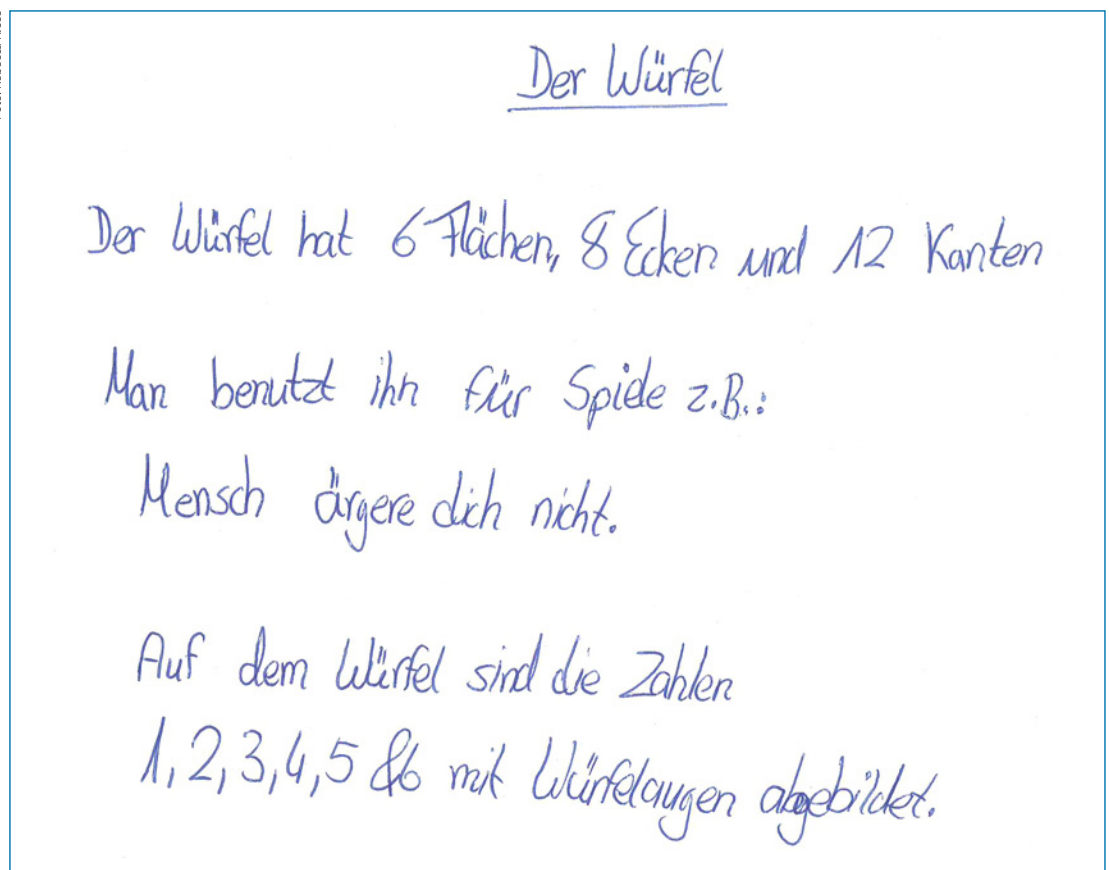


Begriffe bilden – aber wie?

Grundschul Kinder beschreiben ihre Vorstellungen zum Würfel

In der Mathematik wird Begriffen eine große Bedeutung beigemessen. Doch was versteht man eigentlich unter einem mathematischen Begriff? Und wie werden mathematische Begriffe in der Grundschule gebildet? Diesen Fragen wird am Beispiel des Würfels nachgegangen.

Foto: Rebecca Klose



•• Abb. 1: Maria hat direkt den geometrischen Würfel vor Augen.

von Rebecca Klose

.....
„Schreibe und male alles auf, was du zum Würfel weißt.“

Bevor Sie diesen Artikel weiterlesen, nehmen Sie sich bitte etwas Zeit, um die Aufgabe einmal in Ruhe zu bearbeiten. Schreiben und malen Sie alles auf, was Ihnen zum Würfel einfällt.

Was weißt du über den Würfel?

Wie sind Sie bei der Aufgabe vorgegangen? Vielleicht haben Sie zunächst das Begriffswort „Würfel“ als Überschrift notiert und eine kleine Skizze zu einem würfelförmigen Objekt oder ein Schrägbild eines Würfels angefertigt. Möglicherweise haben Sie sich auch direkt würfelförmige Objekte und Repräsentanten wie den Spielwürfel oder einen Zauberwürfel vorgestellt. Oder Sie haben wie Mara (siehe Abb. 1) direkt an den geometrischen Würfel mit seinen Eigenschaften (z. B. 8 Ecken, 12 Kanten, 6 Flächen) gedacht. Es wäre denkbar, dass Sie Besonderheiten des geometrischen Körpers (z. B. sechs quadratische, deckungsgleiche Flä-

chen, gleichlange Kanten) in den Blick genommen sowie einen Bezug zu anderen geometrischen Körpern hergestellt haben. Vielleicht haben Sie den Würfel als besonderen Quader oder spezielles Prisma charakterisiert und auch eine Begriffsdefinition notiert. Oder als Lehrkraft sind Sie gezielt auf bestimmte Unterrichtsaktivitäten eingegangen, beispielsweise auf das Herstellen von Kantenmodellen oder auf die Arbeit mit Würfelgebäuden und Bauplänen.

Begriffsbildung am Beispiel des Würfels

Der Würfel nimmt eine besondere Rolle im Mathematikunterricht ein, nicht nur in der Geometrie, sondern auch in der Arithmetik und der Stochastik. Die Arbeit mit dem Würfel im Geometrieunterricht eröffnet den Lernenden einen Zugang zum dreidimensionalen Raum. Es lassen sich aber auch Bezüge des Würfels zur ebenen Geometrie herstellen, da der Würfel sich aus kongruenten Quadraten zusammensetzt. Ein wichtiges Ziel ist es, dass die Kinder über die Schuljahre hinweg tragfähige Vorstellungen zum Würfel aufbauen und ein Begriffsverständnis entwickeln.

Wie werden mathematische Begriffe gebildet?

Auch in den Bildungsstandards wird in der Leitidee „Raum und Form“ übergreifend das Begriffsverständnis genannt (KMK 2022, S. 16). Hier geht es u. a. darum, geometrische Figuren zu erkennen, zu benennen und darzustellen. Dazu klassifizieren die Lernenden Körper nach Eigenschaften, ordnen Fachbegriffe zu und beschreiben Beziehungen zwischen geometrischen Figuren. Die Lernenden untersuchen und vergleichen Körper auch hinsichtlich des Rauminhalts. Weiterhin erkennen sie Körper in der Umwelt. Es wird auch auf verschiedene Darstellungen verwiesen: Die Lernenden fertigen Zeichnungen an und stellen verschiedene Modelle von geometrischen Körpern her.

Begriffsbildungsprozesse vollziehen sich im Mathematikunterricht der Grundschule durch den aktiven Umgang mit Objekten und in Verbindung mit Sprache (vgl. Franke/Reinhold 2016), also vorwiegend handelnd, modellhaft und materialgebunden. Zur Repräsentation mathematischer Begriffe werden externe Darstellungen wie Materialien, sprachliche Zeichen oder Symbole genutzt.

Aktivitäten wie das Finden von Würfelnetzen sollten von den Lernenden beschreibend ausgeführt werden. Wenn wesentliche Eigenschaften beim Operieren mit den Materialien erfahren werden, erwerben die Lernenden nicht nur Handlungs-, sondern auch Sachwissen. Im Zusammenhang mit dem Würfel können auf diese Weise über die Schuljahre hinweg wichtige geometrische Fachbegriffe gelernt und vertieft werden.

Mathematische Begriffe stehen auch in einem Verhältnis zu anderen Begriffen. So wird der Würfel im ersten und zweiten Schuljahr oft im Zusammenhang mit der Kugel und dem Quader betrachtet, im dritten

un vierten in Verbindung mit weiteren geometrischen Körpern wie dem Kegel, dem Zylinder und der Pyramide. Der relationale Charakter mathematischen Wissens wirkt sich auf die Auswahl der Darstellungen aus.

Begriffsvorstellungen und Begriffsverständnis

Bei der Bildung mathematischer Begriffe wird nicht nur den Darstellungen als externe Repräsentationen, sondern auch dem Aufbau interner Repräsentationen, also mentaler Vorstellungen, eine besondere Bedeutung zugeschrieben. Vorstellungen zu einem Begriff stellen inhaltliche Deutungen eines Begriffs dar. Das mentale Operieren mit Objekten wird als eine entscheidende Kompetenz beim Bilden geometrischer Begriffe angesehen (vgl. Wollring 2016). Lernende einer vierten Klassenstufe beschreiben und vergleichen den Würfel mit anderen geometrischen Körpern wie folgt (vgl. Klose 2022):

„Der Quader ist das Gleiche wie ein langgezogener Würfel. Wenn man den Würfel langzieht, sind vier Kanten länger und vier Flächen werden zu Rechtecken.“

„Man kann aus einem Würfel auch eine Viereckspyramide machen, indem man die hinteren vier Ecken zu einer einzigen Spitze zusammenfügt und die Fläche, die hinten ist, verschwindet.“

Bei diesen Äußerungen wird durch die Umformungen des Würfels zum Quader bzw. zur Pyramide mit quadratischer Grundfläche ein Handeln mit mentalen Bildern bei den Lernenden erkennbar. Zur Beschreibung ihrer Vorstellungen verwenden sie Fachausdrücke und stellen anschaulich Beziehungen zwischen den geometrischen Körpern (Quader – Würfel, Würfel – quadratische Pyramide) her.

Um darüberhinaus im Unterricht festzustellen, welches Begriffsverständnis Lernende aufweisen, werden in der fachdidaktischen Literatur Stufen des Begriffsverständnisses beschrieben (vgl. Franke 2007). In der Grundschule kommen dabei das *intuitive*, *inhaltliche* und *integrierte Begriffsverständnis* zum Tragen. Die Merkmale der einzelnen Stufen werden anhand von weiteren Kinderäußerungen illustriert (Klose 2022).

Intuitives Begriffsverständnis

Durch ein weitestgehend anschauungs- und materialgebundenes Arbeiten mit dem Würfel bauen Lernende im Unterricht zunächst ein *intuitives* Begriffsverständnis auf. Dies zeigt sich daran, dass sie Repräsentanten für einen Begriff kennen (z. B. den Spielwürfel), wahrnehmungsgebunden Beispiele und Gegenbeispiele finden und auch Repräsentanten für einen Begriff herstellen können (z. B. einen Würfel aus Knete formen). Der Vergleich mit einem Prototyp erfolgt oft noch ganzheitlich.

„Es gibt Würfel in klein und groß.“

„Würfel werden häufig zum Spielen benutzt. Ein Beispiel ist der Augwürfel bei Brettspielen.“

„Eine Kugel sieht ganz anders aus als ein Würfel.“

Inhaltliches Begriffsverständnis

Im Laufe der Schuljahre setzen sich die Lernenden intensiver mit den spezifischen Eigenschaften und Besonderheiten des Würfels auseinander und entwickeln durch vielfältige Aktivitäten ein inhaltliches Begriffsverständnis. Sie erfassen Eigenschaften des Begriffs. Diese Äußerungen von Kindern deuten auf ein inhaltliches Begriffsverständnis hin:

„Ein Würfel hat zwölf Kanten, sechs Flächen und acht Ecken. Alle Flächen sind gleich.“

„Bei einem Würfel sind alle Kanten gleich lang.“

„Der Würfel ist symmetrisch.“

Weiterhin stellen Lernende auf dieser Stufe fest und begründen, ob eine Figur Repräsentant eines Begriffs ist. Es können auch eigene Beispiele in Umweltsituationen für den Begriff gefunden werden.

Integriertes Begriffsverständnis

Lernende mit einem integrierten Begriffsverständnis erfassen Beziehungen zwischen den Eigenschaften eines Begriffs. Sie erkennen Beziehungen zwischen Begriffen, vor allem zu Unter- und Oberbegriffen sowie zu nebengeordneten Begriffen einer Begriffshierarchie. Ihnen ist der Unterschied zwischen sich bedingenden und ausschließenden Eigenschaften deutlich. Das Begriffsverständnis basiert auf dem Verständnis anderer Begriffe und ist nicht mehr wahrnehmungsgebunden. In den folgenden Kinderäußerungen wird der Würfel mit dem Quader in Beziehung gesetzt, was in Ansätzen bereits auf ein integriertes Begriffsverständnis hindeutet:

„Der Würfel zählt zu den Quadern. Er ist ein besonderer Quader, denn bei den meisten Quadern sind die Flächen in der Form eines Rechtecks.“

„Der Unterschied zwischen einem Würfel und anderen Quadern besteht darin, dass bei den Quadern meist nicht alle Flächen gleich groß sind und nicht alle Kanten gleich lang.“

An den beschriebenen Stufen und den ausgewählten Kinderäußerungen wird deutlich, dass mit einem Begriff „nicht nur ein einzelner Gegenstand – oder auch Ereignis usw. – bezeichnet wird, sondern eine Kategorie, eine Klasse assoziiert wird, in die der konkrete Gegenstand einzuordnen ist“ (vgl. Franke 2007, S. 94). Im

Sinne des Spiralprinzips sollten die Lernenden über die Schuljahre hinweg einen Überblick über die Gesamtheit aller Objekte erhalten, die unter den Begriff fallen (also den Umfang des Begriffs erfassen), tragfähige Vorstellungen zu Merkmalen und Eigenschaften eines mathematischen Begriffs aufbauen (also ein Verständnis zum Begriffsinhalt gewinnen) und Beziehungen des Begriffs zu anderen Begriffen aufzeigen können (also über ein Begriffsnetz verfügen). Zu einem umfangreichen Begriffsverständnis gehören auch Anwendungen des Begriffs sowie der Erwerb von Fähigkeiten im Umgang mit dem Begriff.

Fazit

Werfen wir noch einmal einen Blick auf die Ausgangsfrage: „Was weißt du über den Würfel?“ Mit einer solchen oder ähnlichen Frage erhalten Lehrkräfte Einblicke in die Begriffsvorstellungen und das Begriffsverständnis von Lernenden. Durch die Darstellungen der Lernenden, ob schriftlich-grafisch, mündlich oder handelnd mit Material, kann Wissen aktiviert und transportiert werden. Durch geeignete Methoden und Medien lassen sich verschiedene Darstellungen im Sinne mathematischer Begriffsbildung auch miteinander vernetzen. Die Kinderäußerungen zum Würfel stammen von Grundschulkindern, die einen Audio-Podcast zum Begriff des Würfels erstellt haben (vgl. Klose 2022). Auch solche innovativen Methoden können Anlass bieten, möglichst präzise und anschaulich Begriffe zu beschreiben und dabei bedeutungstragende Sprache zu verwenden. Die Vorstellungen der Lernenden zum Würfel und ihr dargestelltes Begriffswissen können von der Lehrkraft im weiteren Unterricht produktiv aufgegriffen werden. ■

Literatur

- Klose, Rebecca: *Mathematische Begriffsbildung. PriMa-Podcasts im bilingualen Kontext*. Münster, New York 2022
- KMK, 2022: *Bildungsstandards für das Fach Mathematik. Primarbereich*. https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-Primarbereich-Mathe.pdf
- Franke, Marianne: *Didaktik der Geometrie in der Grundschule* (2. Aufl.). Heidelberg 2007
- Franke, Marianne/Reinhold, Simone: *Didaktik der Geometrie in der Grundschule* (3. Aufl.). Berlin, Heidelberg 2016
- Wollring, Bernd: *Wie entstehen geometrische Begriffe? Mentale Übungen an explodierenden Würfeln und schmelzenden Kugeln*, in: *Mathematik differenziert*, Heft 2-2016, S. 6–15

Die Autorin



Foto: Privat

Dr. Rebecca Klose lehrt am Institut für Didaktik der Mathematik an der Justus-Liebig-Universität in Gießen.