

Zum Geometrieunterricht in der Grundschule

1 Zur Sache

In den letzten zwei Jahrzehnten gab es wohl kein Jahr, in dem nicht mindestens eine Publikation die Stellung des Geometrieteils als Stiefkind des Mathematikunterrichts in der Primarstufe beklagte.

Einschlägige Fachzeitschriften unterbreiteten in diesem Zeitraum immer wieder Vorschläge für geometrische Aktivitäten mit allen nur denkbaren Materialien. Neu entstandene oder überarbeitete Rahmenpläne einzelner Bundesländer (vgl. etwa Mecklenburg-Vorpommern, Thüringen oder Bayern) gehen in der Tendenz ausführlicher und von den Forderungen her konkreter auf den Geometrieteil ein. Nicht zuletzt enthalten Lehrwerke und Zusatzmaterialien nahezu aller Schulbuchverlage heute wesentlich umfangreichere Aufgabenangebote zur Geometrie als noch vor 10 oder vor 15 Jahren.

Auf den ersten Blick sind damit gute Vorraussetzungen gegeben, dass der Geometrieunterricht in der Primarstufe in absehbarer Zeit nicht mehr die Bezeichnung „Stiefkind“ verdient.

Der Fakt, dass all diese besseren Voraussetzungen nicht plötzlich gekommen sind und sich in der Praxis in den letzten Jahren dennoch offensichtlich nur wenig geändert hat, ist uns Anlass zu einem zweiten, längeren Blick, um darüber nachzudenken, ob und wie dieses nicht nur ministeriell gewünschte, von Didaktikern propagierte und den Verlagen mit Material unterstützte „Mehr“ an Geometrie praktisch umsetzbar ist.

Zunächst soll dazu vor dem Hintergrund der Funktion des Geometrieunterrichts in der Primarstufe diskutiert werden, *wo* und vor allem *wie* ein „Mehr“ an Geometrie im Mathematikunterricht der Grundschule sinnvoll ist. Wir wollen wesentliche der seit Jahren in der Literatur genannten Argumente für den Geometrieunterricht in der Primarstufe noch einmal kritisch betrachten und einige aus unserer Sicht vorhandene Perspektiven und Möglichkeiten der weiteren Entwicklung aufzeigen.

Schließlich sollen exemplarisch Beispiele zu einer der uns wesentlichen Entwicklungsrichtungen des Geometrieunterrichts, der stärkeren *inhaltlichen* Verbindung von Arithmetik und Geometrie, skizziert werden.

2 Die Funktion des Geometrieunterrichts in der Primarstufe

Mit Blick auf die Funktion des Mathematikunterrichts in der Primarstufe (vgl. WEBER 1987) ist für den Geometrieunterricht hervorzuheben:

1. Im Geometrieunterricht sollen die Kinder solche Kenntnisse hinsichtlich geometrischer Objekte, Relationen und Operationen erwerben, die in praktischen Zusammenhängen beim Aufsuchen, Beschreiben, genauen Bestimmen oder Darstellen von Sachverhalten in der Umwelt Anwendung finden oder die Voraussetzung für das Verständnis elementarer Zusammenhänge im weiteren Unterricht sind.
2. Der Geometrieunterricht soll bei den Kindern jene grundlegenden Fertigkeiten (etwa im Zeichnen, im Messen, im Lesen von Falt- oder Bauanleitungen usw.) entwickeln, die als sicher verfügbare „Unterprogramme“ beim Lösen inner- wie außergeometrischer, darunter insbesondere auch arithmetischer Aufgaben notwendig sind.
3. Im Geometrieunterricht sollen solche Fähigkeiten, Denk- und Arbeitsweisen sowie Gewohnheiten entwickelt werden, die für Tätigkeiten im Geometrieunterricht und die Auseinandersetzung des Kindes mit seiner Umwelt besonders wesentlich sind und die deshalb im Geometrieunterricht besonders effektiv gefördert werden können. Dazu gehören insbesondere:
 - Die Fähigkeit, Geometrisches aus umweltlichen Situation zu gewinnen und umgekehrt geometrische Sachverhalte auf die Umwelt zu beziehen, zu „geometrisieren“¹.
 - Die Fähigkeit, Geometrisches in umweltlichen Situationen zu entdecken (und damit Abstraktionen zu konkretisieren).
 - Die Fähigkeit zur Vorstellung geometrischer Objekte und Relationen nach Beschreibungen
 - Die Fähigkeit zur Analyse und Beschreibung geometrischer Objekte
 - Die Fähigkeit, von ebenen Darstellungen auf räumliche Objekte und deren Eigenschaften zu schließen
 - Die Fähigkeit zu sachbezogener Argumentation²
 - Die Fähigkeit zu kreativem Verhalten³
 - Die Gewohnheit zu planmäßigem Verhalten etwa beim Analysieren eines geometrischen Objekts, einer Skizze oder einer Zeichnung
4. Der Geometrieunterricht soll die Kinder zum Anwenden ihres geometrischen Wissens und Könnens befähigen. Sie sollen es lernen, insbesondere ihre Umwelt „mit den Augen der

¹ Das beinhaltet vor allem die Fähigkeit zur Analyse umweltlicher Situationen, zur Abstraktion von Unwesentlichem und zur Verallgemeinerung der geometrisch wesentlichen Seiten.

Eine wichtige Seite des Geometrisierens stellt die Ordnung der Realität unter vielfältigen Ordnungsaspekten dar, die letztlich zur Begriffsbildung führt. Mögliche Ordnungsaspekte sind hier Formen, Lagebeziehungen, Symmetrieeigenschaften und Muster.

² Als **argumentatives Verhalten** sehen wir wie WINTER et. al. (1978, S.10) an : Das Aufzeigen von Beispielen und Gegenbeispielen für einen Begriff, die Beschreibung eines Begriffs durch die Angabe charakteristischer Eigenschaften, das Ordnen von Begriffen, das Überprüfen von Behauptungen durch Messen, Zeichnen, experimentelles Hantieren oder auch durch plausible Überlegungen, die - mehr oder weniger verallgemeinernde und systematisierende - Wiedergabe von Beobachtungen.

³ Unter **kreativem Verhalten** verstehen wir in Anlehnung an STEINDORF (1991, S.66 ff.) und mit Blick auf DE BONO (1986) das Produzieren ungewöhnlicher Ideen, das Sehen neuer Beziehungen zwischen den Elementen einer Situation, das Erweitern des Rahmens der Problembearbeitung usw. Kreatives Verhalten zeigt sich beispielsweise beim Aufwerfen von Fragen und Vermutungen, beim zielgerichteten Experimentieren an Modellen, planmäßigen Abändern von Figuren oder Lagebeziehungen oder beim Herstellen von Zusammenhängen. Insbesondere ist auch das Zurückführen von neuen auf bereits gelöste Probleme eine für mathematisches Arbeiten typische Form kreativen Verhaltens.

Geometrie“ zu betrachten und zu beobachten⁴, geometrische Figuren und Zusammenhänge in der Umwelt zu erkennen⁵, gegebenenfalls merkmalsrelevante Eigenschaften mittels geeigneter praktisch - gegenständlicher Tätigkeiten zu prüfen und auf der Grundlage dieser Erkenntnisse die Umwelt vereinfacht unter Nutzung von Modellen, Zeichnungen oder Skizzen zu beschreiben und zu rekonstruieren⁶.

Wesentliche Fragen zur konkreten Unterrichtsarbeit sollten im Hinblick auf diese Funktion des Geometrieunterrichts entschieden werden. Das betrifft Fragen zur Auswahl und Wichtung von Zielen und Inhalten des Lehrganges ebenso wie Positionen zur konkreten didaktisch-methodischen Gestaltung einzelner Unterrichtssequenzen. Ob und mit welcher Intention der eine oder andere Inhalt im Geometrieunterricht behandelt wird, sollte wesentlich davon abhängen, welchen Beitrag er im Hinblick auf die oben genannte Grundfunktion des Geometrieunterrichts zu leisten vermag. Ebenso sollten daran die Entscheidung über den Einsatz einer konkreten Aufgabe⁷ und vor allem über die Art, wie mit ihr gearbeitet wird, ausgerichtet werden.

3 Zum derzeitigen Stand

Wer sich die vielfach (so beispielsweise in BESUDEN 1984, BESUDEN 1994, RADATZ/RICKMEYER 1991) genannten Argumente für die Auseinandersetzung der Kinder mit geometrischen Inhalten von Klasse 1 an näher anschaut, erkennt unschwer, wie einige dieser Begründungen implizit zugleich auf die Risiken hinweisen, dass eben diese Auseinandersetzung im Unterricht letztlich doch nicht oder zumindest nicht in der gewünschten Weise stattfindet:

Argument 1: Der Geometrieunterricht kann einen wesentlichen Beitrag zur Erschließung der Umwelt und der Lebenswirklichkeit des Schülers leisten.

Gewiss ist es möglich, Fragen wie beispielsweise die, warum Ziegelsteine und Waschpulverpäckchen quaderförmig sind, welches der kürzeste Weg über die Straße ist oder warum bei Kranauslegern und vielen Fachwerkhäusern Dreiecke erkennbar sind, mit geometrischem Wissen zu beantworten – gewiss aber auch ohne dieses. Fraglich ist zudem, ob Kinder auf alle diese Fragen wirklich eine Antwort suchen.

⁴ **Betrachten** und **Beobachten** sind wichtige Tätigkeiten, um dauerhafte und exakte Vorstellungen über die objektive Realität zu gewinnen, gegenseitige Bezüge herzustellen, Zusammenhänge zu erkennen, zu verstehen und zu werten.

Diese Tätigkeiten können nicht auf „Anschauen“ reduziert werden, sondern zeichnen sich darüber hinaus durch Planmäßigkeit, Systematik und höhere Genauigkeit aus und sind folglich wichtige Elemente der Erkenntnistätigkeit der Schüler.

Während **Betrachten** eine Zuwendung zu Gegenständen, Objekten und Erscheinungen im Zustand der Ruhe ist, verstehen wir unter **Beobachten** eine Zuwendung zu einem Vorgang, Verlauf, Prozess.

⁵ Hier spielt vor allem das Erkennen von Formen, Symmetrien und Lagebeziehungen eine Rolle.

⁶ Hier sei auch auf den Zusammenhang zwischen Rekonstruktion und Erkenntnis aus erkenntnistheoretischer Sicht verwiesen: Die Rekonstruktion der Wirklichkeit ist Mittel und Nachweis der Erkenntnis.

Entscheidend ist unseres Erachtens vor allem eine Unterrichtsgestaltung, die es dem Schüler erlaubt, entsprechendes Wissen aktiv selbst zu konstruieren. In diesem Sinne halten wir Probleme, welche die Kinder ansprechen und experimentelles Arbeiten herausfordern für geeigneter als manchen Sachverhalt mit Umweltbezug, aber ohne Bezug zur Lebenswirklichkeit der Kinder. Exemplarisch hier einige Beispiele⁸ für solche Probleme.

- Wer baut aus fünf A4 Blättern und etwas Leim die stabilste Brücke? Alle haben Zeit, allein oder in Gruppen zu experimentieren, systematisch zu probieren und die Konstruktion zu optimieren. Nach einigen Tagen wird hart getestet, dann erst werden auch die Profile der Brücken und deren Tragfähigkeit thematisiert.
- Ein Wagen wird gebaut. Als Räder sollen Bierfilze eingesetzt werden. Wie findet man den Punkt, an dem das Loch für die Achse gebohrt werden muss? Was geschieht, wenn die Achse nicht in der Mitte sitzt? Wer konstruiert einen „Schaukelwagen“, der sich beim Fahren abwechselnd vorn und hinten hebt und senkt? Bei wem hebt und senkt sich der Wagen abwechselnd rechts und links?
- Wer baut einen Flieger, der sich im Klassenraum möglichst lange in der Luft hält?
- Das weiße Schaf ist mit einer 2,50m langen Kette angepflockt. Das schwarze Schaf hat eine quadratische Koppel mit 4 m Seitenlänge als Weide. Welches Schaf hat die größere Weidefläche?

Argument 2 Viele Kinder haben bereits im Vorschulalter gelegt, gefaltet, geknetet, gebaut, ... und dabei geometrische Erfahrungen gesammelt. Geometrie ist damit ein wesentlicher Bereich, der sich zur Fortführung frühkindlicher Tätigkeiten anbietet und in dem sehr gut an vorschulische Erfahrungen angeknüpft werden kann.

Anknüpfen sollte hier vor allem ein Weiterentwickeln der betreffenden Tätigkeiten sein. Werden die Tätigkeiten nicht systematisch komplexer, werden sie nicht zum Ausgangspunkt geplanter und auf Aneignungsgegenstände gerichteter geistiger Aktivitäten, sind sie bald verzichtbar. Es darf nicht verwundern, wenn Kinder, die Jahr für Jahr immer wieder auf nahezu gleichem Niveau Muster fortsetzen, ebene Figuren spiegelbildlich ergänzen usw., Geometrie mit der Zeit nur als ein nettes Beiwerk ansehen.

Argument 3: Kinder im jüngeren Schulalter stehen der Geometrie aufgeschlossen gegenüber, weil sie hier häufig zu unmittelbarer praktischer Tätigkeit herausgefordert werden und dabei altersgerecht aneignen können.

Hierzu ist grundsätzlich hervorzuheben, dass das Ergebnis des Unterrichts wesentlich vom Lehrer und dessen konkreter Unterrichtsgestaltung abhängt. Die interessanteste Aufgabe, das

⁷ zum Begriff Aufgabe vgl. FANGHÄNEL 2000

⁸ Weitere interessante Fragen und Anregungen finden sich in LORENZ, J. H.: Kinder entdecken die Mathematik - Aspekte, Projekte und Problemaufgaben für ein Lernen im offenen Unterricht. - Braunschweig: Westermann, 1997

aufwendigste Unterrichtsmittel allein bewirkt wenig, ist noch längst kein Garant für den Unterrichtserfolg. Über diesen entscheidet wesentlich die Art und Weise des didaktisch-methodischen Einsatzes der Aufgabe bzw. des Unterrichtsmittels.

Exkurs 1: Äußere Handlung und geistige Tätigkeit

Die Liste der Befürworter eines handlungsorientierten Unterrichts ist lang. J. H. PESTALOZZI fordert Anschauung und die Möglichkeit, Handlungserfahrung zu sammeln. Friedrich FRÖBEL entwickelt seine *Spielgaben* und setzt sich dafür ein, den Kindern vom Kleinkindalter an *niveauvolle* Tätigkeiten zu ermöglichen. Er sieht das kindliche Spiel als Quelle erster Erkenntnisse, als einen persönlichkeitsformenden Prozess an und weist auf die Veränderung des Charakters der Tätigkeit von einer Tätigkeit um des Tuns willen hin zu einer auf das Resultat gerichteten Tätigkeit.⁹ P. J. GALPERIN betont in seiner Theorie der etappenweisen Ausbildung geistiger Handlungen die Rolle *geeigneter* äußerer Handlungen und für Jerome BRUNER ist die enaktive Ebene kein temporäres „Durchgangsstadium“ auf dem Weg zur symbolischen Ebene. Vielmehr soll der Lernende zum bewussten Enaktivieren befähigt werden, es als Mittel zur Überwindung von Schwierigkeiten beim Handlungsvollzug in der symbolischen oder ikonischen Ebene nutzen lernen.

Vor dem Hintergrund einer Vielzahl von Veröffentlichungen, die Aufgabenformate oder Unterrichtsmittel (Tangram, Geobrett usw.) zu konkreten Themenkreisen (etwa zur Symmetrie, zum Parkettieren, zu ebenen Figuren) vorstellen, beobachte ich immer wieder¹⁰ die Versuchung von Studenten wie Lehrern, die Kinder im Unterricht zu einem Themenkreis alle nur denkbaren äußeren Handlungen ausführen zu lassen. Offensichtlich besteht dabei nicht immer ausreichend Klarheit darüber, wie diese äußeren Handlungen die erwünschten Lernprozesse unterstützen können.

Der Effekt des Einsatzes einer praktisch-gegenständlichen Tätigkeit hängt prinzipiell davon ab, ob die Kinder damit zu geistiger Tätigkeit veranlasst werden und ob diese geistige Tätigkeit auf den Aneignungsgegenstand gerichtet ist. (Legen die Kinder beispielsweise Figuren aus Plättchen oder legen sie vorgegebene Figuren aus, versuchen sie hier eine Systematik zu finden, vergleichen sie deren Formen, die Größe ihrer Flächen usw.)

Unserer Ansicht nach werden die Kinder nicht selten zu wenig zu solchen auf den Aneignungsgegenstand gerichteten *geistigen* Tätigkeiten herausgefordert. Die Folge ist dann ein nur

⁹ Vgl. §§ 30, 36, 43, 45 in: F. Fröbel: Die Menscheenerziehung. - auszugsweise in: Die Lust an der Erkenntnis: Die Pädagogik der Moderne (Hrsg. v. H. Scheuerl). - München: Piper, 1992, S. 130ff.

¹⁰ Basis sind eigene Hospitationen, schulpraktische Übungen im Rahmen der Ausbildung von Grundschullehrern sowie Analysen von Praktikumsprotokollen

geschäftiges Hantieren der Kinder, denen der Unterricht zwar durchaus Spaß macht, die mit Eifer bei der Sache sind, allerdings am Ende der Unterrichtsstunde bzw. -einheit im Hinblick auf den Aneignungsgegenstand wenig erreicht haben.

So kann es beispielsweise vorkommen, dass die Kinder in zwei oder drei Unterrichtsstunden quaderförmige Schachteln zerschneiden, Quader mit buntem Papier bekleben (vielleicht die gegenüberliegenden Flächen jeweils in der gleichen Farbe) und noch vieles mehr. Werden dabei nicht die Flächen analysiert und die Kongruenz gegenüberliegender Flächen herausgearbeitet, ist es kaum verwunderlich, wenn Kinder die Herstellung farbige beklebter Kisten als das Wesentliche ansehen und eine oder zwei Wochen später kaum Kenntnisse über Merkmale des Quaders und seiner Flächen haben.

Ebenso wenig darf es verwundern, wenn ein Lehrer, der sich ja in der Regel auf praktisch-gegenständlichen Tätigkeiten überdurchschnittlich arbeits- und materialintensiv vorbereiten muss, nach einem derartigen Misserfolg ähnlichen Aktivitäten reserviert gegenübersteht, vielleicht entsprechende Ideen als für den „normalen Unterricht“ wenig brauchbar ansieht. (vgl. BACKE-NEUWALD 1998, S.4ff.)

Unseres Erachtens fehlt es in vielen Veröffentlichungen an konkreten Hinweisen zur Organisation geistiger Tätigkeiten. Derartige Hinweise könnten, so sie denn umgesetzt würden, wesentlich dazu beitragen, dass zu freudvollem Handeln der Kinder größere Fortschritte in der Beherrschung des Anzueignenden kommen. Erst wenn diese sichtbar sind, wird dem breiteren Einsatz von äußeren Handlungen der Weg geebnet.

Exkurs 2: Systematisches Sichern von Grundfertigkeiten und Gewohnheiten

Ein anderer Aspekt, der den Einsatz von praktisch-gegenständlichen Tätigkeiten im Geometrieunterricht gefährdet, ist der Zeitfaktor. Der Einsatz praktisch-gegenständlicher Tätigkeiten benötigt generell Zeit. Zeit zum Ausprobieren, Versuchen, Irren, Korrigieren usw.

In den ersten Schuljahren wird dieser Zeitbedarf dadurch deutlich vergrößert, dass zunächst eine Reihe von notwendigen Grundfertigkeiten und Gewohnheiten entwickelt werden müssen.

Je mehr der bewusste Vollzug der gewissermaßen als Unterprogramm genutzten Handlungen (etwa beim Falten, Schneiden, Skizzieren) in den Hintergrund tritt, desto besser kann sich der Lernende auf das eigentliche Problem konzentrieren, desto eher vermag er es entdeckend zu lösen.

Arbeitstechniken wie beispielsweise das Falten eines geraden Bruches oder eines rechten Winkels, das halbierende Falten eines rechteckigen Blattes (auch längs einer Diagonale!), das Schneiden auf einem Riss (d.h. auf einer vorgegebenen Linie), das Messen, Zeichnen und Skizzieren oder auch das Bauen mit Holz- und Steckwürfeln sollten deshalb von Klasse 1 an

im handwerklich-praktischen Sinne planmäßig gelehrt und über einen längeren Zeitraum hinweg perfektioniert werden.

Wir halten es für notwendig, gewissermaßen im Rahmen einer Leitlinie planmäßig und langfristig Arbeiten an derartigen Grundfertigkeiten und Gewohnheiten zu arbeiten.

Werden den Kindern beim Lösen einer Aufgabe hingegen ständig neue, ungeläufige Tätigkeiten als Teilhandlungen abverlangt, werden sie bei Darstellungen wie etwa in Faltanleitungen mit einer Vielzahl neuer, evtl. sogar wechselnder Konventionen konfrontiert, reduziert sich die äußere Handlung schnell auf ein Vormachen und Nachmachen mit dem Lehrer als überall gefragten Helfer. So sehr dann Lehrer wie Schüler beispielsweise eine Faltanleitung motiviert in Angriff nehmen, so frustriert erleben sie ihren Mißerfolg. Anschließend ist es gleichgültig, wie wertvoll das Falten nach einer Anleitung für die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens ist, wie oft es in Fachzeitschriften empfohlen wird. Weitere Faltanleitungen werden zumindest tendenziell kaum noch einmal probiert¹¹.

Exkurs 3: Sparsamkeit der Materialien statt einer Flut von Dingen

Jedes genutzte Unterrichtsmittel ist zunächst stets selbst Lerngegenstand. Die Kinder benötigen Zeit, um sich mit dem Material (etwa dem Geobrett, dem Tangram usw.) und etwaigen in den zugehörigen Aufgaben enthaltenen Konventionen (etwa den Darstellungsweisen bei Faltanleitungen oder bei Bauplänen zu Würfelgebäuden) vertraut zu machen. Sie benötigen außerdem Gelegenheit, ihr Handeln mit dem Material zu vervollkommen, teilweise zu automatisieren.

Es ist sinnvoll, vielfältige Aufgaben um ein und dasselbe Material¹² herum zu gruppieren, zu variieren, zu vertiefen und im Laufe der Zeit immer wieder im Sinne eines spiralförmigen Aufbaus aufzugreifen und weiterzuentwickeln, weil

- die notwendige Zeit für die Neueinführung des Materials nur einmal aufgewendet wird,
- die Kinder dabei lernen können, selbst Fragestellungen zu variieren (etwa zu erweitern oder einzuengen), Gegebenes und Gesuchtes zu vertauschen usw.,
- der Blick auf einen Sachverhalt geweitet wird, die Kinder an eine Sicht von verschiedenen Perspektiven und unter unterschiedlichen Fragestellungen gewöhnt werden und
- im Sinne differenzierenden Arbeitens die Schwierigkeit eingesetzter Aufgaben gesenkt oder entsprechend dem deep - end - Prinzip gesteigert werden kann.

Exkurs 4 Wertung von Lernprozessen

¹¹ Ich stütze die Aussage insbesondere zum Falten auf Erfahrungen aus unzähligen Fortbildungsveranstaltungen zum Schwerpunkt Geometrie.

¹² als Beispiel für ein derartiges Material vgl. etwa die von BESUDEN 1994 zu vielen Unterrichtsmitteln empfohlenen Aufgaben.

Leicht entsteht der Eindruck, dass Lernziele bei geometrischen, darunter insbesondere praktisch-gegenständlichen Tätigkeiten weitaus weniger exakt und präzise beschreibbar und damit nur aufwendiger kontrollierbar sind als etwa beim Einprägen von Begriffskenntnissen oder im Arithmetikteil. Daraus resultiert die Gefahr, dass Leistungsbewertungen und damit tendenziell der Geometrieunterricht insgesamt einseitig auf das *Resultat* der Lerntätigkeit¹³, insbesondere auf die Beherrschung von Begriffskenntnissen und auf Zeichenfertigkeiten ausgerichtet werden.

Weil der anzueignende Stoff vom Lernenden nicht als fertiges System aufgenommen werden kann, sondern aktiv konstruiert werden muss, kommt der Planung, Analyse und Wertung des *Verlaufs* der Lerntätigkeit entscheidende Bedeutung zu. Möglichkeiten für Lernprozesse in diesem Sinne sind gezielt zu schaffen und zu nutzen.

Gerade an praktisch-gegenständlichen Tätigkeiten können die Kinder demonstrieren, beschreiben, begründen usw. und so darstellen, inwieweit sie Methoden des Lösens geometrischer Aufgaben, des „Geometrisierens“ angeeignet haben und vor allem zur Lösung neuer Aufgaben anwenden können.

Eine zu starke Orientierung am Resultat (Wer hat welche Lösung? - Wer hat es richtig? - Wer hat es falsch?) lässt dagegen viele Möglichkeiten des Lernens anhand der Wertung des *Lösungsweges* ungenutzt: Die gemeinsame Rückschau auf verschiedene Wege, die klassenöffentliche Diskussion und Kennzeichnung günstiger und weniger günstiger Lösungswege, den Austausch von günstigen Lösungswegen (als Lernen miteinander und voneinander) und nicht zuletzt auch die Kennzeichnung von Lösungswegen, die ungünstig, nicht transferfähig usw. sind.

Schließlich: Längst wissen wir, dass ein Lernen auf Vorrat in der heutigen Zeit unmöglich ist, dass Kinder heute mehr als je zuvor zu künftigem lebenslangen Lernen *befähigt* werden müssen. Gerade zur Entwicklung dieser Fähigkeit müssen Wege des Lösens von Aufgaben und Methoden des Lernens generell thematisiert werden. Im Geometrieunterricht bieten sich dazu von Klasse 1 an viele hervorragende Gelegenheiten.¹⁴

¹³ Die Lerntätigkeit kann stets unter zwei Aspekten gesehen werden:

Unter dem Aspekt des Resultats interessieren wir uns für das Ergebnis. Im Prozess der Verfestigung und Generalisierung des Resultats der Lerntätigkeit entstehen beim Lernenden Kenntnisse.

Unter dem Aspekt des Verlaufes der Lerntätigkeit interessieren wir uns vorrangig für den Prozess des Lernens. Durch Verfestigung und Generalisierung des Verlaufs der Lerntätigkeit entwickelt der Lernende vor allem Fähigkeiten, aber auch Fertigkeiten, Gewohnheiten und Einstellungen.

¹⁴ Vgl. hierzu etwa die Beispiele in BLANCK/EICHLER 1999

Argument 4: Spielerische Elemente, ansprechende Knobelaufgaben und die anschauliche Präsentation geometrischer Probleme verlocken die Kinder immer wieder zur Beschäftigung mit geometrischen Inhalten.

Diese Aussage wird oft als Argument für den Geometrieunterricht genannt, zeigt zugleich aber eine ernste Gefahr: Geometrische Inhalte werden zu oft als ein „spielerisches Beiwerk“ angesehen, entsprechend als eine bunte Mischung relativ zusammenhangloser Aufgaben angeboten, und erscheinen den Kindern dann eher als eine recht interessante Abwechslung. Wie bewusst Kinder diesen Gegensatz erleben, zeigt sich beispielsweise dann, wenn sie die Wertigkeit eigener Noten kommentieren. Hier gibt es zuweilen einen Gegensatz zwischen der „richtigen“ Mathematiknote und der Zensur, die „nur“ in Geometrie erhalten wurde.

Argument 5: Der Unterrichtserfolg in Geometrie hängt meist nur von wenigen Vorkenntnissen und bereits ausgebildetem Können ab und ist so oft sicherer erreichbar als im Arithmetikunterricht. Anstrengungen in einer Unterrichtsstunde „lohnen“ sich damit für die Kinder deutlicher und vor allem schneller.

Derartige Aussagen sollen meist belegen, dass der Geometrieteil ein bei den Kindern beliebter Bestandteil des Mathematikunterrichts ist, in dem sich für viele Kinder Erfolge bereits nach geringer Zeit und Anstrengung einstellen.

So sehr das auch in vielen Fällen zutreffen mag, zeigt es gerade deshalb, wie groß das Risiko einer „Verinselung“, einer isolierten Betrachtung einzelner geometrischer Inhalte ist. Letztlich führt das dazu, dass einige Inhalte – weil weder untereinander noch in Beziehung zum Arithmetiklehrgang vernetzt und in eine Hierarchie eingebunden – schnell als verzichtbar angesehen und bei Bedarf weggelassen werden. Nur so ist es zu erklären, dass es Jahr für Jahr Grundschulklassen gibt, in denen ganze Kapitel insbesondere bei Stoff-Zeit-Problemen entfallen (vgl. dazu etwa BACKE-NEUWALD 1998, S.5).

Dieser Gefahr der Verinselung kann meines Erachtens nach nur mit einer *durchgängigen Verbindung von Arithmetik und Geometrie* begegnet werden. Möglichkeiten dazu gibt von Klasse 1 an viele, weil ja die Welt in der die Schüler leben, zunächst eine geometrische Welt ist, deren Gesetze im Mathematikunterricht aufgedeckt und *auch* arithmetisch beschrieben werden (vgl. LORENZ 1998). Werden Arithmetik und Geometrie stärker verbunden, werden etwa geometrische Aktivitäten gezielt als Ausgangspunkt für Arithmetische Fragestellungen genutzt, verlieren die geometrischen Inhalte den Schein der Beliebigkeit ihrer Auswahl und Anordnung: Wo beispielsweise verdoppelt wird, ergibt sich nahezu zwangsläufig die Frage

nach der Spiegelung. Nun verdoppeln die Kinder von Klasse 1 an, die Spiegelung hingegen wird geometrisch in der Regel erst in Klasse 2 thematisiert ...

Argument 6: Der Geometrieunterricht vermag die Denkentwicklung der Kinder in besonderer Weise zu fördern. Triebkraft der Denkentwicklung ist dabei die praktisch - gegenständliche Tätigkeit, die immer im dreidimensionalen Raum vollzogen wird.

„Geometrie, wenn sie als Erfassung des Raumes anfängt, ist aber eng verbunden mit einer Realität, an die man tagtäglich erinnert wird. Geometrie, so aufgefaßt, kann ein ausgezeichnetes Mittel sein, *beziehungshaltige Mathematik* zu lehren.“ (FREUDENTHAL, 1979, S.379; Hervorhebung hinzugefügt - K.E.)

Die Bedeutung des räumlichen Vorstellungsvermögens ist unumstritten:

- Menschliches Denken hängt sehr von der Fähigkeit zur Raumwahrnehmung und Raumvorstellung ab, zu deren Entwicklung der Geometrieunterricht in beträchtlichem Maße beizutragen vermag.
- Zur Bewältigung vieler Alltagsaufgaben, mit denen das Kind tagtäglich konfrontiert wird, ist räumliches Vorstellungsvermögen von Vorteil.
- Angesichts der Anforderungen nachfolgender Schulstufen und im berufsvorbereitenden Sinne ist die Entwicklung räumlichen Vorstellungsvermögens unverzichtbar. So wurde für eine erstaunlich große Anzahl von Berufsgruppen der Zusammenhang zwischen der Fähigkeit zur räumlichen Vorstellung und dem Berufserfolg¹⁵ nachgewiesen.
- Der Zusammenhang zwischen mangelhaftem räumlichen Vorstellungsvermögen und Rechenschwäche wurde mehrfach festgestellt (vgl. etwa LORENZ 1982).
- Als Resultat der Intelligenzforschung ist gesichert, dass die Fähigkeit zur räumlichen Vorstellung ein Primärfaktor der Intelligenz¹⁶ ist.

In mehreren Untersuchungen konnte nachgewiesen werden, dass das räumliche Vorstellungsvermögen gezielt entwickelt werden kann (ROST 1977; THIESEMANN 1991; MAIER 1994), wobei eine gezielte Förderung jüngeren und mittleren Schulalter besonders erfolgversprechend erscheint, da in diesem Zeitraum recht große Entwicklungsfortschritte möglich sind (BLOOM 1971).

Wegen all dieser Fakten ist die gezielte Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens im Mathematikunterricht der Primarstufe geboten.

Angesichts der vielfach bestehenden Stoff-Zeit-Probleme im Unterricht kann es nicht darum gehen, neben dem bestehenden Stoffkanon eine Fülle spezieller Aufgaben zur Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens anzusiedeln. Vielmehr halten wir es für sinnvoll und

¹⁵ vergleiche hierzu unter anderem ROST 1977, STURZEBECKER 1972;

¹⁶ Den Nachweis hierzu führte THURSTONE (1938). Ihm zufolge gibt es insgesamt sieben "primary mental abilities": Sprachliches Verständnis, Wortflüssigkeit, Rechengewandtheit, Auffassungsschnelligkeit, Raumvorstellung, Merkfähigkeit und logisches (schlussfolgerndes) Denken.

zeitökonomisch, solche Formen der Arbeit beispielsweise an arithmetischen Inhalten zu wählen, die zugleich das räumliche Vorstellungsvermögen fördern.

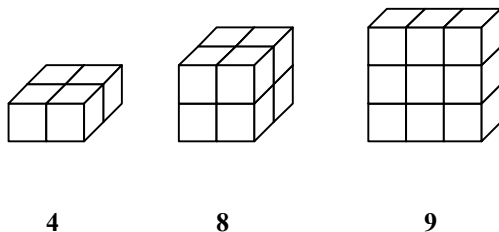
4 Verbinden von Arithmetik und Geometrie als Gestaltungsprinzip des Mathematikunterrichts – illustriert am Einsatz von Würfelbauwerken

Der Gedanke, räumliche Kompetenzen bei der Arbeit an arithmetischen Fragestellungen zu entwickeln, steht im Einklang mit der Forderung nach einer möglichst durchgängigen Verbindung von Arithmetik und Geometrie.

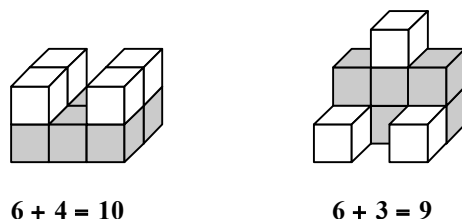
Das erfordert Veranschaulichungsmittel, die den Kindern die Gelegenheit zur Auseinandersetzung mit räumlichen Fragestellungen eröffnen. An vielen Stellen des arithmetischen Unterrichts ist es möglich, ebene Veranschaulichungsmittel wie Plättchen gegen Würfel einzutauschen. Würfel ermöglichen die Aneignung des Zahlbegriffs unter dem Kardinalzahl- wie auch dem Maßzahlaspekt und eignen sich zugleich zum Sammeln räumlicher Erfahrungen beim Veranschaulichen. Nicht zuletzt schließt die Arbeit mit Würfeln an Vorerfahrungen der Kinder bezüglich des Bauens an.

Bei der Aneignung arithmetischer Inhalte werden von den Kindern neben Abstraktionsleistungen auch hohe Vorstellungsleistungen erwartet. Besonders gefordert sind:

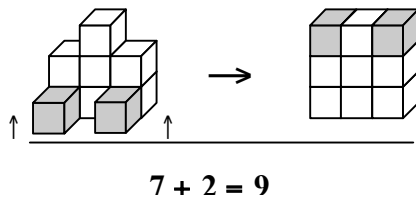
- die **Vorstellung von Objekten** beispielsweise
 - als Repräsentanten von Zahlen



- als Repräsentanten von Rechenoperationen (statisch)



- die **Vorstellung von Prozessen** beispielsweise
 - als Repräsentanten von Rechenoperationen (dynamisch)



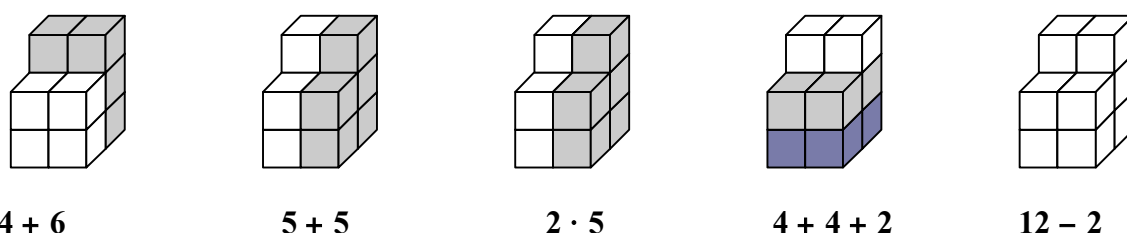
Vorstellungsleistungen sind nicht ohne vorherige Wahrnehmungen möglich, wobei das Vorzustellende nicht genau in dieser Weise schon einmal wahrgenommen worden sein muss. Es kommt vielmehr auf die Wahrnehmung von typischen Objekten und Prozessen an, die die wesentlichen Eigenschaften besitzen.

Hat ein Kind beispielsweise das Umordnen eines Würfelbauwerks zur leichteren Erfassung der Anzahl verwendeter Würfel entdeckt, kann es sich diesen Prozess mit hoher Wahrscheinlichkeit auch an anderen Bauwerken vorstellen:



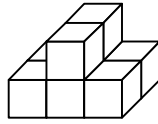
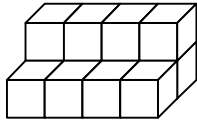
Um ebene Darstellungen von Würfelbauwerken lesen und interpretieren zu können, benötigen die Kinder räumliche Erfahrungen. Die Untersuchung realer dreidimensionaler Würfelbauwerke (Aufbau des Bauwerks, Umordnungen ...) ermöglicht den Kindern die Wahrnehmung von typischen Objekten und Prozessen. Deshalb sollten die Kinder immer wieder Gelegenheit haben, sich das zweidimensional dargestellte Würfelbauwerk durch konkretes Bauen mit Würfeln zu veranschaulichen. Nur so können sie die Einheit von ebener Darstellung und realem Bauwerk erleben und die oft noch bestehende Kluft zwischen der zum Bild aufgebauten eigenen Vorstellung und der räumlichen Wirklichkeit überwinden.

Ein zentraler Inhalt des mathematischen Anfangsunterrichts ist die Erarbeitung und Festigung von Rechenoperationen. Im Gegensatz zu den in vielen gängigen Lehrbüchern verbreiteten Darstellungen, bei denen die Kinder oft zu jedem Bild die Zuordnung genau einer Aufgabe erleben, ermöglichen Würfelbauwerke verschiedene Sichtweisen, gibt es entsprechend mehrere Aufgaben:

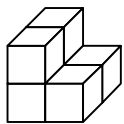


In einer Untersuchung haben wir Kindern erster Klassen Abbildungen von Würfelbauwerken vorgelegt, die verschiedene Sichtweisen zulassen, um herauszufinden, welche der Sichtweisen (horizontal, vertikal oder sagittal) die Kinder bevorzugen.

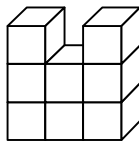
Im ersten Teil der Untersuchung waren zweidimensionale Darstellungen von Bauwerken vorgegeben, zu denen die Kinder eine Aufgabe nennen und zeigen sollten.



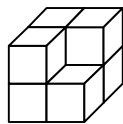
Im zweiten Teil war jeweils das Bild eines Würfelbauwerkes zusammen mit einer Aufgabe vorgegeben. Die Kinder sollten erklären, wie man am Bauwerk diese Aufgabe sehen kann. Hierbei spielte die Frage eine Rolle, inwieweit sich Kinder in die Denk- und Sichtweise anderer Menschen hineinversetzen können, eine für Partnerarbeit wesentliche Fähigkeit.



$$4 + 2$$

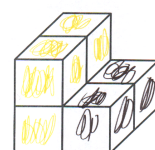
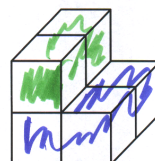
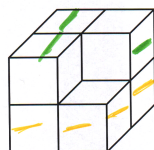
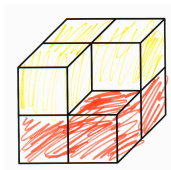


$$9 - 1$$

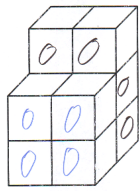


$$4 + 3$$

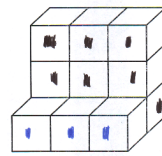
Die Aussagen und Zeichnungen der Kinder liefern ein annähernd einheitliches Bild: So werden die Sichtweisen „unten-oben“ (horizontal) und „links-rechts“ (vertikal) von fast allen Kindern wahrgenommen, obwohl etwa zur Aufgabe $4 + 3$ auch die Sichtweise "vorn-hinten" (sagittal) möglich gewesen wären:



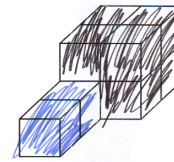
Eine Orientierung der Kinder, auch Saggitaltrennungen zu berücksichtigen ist nach unserer Erfahrung vor allem mit solchen Bauwerken möglich, die in der Sichtweise „vorn-hinten“ jeweils in Figuren mit einer „gute Gestalt“ (z.B. "Vierer", "Sechser", "Achter", "Neuner") zerlegt werden können.



$$4 + 6$$

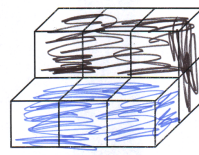
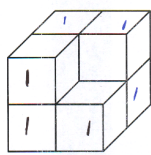


$$9 + 3$$

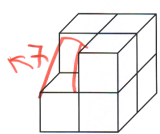


$$8 + 2$$

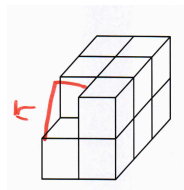
Im Gegensatz zu allen anderen Kindern, die in den folgenden Abbildungen die Aufgaben „4 + 3“ und „6 + 3“ in der Sichtweise „links-rechts“ bzw. „unten- oben“ wahrgenommen hatten, zeigten viele Kinder, die zunächst eine Reihe von Aufgaben in der speziellen Sichtweise „vorn - hinten“ bearbeitet hatten, die Aufgaben „4 + 3“ und „6 + 3“ *auch* in dieser Sichtweise.



Werden zum Bild eines Würfelbauwerkes Subtraktionsaufgaben vorgegeben, erfordert deren Interpretation durch die Kinder die Fähigkeit, sich einen Prozess vorzustellen:



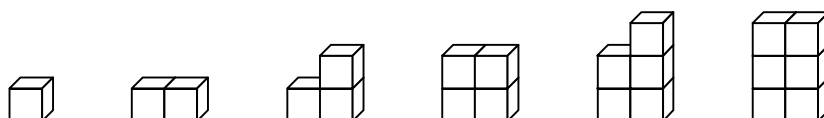
$$8 - 1$$



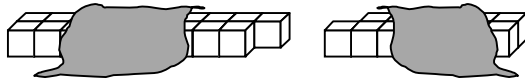
$$12 - 1$$

Bei der Arbeit mit all diesen Aufgaben war es uns wichtig, dass die Terme zunächst nur interpretiert, nicht aber vordergründig deren Werte ausgerechnet wurden. Wir halten es für die Entwicklung des Operationsverständnisses für wichtig, mögliche Konkretisierungen zu diesen Abstrakta zu finden. Dagegen erlebten wir immer wieder Kinder, für die ein Term lediglich ein Reiz ist, auf den man im „Regelspiel Unterricht“ derart reagieren muss, dass man ihm möglichst schnell seinen Wert zuordnet.

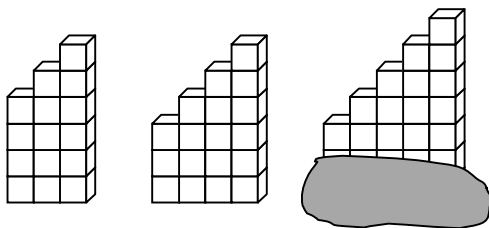
Neben der Veranschaulichung von Zahlen und Operationen bieten sich Würfelbauwerke geradezu an, Zahlbeziehungen zu verdeutlichen. Gerade Zahlen und ungerade Zahlen beispielsweise werden, mit Zweiertürmen veranschaulicht, für die Kinder schnell und vor allem ihrem Wesen nach sofort sichtbar:



Ebenso gut kann konkret und auch verallgemeinernd verdeutlicht werden, warum die Summe zweier ungerader Zahlen gerade, die Summe aus einer geraden und einer ungeraden Zahl ungerade ist usw.

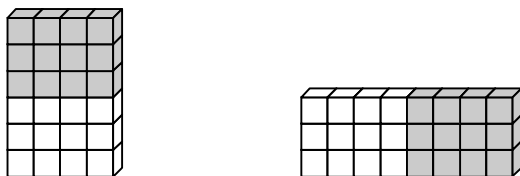


Auch Aussagen zu den Summen aufeinanderfolgender Zahlen werden durch Umordnen sichtbar. Warum ist die Summe dreier aufeinanderfolgender Zahlen durch 3 teilbar, die Summe von 5 aufeinanderfolgenden Zahlen durch 5 teilbar, aber die Summe von 4 aufeinanderfolgenden Zahlen nicht durch 4 teilbar?



Warum klappt das gegensinnige Verändern beim Multiplizieren, kann beispielsweise bei der Aufgabe $25 \cdot 36$ auch $100 \cdot 9$ gerechnet werden, warum kann Faktor verdoppelt (vervieracht, ...) werden, wenn dafür der andere halbiert (geviertelt, ...) wird?

Nicht selten erfahren die Kinder diesen Fakt im Unterricht als „Expertenwissen“ des Lehrers, welches sie vielleicht an einigen Beispielen nachrechnen und dann akzeptieren. Wenn der Lernende hingegen sein Wissen selbst konstruieren soll, ist es nur konsequent, dass die betreffenden Multiplikationsaufgaben durch (beispielsweise mit Würfeln ausgelegte) Rechtecke verdeutlicht werden. Durch Zerlegen und Zusammensetzen kann der Lernende erkennen, wie aus einer Würfelkonfiguration eine andere wird, die eine gleich große Fläche bedeckt.



Halb so hoch ist doppelt so breit

Der Weg zu Verallgemeinerungen wird geöffnet, wenn die kardinale Betrachtung der Anzahl der Würfel zu Gunsten einer maßzahligen Betrachtung etwa an gezeichneten Rechtecken in den Hintergrund tritt: Die Schüleräußerung „Halb so hoch ist doppelt so breit – dann macht ein viertel Höhe die vierfache Breite“ zeugt davon, dass die beabsichtigten Lernprozesse stattfanden.

5 Schlussbetrachtungen

Fortschritte hinsichtlich der Gestaltung des Geometrieunterrichtes und seiner Ergebnisse wird es nur dann geben, wenn

- in breiter Front praktisch – gegenständliche Tätigkeiten lernzielorientiert und mit Forderungen zur Geistigen Tätigkeit verbunden eingesetzt werden,
- die geometrischen Aktivitäten gezielt als Ausgangspunkt für arithmetische Fragestellungen und Erkenntnisse genutzt werden,
- umgekehrt arithmetische Fragestellungen als Ausgangspunkt für geometrische Aktivitäten genutzt werden,
- dazu Grundfertigkeiten auch im handwerklich-praktischen Sinne von Klasse 1 bis 4 systematisch entwickelt werden und nicht zuletzt
- auch der Geometrieteil von Klasse 1 bis 4 systematischer aufgebaut und als Bestandteil des Geometrieunterrichts von Klasse 1 bis 12 oder 13 insgesamt angesehen wird. Hier sind unseres Erachtens Konsequenzen für den Unterricht ab Klasse 5 unerlässlich.¹⁷

Literatur

- BACKE-NEUWALD, D.: Über den Geometrieunterricht in der Grundschule. – In: Mathematische Unterrichtspraxis 19(1998)I.- S. 1 – 12
- BAUERSFELD, H.: Drei Gründe Geometrisches Denken in der Grundschule zu fördern. – In: Beiträge zum Mathematikunterricht, Verlag Franzbecker, Hildesheim 1992, S.7-34
- BESUDEN, H.: Knoten, Würfel, Ornamente - Stuttgart: Klett, 1984
- BESUDEN, H.: Handbuch mit Handlungsanweisungen für die Verwendung von Arbeitsmitteln im Geometrieunterricht der Grundschule/Orientierungsstufe. – Oldenburg, 1994
- BLANCK, S. / EICHLER, K.-P.: Die Verbindung von Arithmetik und Geometrie – Chance für einen kindorientierten Unterricht. – In: Grundschulunterricht 46(1999)4
- BLOOM, B. S.: Stabilität und Veränderung menschlicher Merkmale. – Basel/Berlin/Weinheim, 1971
- DE BONO, E.: Denkschule. - Landsberg am Lech: mvg, 1986
- FANGHÄNEL, G.: Arbeiten mit Aufgaben – ein wesentliches Mittel zur Gestaltung eines modernen Mathematikunterrichts. – In: Mathematikunterricht gestalten. – Berlin: Paetec 2000
- FREUDENTHAL, H.: Mathematik als pädagogische Aufgabe. - Stuttgart: Klett, 1979

¹⁷ Es ist ein unbefriedigender Zustand, dass von den Lehrplanforderungen her in vielen Bundesländern die veränderten Voraussetzungen nicht berücksichtigt werden. Hinsichtlich der Unterrichtsgestaltung ist es wünschenswert, wenn in den vorhergehenden Schuljahren entwickelte Arbeitsweisen wie etwa experimentelles Arbeiten aufgegriffen werden.

- LORENZ, J. H.: Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht – mentales visuelles Operieren und Rechenleistung. – Göttingen: Hogrefe 1992
- LORENZ, J. H.: Wir leben in einer geometrischen Welt. – In: Praxis Schule 5 – 10. – (1994) 1, S. 6
- LORENZ, J. H.: Kinder entdecken die Mathematik. – Braunschweig. Westermann, 1997
- LÜDTKE, S.: Strategien der Erfassung von Würfelbauwerke – dargestellt am Beispiel der Klasse 1. – Hausarbeit im Rahmen der ersten Staatsprüfung für das Lehramt an Grund- und Hauptschulen. – Rostock: Universität, 1999
- LÜDTKE, S. / EICHLER, K.-P.: Würfelbauwerke im Mathematikunterricht der Klassen 1 und 2. Rostock: 2000. – (Forschungsbericht)
- MAIER, P. H.: Räumliches Vorstellungsvermögen – Komponenten, geschlechtsspezifische Differenzen, Relevanz, Entwicklung und Realisierung in der Realschule. – Frankfurt/Main: Verlag Peter Lang, 1994
- RADATZ, H. / RICKMEYER, K.: Handbuch für den Geometrieunterricht an Grundschulen. – Hannover: Schroedel, 1991
- ROST, D.: Raumvorstellung. Psychologische und pädagogische Aspekte. Beltz, Weinheim 1977
- STEINDORF: Grundbegriffe des Lehrens und Lernens. - Bad Heilbrunn: Klinkhardt, 1991
- STURZEBECHER, K.: Raumvorstellung - ein bedeutender Intelligenzfaktor in der Schule - In: Die Deutsche Schule. - Stuttgart, 1972;
- THIESEMANN, F. H.: Ein informeller Test zur Raumanschauung. Entwicklung, Erprobung und Ergebnisse. – In: Praxis der Mathematik 33(1991)5, S. 215-220
- THIESEMANN, F. H.: Zum Training der Raumvorstellungsfähigkeit. – In: Mathematische Unterrichtspraxis 12(1991)2, S. 35-48
- WEBER, K.: Ziel, Inhalt und Prozeßkonzeption des Mathematikunterrichts nach den neuen Lehrplänen der Klassen 1 bis 3. - In: Unterstufe. - Berlin 34(1987)4. - S.65-78
- WINTER, H.: Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. – Braunschweig: Vieweg, 1989