

Arne Pöhls-Stöwesand

Mit Strategien muss man rechnen

Den flexiblen Einsatz verschiedener Rechenstrategien anbahnen

Rechnen soll unter Ausnutzung und Anwendung von Rechengesetzten, Mustern und Strukturen stattfinden. Wir müssen halbschriftlich Rechnen, flexibel, sicher, geschickt und auch noch strategisch. Diese fünf Termini findet man in der Diskussion, die den Prozess des Rechnenlernens in der Primarstufe beschreiben.

Die oben erwähnten fünf Termini rücken jeweils eine didaktische Ausrichtung des Rechnens in den Vordergrund, sind aber eng miteinander verbunden:

Halbschriftliches Rechnen

Der Begriff bezieht sich auf die Notationsform und steht in Abgrenzung zu den anderen drei Rechentypen der Grundschule: Kopfrechnen, schriftliches Rechnen und Rechnen mit dem Taschenrechner. Für den Rechenweg notwendige Rechenschritte und Teilergebnisse können notiert werden.

Flexibles Rechnen

Kinder wechseln aufgaben-adäquat, je nach vorliegendem Zahlenmaterial ihren Rechenweg. Es spielt besonders nach der Einführung von schriftlichen Rechenverfahren eine Rolle: Muss ich die Aufgabe schriftlich rechnen oder schaffe ich sie auch schnell im Kopf? (vgl. Selter 1999, Rathgeb-Schnierer 2006)

Sicher Rechnen

Ein sicherer Rechner kommt zu einem richtigen Ergebnis. Neben einem korrekten Ergebnis, bedarf ein sicherer Rechner aber auch einer ge-

wissen Geläufigkeit und Zügigkeit. Dazu muss mehr als das Abspulen von Verfahren gezeigt werden. Beziehungswissen zwischen Zahlen und Aufgaben muss automatisiert sein. (vgl. Gaidoschik 2014). Auswendig gewusste Basisfakten werden in Rechenwege eingebunden (vgl. Rathgeb-Schnierer 2006).

Geschickt Rechnen

Geschickte Rechner nutzen Rechen Vorteile aufgrund des vorliegenden Zahlenmaterials. Häufig wird bei Aufgaben mit mehr als zwei Rechenzahlen von Kindern gefordert: „Rechne geschickt!“

Strategisch Rechnen

Kinder erkennen Strategien als Muster zum Lösen ganzer Klassen von Aufgaben.

Offensichtlich sind diese Ausrichtungen nicht überschneidungsfrei. Im Gegenteil: Ein flexibler Rechner rechnet auch sicher, geschickt und strategisch. Die Schülerinnen und Schüler folgen beim halbschriftlichen Rechnen nicht starr vorgegebenen Wegen, sondern gehen flexibel in Anpassung an die speziellen Zahlen bei

der jeweiligen Aufgabe strategisch und geschickt vor.

Warum also strategisch Rechnen?

Die Argumente für halbschriftliche Rechenstrategien sind vielfältig. Zwei zentrale Argumente sind die Förderung tragfähiger Zahlvorstellungen und die Alltagsnähe.

Strategisches Rechnen fördert Zahlvorstellungen. Bevor in einem neuen Zahlenraum gerechnet wird, erfolgt eine verständige Erkundung und operative Durcharbeitung des Zahlenraums. Kinder sollen dabei Einblick in das Stellenwertsystem erlangen und tragfähige Zahl- und Größenvorstellungen aufbauen. Sie entdecken, dass Zahlen nicht alleine für sich stehen, sondern dass sie stets in Relation zu anderen Zahlen stehen: Zahlen haben Nachbarn, Zerlegungen, Hälften, Verdopplungen, Nachbar-Stellenwerte u. v. a. m. Nach der Eroberung des neuen Zahlenraums ist ein strategisches Rechnen die logische Konsequenz. Strategisches Rechnen fußt konsequent

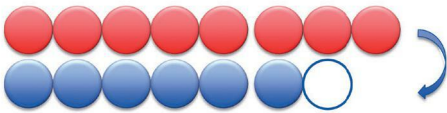


Abb. 1: Konstanzsatz der Addition mit Wendepfättchen: Wendet und verschiebt man ein rotes Pfättchen auf den blauen Platz, bleibt die Summe konstant.



Abb. 2: Konstanzsatz der Subtraktion mit Dienes-Material: $22 - 18$ ist als Abstand der blauen Reihen gedeutet. Kommen (rote) Würfel oder Stangen gleichmäßig hinzu, ändert sich der Abstand nicht.

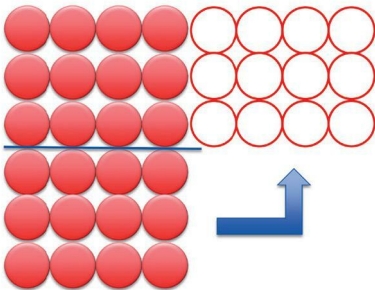


Abb. 3: Konstanzsatz der Multiplikation mit Rechteckfeldern: $6 \cdot 4 = 3 \cdot 8$. Durch die Linie ist ein Faktor halbiert. Wird das untere Feld verschoben, wird die Verdopplung des anderen Faktors sichtbar.

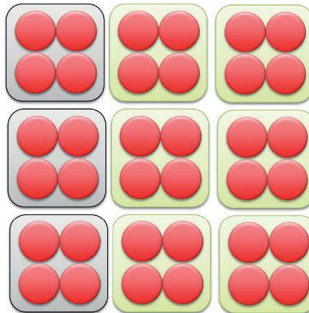


Abb. 4: Konstanzsatz der Division mit Wendepfättchen: 36 Äpfel sind auf 9 Teller verteilt. Auf jedem sind vier. Wenn ich nur ein Drittel an Tellern nutze, brauche ich auch nur ein Drittel an Äpfeln.

auf dem Wissen über Zahlen und ihren Beziehungen zueinander. Würde ein rezepthafter Rechenunterricht folgen, hätten die Kinder kaum eine unterrichtliche Möglichkeit, ihr Wissen über Zahlbeziehungen im neuen Zahlbereich zu verankern und zu vertiefen. Rechnen darf nicht abgelöst von der vorangegangenen Phase der Zahlenraumerweiterung stattfinden. Zahlvorstellungen können sich erst dann als tragfähig erweisen, wenn sie in darauffolgenden Unterricht abgerufen werden. Es würde an eine Verschwendung von Unterrichtszeit grenzen, wenn Kinder dazu keine Gelegenheit geboten bekämen. Nur in einem Rechenunterricht, der sich an Strategien orientiert ist dies gewährleistet.

Das schriftliche Rechnen beruht auf Algorithmen in denen Ziffern manipuliert werden, um zum richtigen Ergebnis zu gelangen. Zahlen-Rechnen statt unverstandener Ziffernmanipulation steht beim strategischen Rechnen im Vordergrund. Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems sowie eine Förderung tragfähiger Zahl- und Größenvorstellungen wird gefordert und gefördert.

Strategisches Rechnen ist alltagstauglich. Im Erwachsenenleben werden sich unsere ehemaligen Grundschüler vielfach vor Situationen sehen, in denen gerechnet wird. In Alltags- oder beruflichen Situationen, in denen das Ergebnis einer Rechnung genau bestimmt werden muss und wenn dazu dessen Richtigkeit auch noch eine besondere Relevanz hat, wird man auf elektronische Hilfen zurückgreifen – besonders wenn das Zahlenmaterial unübersichtlich ist. Müssen wir dann noch lernen, wie man rechnet? Ja! Denn hochgradig alltagsrelevant ist das Rechnen in der Welt der ungenauen Mathematik. Wo Abschätzen verlangt wird, sind halbschriftliche Methoden den schriftlichen Algorithmen überlegen, weil sie auf ganzheitlichen Zahlvorstellungen beruhen – nicht auf bloßen Ziffernmanipulationen. Abschätzendes Rechnen – also ein überschlägiges Rechnen mit sinnvoll gerundeten Zahlen oder mit situationsgerecht vereinfachten Rechnungen – erfordert strategisches Verhalten. Dieses abschätzende Alltagsrechnen basiert auf Zahlvorstellungen und geschickten Denkprozessen, die den Rechenstrategien inne liegen.

Beim halbschriftlichen Rechnen benutzen die Lernenden eigene individuelle Wege und gelangen so konstruktiv und selbstständig zu einer Lösung – insbesondere auch durch Rückgriff auf ihre Vorerfahrungen. Die Wahl der Vorgehensweise wird hierbei nicht nur durch die Aufgabenstruktur und den Aufgabenkontext, sondern auch durch persönliche Erfahrungen beeinflusst. Halbschriftliche Strategien können dem Kind anschaulich vor Augen führen, „dass es im Zahlenreich Gesetzmäßigkeiten und ‚Muster‘ gibt, und öffnen damit den Blick für eine fundamentale Idee der Arithmetik. Dieser Aspekt ist für die Grundschule besonders wichtig, weil der Unterricht hier traditionell in der Gefahr steht, die Mathematik als System von Fakten und Rezepten für bestimmte Aufgabentypen erscheinen zu lassen“ (Wittmann/Müller 1990).

Mathematischer Hintergrund

Nur fünf mathematische Gesetze bilden die Grundlage für alle Rechenstrategien.

Strategie	Im 20er-Raum	Im 100er-Raum	Darüber hinaus
Rückgriff auf Verdopplungsaufgaben: Fastverdoppeln	$6+7$ $6+6+1$	$25+27$ $25+25+2$	$250+270$ $250+250+20$
	$13-6$ $12-6+1$	$50-26$ $50-25-1$	$500-251$ $500-250-1$
Hilfsaufgabe	$7+9$ $7+10-1$	$57+28$ $57+30-2$	$457+228$ $457+230-2$
	$17-9$ $17-10+1$	$57-28$ $57-30+2$	$570-280$ $570-300+20$
Vereinfachen durch gegensinniges/ gleichsinniges Verändern	$9+6$ $10+5$	$58+25$ $60+23$	$458+225$ $460+223$
	$13-9$ $14-10$	$63-28$ $65-30$	$630-280$ $650-300$
Analogien	$14+3$ $4+3$	$74+3$ $4+3$	$7004+3$ $4+3$
	$18-5$ $8-5$	$80-50$ $8-5$	$8000-5000$ $8-5$
Zerlegen: schrittweise der zweiten Rechenzahl oder mit der Kraft der 5	$7+6$ $7+3+3$	$37+26$ $37+20+6$	$437+226$ $437+200+20+6$
	$13-7$ $13-3-4$	$53-27$ $53-20-7$	$453-227$ $453-200-20-7$
Stellenwerte extra	Ist im 20er-Raum nicht von Schrittweise zu unterscheiden	$34+48$ $30+40$ $4+8$	$434+248$ $400+200$ $30+40$ $4+8$
		$74-38$ $70-30$ $4-8$	$474-238$ $400-200$ $70-30$ $4-8$
Ergänzen statt Abziehen	$19-15$ $15+ _ = 19$	$62-58$ $58+ _ = 62$	$602-258$ $258+ _ = 602$

jeweiligen Operation auf ihrer Jahrgangsstufe, sondern ergeben sich aus vorher gefestigten Strategien. Geschickte Rechner erkennen im höheren Zahlenraum mehr Einsatzmöglichkeiten für ihre bekannten Strategien. Je mehr Stellenwerte die Rechenzahlen aufweisen, desto mehr Möglichkeiten gibt es, die Strategie zu nutzen. Dazu kommt, dass Strategien beliebig miteinander kombiniert werden können. Wittmann hat den Begriff der Haupt-Strategie eingebracht. Für jede der vier Grundoperationen nennt er vier Haupt-Strategien, für die Subtraktion sogar fünf. In Schulbüchern und didaktischen Lehrwerken findet man Darstellungen dieser vier bzw. fünf Strategien. Die Beispiele, die die Haupt-Strategien illustrieren, werden oft als besonders schlanke und ökonomische Notationen angegeben. Dennoch sind Mischformen unbedingt zu fördern.

Darstellungen und Anschauungen für alle

Es darf nicht das Missverständnis aufkommen, dass die Notation gleichzusetzen ist mit der Strategie. „So darfst du das nicht schreiben. Du musst erst die Zehner schreiben“, sagt Yagmurs in der dritten Klasse, als ein Mitschüler ihren Rechenweg erprobt. Viel wichtiger als die Notationsform ist, dass die Kinder erkennen, welche mathematische Idee der Strategie zugrunde liegt. Die Notation soll ein Hilfsmittel für das Kind sein, damit es später auf gleichem Wege im Kopf rechnen kann.

Für fortgeschrittene Rechner ist die Notation von Rechenwegen nicht mehr unter dem Blickpunkt der Ökonomie und der Vereinfachung zu rechtfertigen. Oftmals dauert es viel länger, eine Notation zu verschriftlichen, als es braucht, ein Ergebnis mit der jeweiligen Strategie zu ermitteln. Die Notation dient dazu, die Strategie für Lehrkräfte und andere Lernende sichtbar werden zu lassen.

Abb. 5:
Grundlegende
Rechenstrategien
zur Addition und
Subtraktion

- **Das Kommutativgesetz** oder Vertauschungsgesetz für die Addition und für die Multiplikation:
 $a+b=b+a$ und $a \cdot b=b \cdot a$
- **Das Assoziativgesetz** oder Verbindungsgesetz für die Addition und für die Multiplikation:
 $(a+b)+c=a+(b+c)$ und
 $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$
- **Das Distributivgesetz** oder Verteilungsgesetz der Multiplikation bezüglich der Addition:
 $a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$

Aus diesen vier Gesetzen leiten sich die vier Konstanzsätze unserer Rechenoperationen ab (Abb. 1–4). Ein Konstanzsatz beschreibt, wie die beiden Rechenzahlen bei einer Operation verändert werden müssen, damit das Ergebnis gleich, also konstant, bleibt.

Es ist schon erstaunlich, dass so wenig Gesetze so viele Rechenwege zulassen. Zu diesen Gesetzen und zu den Konstanzsätzen müssen Kinder Erfahrung sammeln (vgl. Schulz 2018 in diesem Heft, S. 4–7). Doch das allein reicht nicht aus, damit Kinder Strategien nutzen können. Kinder brauchen Kenntnis von der Größe von Zahlen und von der Beziehung der Zahlen zueinander, damit sie einen Rechenweg strategisch einsetzen können. Schulz (ebd.) spricht dabei von mentalen Werkzeugen.

Welche Strategie?

Strategien entwickeln sich über die vier Schuljahre weiter. (Siehe Tabellen) Sie sind kein neuer Lernstoff der

Die Darstellung von Rechenwegen ist eine Anforderung für alle Kinder im Mathematikunterricht der Grundschule, die immer wieder eingefordert gehört.

Die Notation darf nicht die einzige Darstellung sein, die Kinder kennen lernen und nutzen, um ihre Rechenwege anderen zugänglich zu machen. In der Erarbeitung spielen Arbeitsmittel eine wichtige und grundlegende Rolle. Wendeplättchen, Dienes-Material oder der Rechenstrich dürfen nicht nur als Hilfsmittel zum Ausrechnen – also als Lösungshilfen – eingeführt werden. Sie dienen zum Erarbeiten von Strategien ebenso wie zum Darstellen von Denkwegen. Darum sind diese Arbeitsmittel auch für alle Kinder da. „Wer die Aufgabe nicht im Kopf kann, nimmt das Material!“ Ein solcher Umgang mit Arbeitsmittel kann nicht nur stigmatisierend sein, sondern er nimmt dem Material auch seine Lernchancen. Mit ihm kann man nicht nur das Ausrechnen lernen, sondern auch die Gesetzmäßigkeiten darstellen, die den Strategien zugrunde liegen. Lehrkräfte müssen in der Lage sein, beispielsweise die Konstanzsätze mit Material zu beweisen. Dann haben sie die Voraussetzung, ihre Lernenden dabei zu begleiten, dass sie die Konstanzsätze und deren strategischen Wert selbst entdecken. Wenn es üblich ist, dass alle Kinder im Lauf des Lernprozesses immer wieder Material zu nutzen, um Rechenwege und Gesetzmäßigkeiten darzustellen, können langsamere Lerner auch später noch grundlegende Entdeckungen machen.

Welche Strategie wofür?

Verschiedene Literaturquellen listen verschiedene Rechenstrategien zur Addition/Subtraktion (vgl. Abb. 5) sowie zur Multiplikation/Division (vgl. Abb. 6) auf.

„Ziel des Unterrichts kann es nicht sein, dass die Schüler sämtliche der

Strategie	Grundaufgaben – Einmaleins und Einsdurchs	Weiterführende Aufgaben												
Wiederholt addieren und subtrahieren	$5 \cdot 7$ $7 + 7 + 7 + 7 + 7$ $20 : 4$ $20 - 4 - 4 - \dots$	$3 \cdot 125$ $125 + 125 + 125$ $75 : 15$ $75 - 15 - 15 - \dots$												
Verdoppeln und halbieren (auch mehrfach)	$8 \cdot 7$ $(4 \cdot 7) \cdot 2$ $48 : 6$ $(24 : 6) \cdot 2$	$5 \cdot 48$ $(10 \cdot 48) : 2$ $80 : 5$ $(40 : 5) \cdot 2$												
Zehner-, Hunderter-, Tausenderanalogien nutzen		$80 \cdot 400$ $8 \cdot 4$ $2400 : 60$ $24 : 6$												
Gegensinnig und gleichsinnig verändern	$4 \cdot 5$ $2 \cdot 10$ $36 : 9$ $12 : 3$	$4 \cdot 35$ $2 \cdot 70$ $396 : 9$ $132 : 3$												
Zerlegen und schrittweise rechnen (Nachbaraufgaben, Kraft der Fünf, Stufenzahlen)	$6 \cdot 7$ $6 \cdot 5 + 6 \cdot 2$ $48 : 8$ $40 : 8 + 8 : 8$	$24 \cdot 16$ $20 \cdot 16 + 4 \cdot 6$ $156 : 6$ $120 : 6 + 36 : 6$												
Hilfsaufgaben nutzen	$8 \cdot 7$ $10 \cdot 7 - 2 \cdot 7$ $54 : 6$ $60 : 6 - 6 : 6$	$4 \cdot 48$ $4 \cdot 50 - 4 \cdot 2$ $285 : 5$ $300 : 5 - 15 : 5$												
Umkehroperation nutzen: Wie oft passt ... in ...?	$28 : 4$ $\underline{\quad} \cdot 4 = 28$	$165 : 15$ $\underline{\quad} \cdot 15 = 165$												
Malkreuz: Darstellung zum vollständigen Zerlegen in Stufenzahlen		$14 \cdot 26$ <table><tr><td>·</td><td>20</td><td>6</td><td></td></tr><tr><td>10</td><td>200</td><td>60</td><td>260</td></tr><tr><td>4</td><td>80</td><td>25</td><td>104</td></tr></table> 364	·	20	6		10	200	60	260	4	80	25	104
·	20	6												
10	200	60	260											
4	80	25	104											

o.g. Strategien fließend beherrschen. Die Schüler sollen vielmehr lernen, dieses Angebot nach ihren eigenen Möglichkeiten und Vorlieben zu nutzen. Der Nachdruck der Übungen liegt dabei auf der bewußten Nutzung von Strategien und der Diskussion über die entsprechend unterschiedlichen Rechenwege“ (Wittmann; Müller 1992).

Literatur

Gaidoschik, M.: Automatisieren von Beziehungswissen. Wie wir Kinder unterstützen können, das Einspluseins im Langzeitgedächtnis zu speichern. In: Die Grundschulzeitschrift, Heft 280/2014, S. 38–41.

Rathgeb-Schnierer, E.: Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen. Eine Untersuchung zur Entwicklung von Rechenwegen bei Grundschulkindern auf der Grundlage offener Lernangebote und eigenständiger Lösungsansätze. Franzbecker Verlag, Hildesheim 2006.

Ruwisch, S.: Auf dem langen Weg zur Flexibilität. Grundschule Mathematik, Heft 17/2008, S. 40–43.

Selter, Ch. (1999): Flexibles Rechnen statt Normierung auf Normalverfahren! Die Grundschulzeitschrift, Heft 125/1999, S. 6–11.

Wittmann, E. Ch.; Müller, G. N.: Handbuch produktiver Rechenübungen. Bd. 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins. Klett Verlag, Stuttgart 1990.

Wittmann, E. Ch.; Müller, G. N.: Handbuch produktiver Rechenübungen. Bd. 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen. Klett Verlag, Stuttgart 1992.

Abb. 6: Grundlegende Rechenstrategien zur Multiplikation und Division (vgl. Ruwisch (2008))