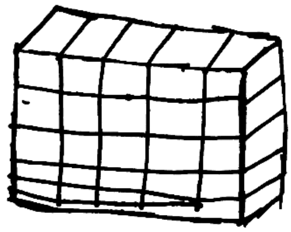
Bianca (Beginn):

4 Runter 6 Längst

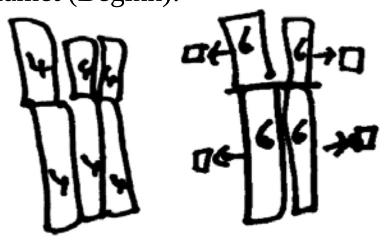
Bianca (später)

4 Runter 2 untereinander 3 Längst

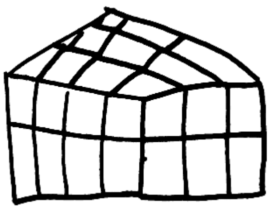
Sebastian (Beginn):



Hamet (Beginn):



Michael (Beginn):



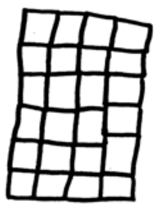
Zoltan (Beginn):

Abb. 2: Notationen der Kinder-Paare

Julian (vollständig):

1 · 4 · 6 Würfel
~~3 · 5~~ "
~~2 · 4~~ "
2 · 6 · 2 "
2 · 4 · 3 "
(2 · 3 · 4) "
3 · 8 "
1 · 24 "
2 · 12 "

Kai (Beginn):



Kai (später):

2 · 12 = 24
4 · 6 = 24
2 · 6 · 2 = 24
2 · 4 · 3 = 24
(2 · 3 · 4 = 24)
3 · 8 = 24
1 · 24 = 24

Notieren

Um die bereits gefundenen Quader festzuhalten, erfinden die Kinder bzw. die Kinderpaare ganz unterschiedliche Notationen. Zur Illustration sind die Anfänge der Bearbeitungen von sechs Kinderpaaren sind in Abbildung 2 abgedruckt (alle aus Lorenz/Schiwe 2008):

- verbale Notationen (mit gemeinsprachlichen Worten wie von Sara und Cora)
- numerische Notationen (durch Angabe von zwei oder drei Seitenlängen, wie von Julian, Vicky und Gina)
- graphische Notationen (durch zwei- oder dreidimensionale Skizzen wie von Kai, Michael, Zoltan und Sebastian, oder Baupläne wie Hamet)

Diese Notationen und ihre Weiterentwicklung während der Bearbeitung der Aufgabe geben einen Einblick in die Denkprozesse der Kinder. Bei einigen Kindern sind nur die ersten Produkte abgebildet, nur wenn „vollständig“ in der Legende notiert ist, ist alles abgedruckt.

Sara und Cora starten mit der rein verbalen Beschreibung: „ein lenglicher Quarder“ für den 6x2x2-Quader, die allerdings schnell an Grenzen stößt. Wie soll man in Abgrenzung dazu den 6x4x1-Quader beschreiben? Feldquader? Der Vorschlag wird nicht aufgeschrieben. Nach Aufforderung zur Präzisierung der Zahlen durch die Lernbegleitung schreiben sie „An den kurzen Seiten sind 4 Würfel und an den länglichen Seiten sind es 6 Würfel.“ Im dritten Schritt verkürzen sie ihre Schreibweise zum numerischen Kern: „8·3=24“. (Da Coras Notation in direkter Korrespondenz zu Saras entstanden ist und genauso aussieht, ist sie nicht extra abgedruckt.)

Saskia startet unmittelbar mit den Zahlen, „4 runter und 6 nach lenks“, denn sie identifiziert das Rechteck sofort als ihr vertraute multiplikative Struktur:

> „Weil 6x4, 6x4 sind ja 24 und dann müsste das so – klappen. … Weil, das hatten wir in der Grundschule gelernt. Da hatten wir nämlich so Fliesen gezählt und da mussten wir dann auch immer so, eine Seite runter und eine Seite nach *(zeigt Länge und Breite am Quader)“*

Der Notation ihrer Partnerin Bianca sieht man an, dass diese zwar einerseits die sehr schnell geäußerten Gedanken von Saskia übernimmt, gleichzeitig aber ihrem Wunsch nach stärker geometrischer Erfassung der Situation dennoch in ihrer Notation Ausdruck verleiht, indem sie die Worte „4 runter“ und „6 längst“ in vertikaler und horizontaler Richtung anordnet.

Ähnlich wie Saskia notiert auch Julian, während dagegen sein Partner Kai den ersten Quader als zweidimensionales Bild zeichnet. Die Partnerarbeit der beiden ist beeinflusst davon, dass sich Julians Ansatz als wesentlich schneller erweist als Kais. Kai übernimmt unmittelbar im nächsten Schritt Julians einfachere numerische Notation.

Aufrechterhalten werden graphische Notationen nur bei den Schülerpaaren, in denen beide geometrisch notieren, wie Zoltan und Michael sowie Sebastian und Hamet: Während Hamet einen Bauplan entwirft, der die Zahlen deutlich transportiert, ist Sebastian von der Herausforderung des perspektivischen Schrägbildes so eingenommen, dass ihm nicht auffällt, dass sein Quader nur 20 Würfel hat. Auch hier überzeugt die größere Ökonomie der Darstellung, Sebastian übernimmt später Hamets Notation.

Hier zeigt sich, wie wichtig im Klassenunterricht einerseits der Freiraum für individuelle Ideen ist, andererseits der Austausch über die individuelle Zugänge, wenn eine Weiterentwicklung anvisiert ist. In einem für die Kinder noch nicht konventionalisierten Feld wie der Notation von Quadern aus Holzwürfeln ist zwar eine große spontane Vielfalt zu erkennen, in den zusammenarbeitenden Paaren gleichen sich die Notationen jedoch sofort an.

Weitere Quader suchen

Zwei oder drei Dimensionen?

Bemerkenswert ist, dass bis auf Vicky und Gina alle Kinder, die Zahlen aufschreiben, zunächst nur zwei Faktoren beachten und erst später eine dritte Dimension in ihre Überlegungen und Notationen integrieren (wie Saskia beim Übergang vom vierten zum fünften Quader: nach „24 runter, 1 nach lenks“, schreibt sie nun „2 nach oben, 4 nach unten, 3 nach lenks“).

Die Kinder scheinen intuitiv zunächst eine Reduktion auf ein Problem geringerer Dimension vorzunehmen oder knüpfen hierbei an ihr Vorwissen über die multiplikative Struktur von Rechtecks-Anordnungen an. Bianca etwa gerät bei Entdeckung der dritten Dimension an die Grenze ihrer Notation: „4 runter“ vertikal, „3 längst“ horizontal; und nun? Sie schreibt schließlich „2 untereinander“ in die Mitte, etwas versetzt und erfindet somit so etwas wie eine Schrägbild-Notation. Damit kombiniert Bianca in bemerkenswerter Weise verbale, numerische und graphische Notationen.

Die Begrenztheit der Notationen auf zwei Dimensionen korrespondiert mit der Begrenztheit der Quader-Konstruktionen: Viele Kinder brauchen einen Anstoß von außen (z. B. vom anderen Kind), um auch Quader der Höhe 2 zu bauen.

Überprüfen, ob der Quader schon vorhanden ist

Beim Suchen weiterer Quader bauen die Kinder zwangsläufig auch solche, die in kongruenter Form bereits konstruiert und notiert wurden. Meist erkennt eines der Kinder, dass sie durch Drehung ineinander überführt werden können. So baut zum Beispiel Gina nach dem 4x3x2-Quader einen 2x3x4-Quader, doch Vicky sagt:

> „Dann wär das aber wieder (schielt auf ihre Aufzeichnung) [der 3x4x2-Quader…] Weil wenn man den wieder hinlegt, hat er wieder 3 senkrechte, 4 waagerechte und 2 Stockwerke.“

Ob ein gedrehter Quader als derselbe oder als anderer aufgefasst wird, ist allerdings reine Konvention, die nicht aus der Fragestellung selbst klar ist. So widerspricht z. B. Michael, als Zoltan ihn darauf aufmerksam macht, dass sie den neu gebauten Quader bereits haben:

> Zoltan: „Den haben wir schon“
>
> Michael: „Nein, aber nicht hoch.“

Beide Sichtweisen sind plausibel und gut begründbar, zwischen ihnen ist nur durch explizite Festlegung des zugrundeliegenden Gleichheitsverständnisses (durch die Lehrkraft) zu entscheiden: *Quader, die wir durch Drehung aus den anderen bekommen, müssen wir nicht noch einmal aufschreiben.*

Wie schnell die Kinder die Dreh-Kongruenz jeweils erfassen, hängt auch von ihren Notationen ab, denn sie ist den Zahlen leichter anzusehen als den Bildern. Wer sich auf seine numerische Notation verlassen kann (wie z. B. Vicky), muss den (bzgl. des Raumvorstellungsvermögens nicht trivialen) Akt der mentalen Rotation des Quaders nicht mehr vollziehen, sondern nur Zahlen in der Reihenfolge vertauschen. Hier kann die Arithmetisierung zur Denkentlastung beitragen.

Wie findet man weitere Quader?

Auch bei der Suche nach möglichst vielen Quadern erweist sich die numerische Darstellung als Vorteil. Wer sich nur geometrisch annähert und ausprobiert, wie er alle 24 Würfel einbaut, hat ein größeres Risiko, Möglichkeiten zu übersehen. Kinder wie Saskia dagegen, die die (zunächst auf zwei Faktoren beschränkte) multiplikative Struktur der Situation erfassen, können schneller systematisch herangehen und alle Zahlen kleiner 12 darauf prüfen, ob sie Teiler von 24 sind:

> „Sieben geht nicht. Acht geht. Neun geht nicht. Zehn geht nicht. Elf geht nicht. Zwölf geht. Dreizehn … Ähm ich mache die ganzen Zahlen und dann - guck ich ob das durch 24 geht."

und schließlich kurze Zeit später:

> „Eigentlich müsst es jetzt keine mehr geben. - Außer die jetzt zum Beispiel acht nach längs und drei nach unten und so."

Michael kann dies sogar explizit zusammenfassen:

> „Man kann nur die Quader richten wenn man die Zahl benutzt, durch die man die teil… durch 24 teilen kann."

Eine solch systematische Suche erfordert allerdings die Durchdringung der multiplikativen Struktur, das schaffen nicht alle Kinder von allein. Auch Saskia findet auf diese Weise nur alle mit drittem Faktor 1.

Die relativ große Zahl von Kindern, die in einer der Dimensionen die Würfelzahl auch weiterhin additiv bestimmen (z. B. Hamet: „Hier sind es 6, dann 6 plus 6 plus 6 plus 6"), können die systematische Teilersuche dagegen nicht aktivieren.

Wie kann man sich sicher sein, dass man alle hat?

So erweist sich die stichhaltige Begründung der Vollständigkeit der gefundenen Lösungen als *natürlich differenzierende Rampe* für wenige, die anderen verbleiben beim mehr oder weniger systematischen Suchen.

Sich der Vollständigkeit sicher sein kann am besten, wer die Ergebnisse zuvor geordnet hat, z. B. nach der Größe der multiplikativen Faktoren: $1 \cdot 1 \cdot 24$, $1 \cdot 2 \cdot 12$, $1 \cdot 3 \cdot 8$, $1 \cdot 4 \cdot 6$, $2 \cdot 2 \cdot 6$, $2 \cdot 3 \cdot 4$. In der Schreibweise einer *geordneten Liste* zeigt sich, dass „keiner mehr dazwischen passt", wie ein Kind sagte. Wenn die Zerlegungen dagegen so aufgeschrieben sind wie etwa bei Julian und Kai (vgl. Abb. 2), kostet die Überprüfung erheblich mehr Mühe. Gleichwohl verschaffen sich Kinder auch mit solchen Listen subjektive Sicherheit, denn die sechs Möglichkeiten sind auch ohne Systematik noch zu überblicken. Ist das subjektive Begründungsbedürfnis der Kinder gestillt, sollte der Prozess auch enden.

Will die Lehrkraft dennoch eine Argumentation auf der Basis einer systematisch angeordneten Liste anstoßen, geht sie daher zu einer komplexeren Aufgabe über: Wie viele Quader gibt es bei 60 Würfeln? Zum Finden aller neun Möglichkeiten kann der sortierende Impuls unterstützend wirken, die bereits gefundenen Zerlegungen auf Kärtchen zu schreiben, die sich leichter nachträglich sortieren lassen. Wie können wir sie aufreihen? und dann: Wo sind noch Lücken? Wir sind wir sicher, dass wir nun alle haben?

Wer die Kraft der geordneten Liste als Such- und Begründungsmittel einmal erfahren hat, kann sie leicht auf andere Zahlenbeispiele übertragen: Und wie ist es nun bei 100 Würfeln? So haben auch die Kinder, die weitere Herausforderungen brauchen, ein ertragreiches Betätigungsfeld.

Der Weg zur Volumenformel – Sammeln und Systematisieren als zentrale Unterrichtsphase

Viele Kinder machen im Laufe des Bauens und Notierens die Entdeckung der Volumenformel, so wie Kai:

> „Ich weiß auch, wie man es rechnen kann. …Äh, 2 mal 6 – und dann mal 2. Also hier sind ja 2. …. Also ich hab jetzt eine Seite erst gerechnet und dann, ist ja noch eine genau die gleiche und dann einfach mal 2.“

Viele andere erarbeiten sich dies nur implizit, ohne es so explizit zu formulieren. Alle können aber nach einer guten halben Stunde Beschäftigung am Ende auch die Würfelzahl von per Foto gegebenen Quadern bestimmen (abgesehen von Rechenfehlern).

Ohne gemeinsame Systematisierungsphase verbleiben die Rechenwege dabei allerdings individuell, etwa bei dem Bild des 4x6x3-Quaders:

Hamet: „24 mal 3“

Sebastian: „Ich hab gerechnet, vorne sind 12, also kann ich das von der immer weiter zählen. Deswegen hab ich dann gerechnet – 12, äh 24, 36, achtunddr, 48, 60, siebz, 72.“

Sara: (zählt 12er-Platten zusammen; verdeckt gezähltes mit der Hand) „Dann 12 plus 12 sind 24, plus 12 sind 36,äh plus 12 sind 48, plus den sind 60 – sind 72.“

Bianca: „Ich mach, hier sind 6 und hier sind 4, also 6 mal 4 und dann noch mal 3, weil hier unten ja immer 3 sind.“

Dass nicht alle Kinder direkt ein Produkt aus drei Faktoren bilden, hat auch mit den individuellen Rechenfertigkeiten zu tun: Für viele Kinder ist auch nach Ende der Grundschulzeit das fortgesetzte Aufaddieren der bevorzugte Weg zu Bestimmung von Produkten wie $12 \cdot 8$. Daran sollte aus arithmetik-didaktischer Perspektive weiter gearbeitet werden.

Andererseits ist das fortgesetzte Aufaddieren für das Volumenkonzept von höherer Warte absolut tragfähig, führt es doch direkt auf das (für die mehrdimensionale Volumenbestimmung wichtige) Prinzip von Cavalieri, nach dem für jeden beliebigen dreidimensionalen Körper das Volumen durch Aufsummieren von Teilflächen in Schichten bestimmt werden kann, im stetigen Fall durch Integration mit Grenzübergang.

Für die Klassensituation ist nun (und erst jetzt!) der Moment gekommen, die verschiedenen Ideen, Notationen und Erfahrungen zu sammeln, zu sichern, und durch Systematisierung der Rechenwege auch zu konsolidieren. Dabei sollte auch zur Sprache kommen, dass bei den Produkten mit zwei Faktoren eigentlich der dritte Faktor 1 immer dazu gedacht werden sollte, denn das sehen nicht alle Kinder automatisch. Diese Perspektive ist für eine konzeptionelle Trennung zwischen Flächeninhalten zweidimensionaler Figuren und Volumina dreidimensionaler Körper aber entscheidend.

Das Multiplizieren der drei Seitenlängen wird dabei als der universelle Rechenweg für alle Fälle herauspräpariert.

Schlussbemerkung: Den Kinder etwas zutrauen

Gleich die Umkehraufgabe, obwohl nicht mal die Grundaufgabe erarbeitet wurde? Jawohl, das geht! Der vielleicht etwas ungewohnte Weg hilft sogar, den Hintergrund der Grundaufgabe besser zu verstehen. Die Vielfalt der Notationen und Rechenwege zeigt, wie viel Kreativität der offene Einstieg freisetzen kann.

Dass ein solche handlungsorientierte Erfahrung eine gute Basis für die Sicherung der Volumenformel bieten kann, ist im Unterricht der Autorin in Klasse 5/6 erprobt und bewährt. Das diskrete Volumenverständnis ist nach dieser Aufgabe etabliert, der Weg für die Verallgemeinerung auf nicht ganzzahlige Seitenlängen ohne vorab gegebene Einheitswürfel vorbereitet.

Geübt wird hier nicht *nach* der Einführung, sondern *während dessen*, und zwar die ganze Zeit. Die Grundaufgabe, das Volumen zu gegebenen Seitenlängen zu bestimmen, erscheint den Kindern hinterher trivial. Wenn wir den Kindern etwas zutrauen, können sie auch viel schaffen!

Anmerkung zur Quelle des empirischen Materials

Alle Bilder und wörtlichen Zitate sind den Untersuchungen meiner Studentinnen Kristin Lorenz und Elina Schiwe entnommen, ich möchte beiden herzlich danken dafür, den unterrichtlich bewährten Zugang dadurch mit empirischen Material flankiert zu haben.

Literatur

Franke, M. (2007). Didaktik der Geometrie in der Grundschule. Spektrum Akademischer Verlag, München.

Hefendehl-Hebeker, L. (2002). Maße und Funktionen im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I. Wißner-Verlag, Augsburg.

Hußmann, S. / Prediger, S. (2007). Mit Unterschieden rechnen. Differenzieren und Individualisieren. In: Praxis der Mathematik in der Schule 49(17), S. 1-8.

Lorenz, K., Schiwe, E. (2008). Vom Würfelquader zur Volumenformel. Bachelor-Arbeit, betreut von Susanne Prediger, Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts, TU Dortmund.

Mathematikus 4 (2002), hrsg. von Jens Holger Lorenz, Westermann Verlag, Braunschweig.