

Mathematik

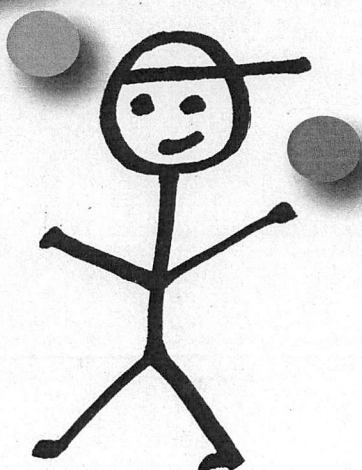
differenziert

Zeitschrift für die Grundschule | www.mathematik-differenziert.de

1-2018

$$\underline{569 - 198 = 371}$$

$$\begin{array}{r} 569 - 100 = 469 \\ 469 - 98 = \underline{\underline{371}} \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 569 - 200 = 369 \\ 369 + 2 = \underline{\underline{371}} \end{array}$$

Halbschriftliches Rechnen

Für alle Grundrechenarten

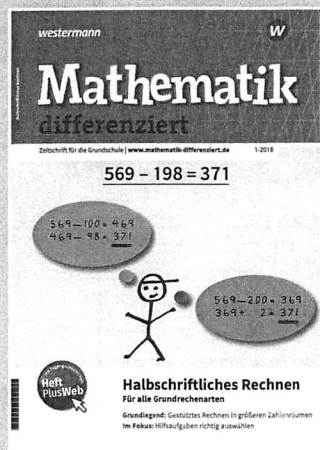
Grundlegend: Gestütztes Rechnen in größeren Zahlenräumen

Im Fokus: Hilfsaufgaben richtig auswählen

MAT-gru/zs-029

mit Zugangscode im Heft
Web





**Thema
in diesem Heft:**

Halbschriftliches Rechnen Für alle Grundrechenarten

Wissen

Aiso Heinze

6 Halbschriftliches Rechnen: Geht es sicher und geschickt?

Wie Kinder einen flexiblen Einsatz von Rechenstrategien lernen können

Durch die Kenntnis verschiedener Rechenstrategien können Kinder nicht nur richtig, sondern auch geschickt rechnen. Aber was macht die Fähigkeit des geschickten Rechnens nach aktuellem Forschungsstand eigentlich aus? Und kann sie im Unterricht gefördert werden, ohne dass dies Nachteile für die Rechensicherheit hat?

Unterrichten

Klasse 3–5
Marion Selg

10 (Gestütztes) Kopfrechnen als Alternative zum schriftlichen Rechnen im Zahlenraum bis 1000

Flexibles Rechnen anbahnen – die Hilfsaufgabe bei Subtraktionsaufgaben

Für den flexiblen Einsatz von Kopfrechenstrategien müssen Schülerinnen und Schüler diese kennen und deren Nutzung als hilfreich erfahren. Der Beitrag gibt Ideen für die Erarbeitung sowie Übung der Rechenstrategie „Hilfsaufgabe bei Subtraktionsaufgaben“.

Klasse 2 (3–6)

Sebastian Wartha, Corinna Forcher, Lukas Finke, Melanie Zimmermann

22 Minus: Mach den Unterschied!

Wegnehmende oder unterschiedsbestimmende Strategien bei Subtraktionsaufgaben bewusst auswählen

Aufgaben wie $41 - 39$ oder $501 - 498$ können besonders schnell über die Ermittlung der Differenz beider Zahlen gelöst werden. Studien und Unterrichtserfahrung zeigen, dass die wenigsten Kinder diese effektive Strategie nutzen. Die Lerneinheit bringt das Verfahren nahe und schult außerdem den Zahlenblick.

Klasse 3

Solveig Jensen

30 „Das geht dann einfacher.“

Strategien für halbschriftliche Multiplikation in Rechenkonferenzen diskutieren

Im Mittelpunkt der Thematisierung von halbschriftlichen Strategien zur Multiplikation steht die Anregung zur aufgabenbezogenen Strategiewahl aufgrund bestimmter Merkmale. Dies ist eine große Herausforderung, weil es keine einfache Einteilung gibt.

Klasse 3

Martina Greiler-Zauchner und Michael Gaidoschik

36 Vorteile suchen, Sicherheit finden!

Unterrichtsanregungen für das halbschriftliche Multiplizieren

Die Kinder suchen selbstständig ihren Rechenweg und probieren anschließend andere Möglichkeiten. Sie bewerten die Rechenwege und begründen ihre Bewertung. Gearbeitet wird auch mit dem 400-Punktefeld.

Klasse 3

Susannah Unteregge und Tobias Wollenweber

42 Der Austausch macht's

Anregungen zu einer materialgestützten Einführung der halbschriftlichen Division in kooperativen Lernsituationen

Mithilfe des 200-Punktefelds erarbeiten die Schülerinnen und Schüler sich individuelle Rechenwege in der halbschriftlichen Division.

Magazin

47 Unter der Lupe / Infos

Handbuch für den Mathematikunterricht
Erzähl mal Mathe!
Gefährliche Sachen zum Zahlen und Lachen
Knobelkalender

Oliver Thiel

48 Mathematik in Person: Heinrich Winter

49 Nachgedacht!

Wie viele große Ls, wie viele kleine?

49 Tipps und Termine

50 Vorschau und Impressum

Materialien zum Heft



Auf Seite 51 finden Sie eine Auflistung aller Arbeitsblätter dieser Ausgabe, die Ihnen als Download im Internet zur Verfügung stehen. Die Anleitung dazu finden Sie ebenfalls auf Seite 51.



Copyright-Hinweise

Mit dem Erwerb dieser Zeitschrift ist von Ihnen eine Gebühr entrichtet worden, die Sie zur Vervielfältigung der hierin enthaltenen Westermann Kopiervorlagen für den eigenen Unterrichtsgebrauch in der jeweils dafür benötigten Anzahl berechtigt. Eine weitergehende Verwendung ist nur mit vorheriger und ausdrücklicher Einwilligung durch die Bildungshaus Schulbuchverlage GmbH, Braunschweig, zulässig.

Trotz sorgfältiger inhaltlicher Kontrolle wird die Haftung für die Inhalte externer Internetseiten, auf die in diesem Heft hingewiesen wird, ausgeschlossen. Für den Inhalt sind ausschließlich deren Betreiber verantwortlich. Sollten Sie auf kostenpflichtige, illegale oder anstößige Inhalte treffen, so bedauern wir dies ausdrücklich und bitten Sie, uns davon in Kenntnis zu setzen.

Unsere Autorinnen und Autoren



Lukas Finke ist wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mathematik der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe.



Corinna Forcher ist Grund- und Hauptschullehrerin und Lehrbeauftragte an der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe.



Dr. Michael Gaidoschik lehrt und forscht zur Didaktik der Grundschulmathematik an der Universität Bozen.



Prof. MMag. Martina Greiler-Zauchner lehrt und forscht zur Didaktik der Grundschulmathematik an der PH Kärnten.



Dr. Aiso Heinze ist Professor für Didaktik der Mathematik am IPN – Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik in Kiel.



Dr. Solveig Jensen absolviert zurzeit ihr Referendariat an einer Bremer Grundschule.



Marion Selg unterrichtete mehrere Jahre an einer Grundschule und ist seit 2012 akademische Mitarbeiterin am Institut für Mathematik und Informatik der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe.



Susannah Unteregge ist wissenschaftliche Mitarbeiterin am Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts (IEEM) der Technischen Universität Dortmund.



Dr. Sebastian Wartha ist Professor am Institut für Mathematik der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe.



Tobias Wollenweber ist wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts (IEEM) der Technischen Universität Dortmund.



Melanie Zimmermann ist Lehramtsanwärterin für das Lehramt an Grundschulen in Baden-Württemberg.

Halbschriftliches Rechnen: Geht es **sicher** und **geschickt**?

Wie Kinder einen flexiblen Einsatz
von Rechenstrategien lernen können

► Rechenstrategien, halbschriftlich rechnen, entdeckendes Lernen

Durch die Kenntnis verschiedener Rechenstrategien können
Kinder nicht nur richtig, sondern auch geschickt rechnen.

Aber was macht die Fähigkeit des geschickten Rechnens nach
aktuellem Forschungsstand eigentlich aus? Und kann sie im
Unterricht gefördert werden, ohne dass dies Nachteile für
die Rechensicherheit hat?

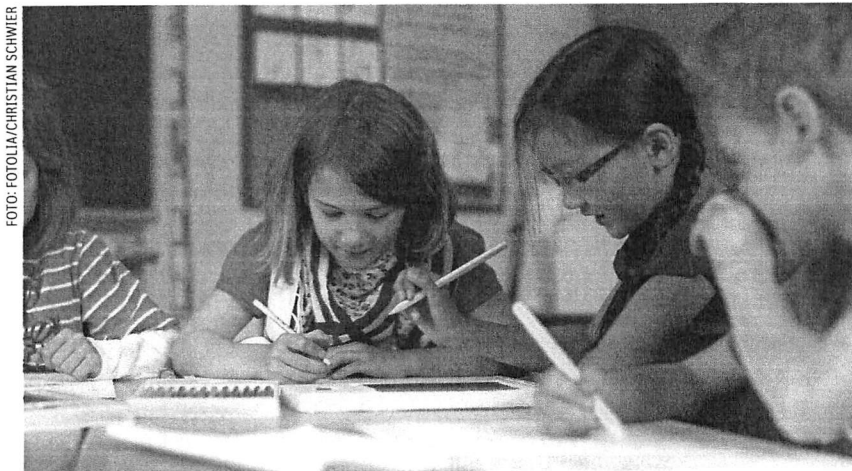


FOTO: FOTOLIA/CHRISTIAN SCHWIER

1 Sollen Kinder Rechenstrategien selbst entdecken oder soll die Lehrkraft diese Strategien lehren?

VON AISO HEINZE

Im Mathematikunterricht der Grundschule spielen unterschiedliche Strategien beim Umgang mit Zahlen und Rechenoperationen von Anfang an eine wichtige Rolle. Bereits beim Zählen einer Menge (z.B. der Augenzahl bei zwei Würfeln) können verschiedene Zählstrategien angewendet werden, von denen einige effizienter sind als andere. Dies setzt sich bei den Grundrechenarten fort. So kann die Aufgabe $7+9$ auf unterschied-

lichen Wegen gelöst werden, sei es durch die universelle Strategie beim Zehnerübergang als $7+3=10$ und $10+6=16$ oder durch die Strategie, dass $7+9=9+7$ und $9+7=10+7-1=17-1=16$, oder durch die Strategie des gegensinnigen Veränderns und Verdoppelns: $7+9=8+8=16$.

Mit der Einführung der größeren Zahlräume bis 100 bzw. bis 1000 in den Klassenstufen 2 und 3 erweitert sich auch die Vielfalt der möglichen Rechenstrategien. Gleichzeitig tritt bei bestimmten Aufgabentypen die Effizienz verschiedener Rechenwege deutlicher hervor als bei kleineren Zahlräumen. So sollte etwa die Aufgabe $701-699$ effizienter und sicherer durch die Ergänzungsstrategie („699 plus wie viel ergibt 701“) zu lösen sein als durch ein schriftliches Subtraktionsverfahren, das bei den zwei Überträgen fehleranfälliger sein dürfte.

Schülerinnen und Schüler sind in der Regel sehr kreativ in der Entwicklung verschiedener Rechenstrategien. In der Literatur finden sich diesbezüglich Vorschläge zur Strukturierung und Kategorisierung dieser Vielfalt, um sie einer didaktischen Diskussion zugänglich zu machen. So werden beispielsweise für die Addition und Subtraktion oft die in Abbildung 2 dargestellten Strategien als Hauptstrategien genannt, wobei die Bezeichnungen mitunter variieren.

Schrittweises Rechnen	Stellenweises Rechnen	Hilfsaufgabe	gegen-/gleichsinniges Verändern	Ergänzen (nur Subtraktion)
$123 + 456 = 579$	$123 + 456 = 579$	$527 + 398 = 925$	$527 + 398 = 925$	$701 - 698 = 3$
$123 + 400 = 523$	$100 + 400 = 500$	$527 + 400 = 927$	$525 + 400 = 925$	$698 + 3 = 701$
$523 + 50 = 573$	$20 + 50 = 70$	$927 - 2 = 925$		
$573 + 6 = 579$	$3 + 6 = 9$		$527 - 199 = 328$	
			$528 - 200 = 328$	

Natürlich gibt es auch hierbei Variationen. So können beispielsweise beim schrittweisen Rechnen auch zunächst die Einer, dann die Zehner und zum Schluss die Hunderter addiert werden. Außerdem verwenden Grundschulkinder vielfach Mischstrategien, die Rechenschritte mehrerer der Strategien aus Abbildung 2 kombinieren.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass bestimmte Strategien in den in der Grundschule betrachteten Zahlräumen problematisch sein können. Das stellenweise Rechnen der Subtraktion bei Minusaufgaben mit Überträgen ist ein Beispiel, da hier bei bestimmten Notationsformen negative Zwischenergebnisse auftreten. Zudem gibt es natürlich Variationen in den Darstellungsmöglichkeiten. So kann neben der Notationsform in Abbildung 2 auch der Rechenstrich zur Darstellung genutzt werden. Dabei ist zu beachten, dass einige Darstellungsformen nicht für alle Strategien geeignet sind.

Was ist „geschicktes Rechnen“?

Ein Ziel der Thematisierung verschiedener Rechenstrategien im Unterricht ist die Entwicklung der Fähigkeit des „geschickten Rechnens“. Schülerinnen und Schüler sollen möglichst vorteilhafte Lösungswege für Rechenaufgaben finden, da diese prinzipiell einfacher und damit weniger fehleranfällig sind. Außerdem haben vorteilhafte Rechenwege oft das Potenzial, mit etwas Übung als Kopfrechenstrategien internalisiert zu werden (wie z. B. bei der Ergänzungsstrategie).

Wer legt fest, wann eine Lösung „geschickt“ ist?

Stellt man sich die Frage, wann eine Rechenstrategie eigentlich „geschickt“ oder „vorteilhaft“ ist, so wird deutlich, dass dies von drei unterschiedlichen Faktoren abhängen kann (vgl. Verschaffel u. a. 2009). Eine Strategie kann vorteilhaft sein bezogen auf

- die rechnende Person (z. B. wenn ein Kind die schrittweise Rechenstrategie am schnellsten und sichersten beherrscht, sodass es vorteilhaft ist, immer diese zu verwenden),
- die Aufgabe (z. B. ist für die Aufgabe $436 + 99$ die Hilfsaufgabenstrategie $436 + 100 = 536$ und $536 - 1 = 535$ geschickt, da diese sehr einfach ist),

- den jeweiligen Kontext (z. B. ist es bei Übungsaufgaben zur schriftlichen Addition für Schülerinnen und Schüler vorteilhaft, die schriftliche Addition als Lösung zu zeigen, weil die Lehrkraft dies vorgegeben hat).

Vor diesem Hintergrund ergeben sich bereits erste Hinweise für den Unterricht: Welche Ziele und Anforderungen werden den Schülerinnen und Schülern direkt und vor allem indirekt vermittelt? Viele Lernende werden vor einem Dilemma stehen, wenn eine Lehrkraft in einer Unterrichtssituation fordert, dass jede Aufgabe mit einer möglichst effizienten Strategie gelöst wird (d. h., die Strategien sind vorteilhaft bezogen auf die Aufgaben), und gleichzeitig betont, dass die Lösungen jeweils richtig sein müssen (d. h., die Strategien sind vorteilhaft, wenn ich sie sicher kann). Entsprechend ist es gerade in Unterrichtsphasen zum Erlernen des flexiblen Rechnens wichtig, die Korrektheit der Lösungen nicht höher zu gewichten als die Wahl einer effizienten Lösungsstrategie. Das langfristige Ziel, dass Schülerinnen und Schüler Aufgaben am Ende auch korrekt lösen können, steht dabei natürlich nicht infrage.

Wie finden Schülerinnen und Schüler „geschickte Lösungen“?

Für den Rest des Beitrags verstehen wir unter „geschickter“ Lösung oder Rechenstrategie nur noch den zweiten der oben genannten Fälle, d. h., die Lösung ist bezogen auf die gegebene Aufgabe geschickt. Es geht also darum, dass etwa bei einer Aufgabe wie $701 - 699$ die Ergänzungsstrategie oder die Hilfsaufgabe geschickter ist als beispielsweise das schrittweise Rechnen.

Die Frage, wie man zu einer Aufgabe eine geschickte Lösung findet, was also im Kopf einer Person passiert, wird seit einiger Zeit untersucht. Die Antwort auf diese Frage ist nicht unbedeutend, da sie Grundlage für das Lernen des geschickten Rechnens und die Unterrichtsgestaltung ist. Ein prominentes Erklärungsmodell ist das Strategiewahlmodell. Dieses geht davon aus, dass beim Erkennen einer Aufgabe eine passende Rechenstrategie aus dem Gedächtnis ausgewählt und angewendet wird (Lemaire/Siegler 1995). Aus

2 wichtige Rechenstrategien für die Addition und Subtraktion

dem Strategiewahlmodell lassen sich vier Lernvoraussetzungen für die Fähigkeit des geschickten Rechnens ableiten (siehe Abb. 3).

Es gibt ein weiteres Modell, das die oben skizzierte Auswahl einer fertigen Strategie für das geschickte Lösen einer gegebenen Aufgabe infrage stellt. So beschreibt Threlfall (2009) die Entwicklung einer Aufgabenlösung als einen dynamischen Prozess, bei dem bei einer Aufgabe eine Rechnung erst einmal angefangen wird und sich dann weiterentwickelt. Dabei kann es nach den ersten Rechenschritten durchaus zu einer Veränderung des zunächst eingeschlagenen Lösungswegs kommen, da das Kind aufgrund seines Vorwissens neue Zusammenhänge erkannt hat. Das Finden einer geschickten Lösung kann bei ausreichender Erfahrung zwar auch die Auswahl und Anwendung einer fertigen Strategie sein. Bei wenig Vorerfahrung kann man sich das Vorgehen aber eher als eine Art Baukastenprinzip vorstellen, bei dem verschiedene Wissens Elemente über Lösungswege und Zahleigenschaften kombiniert werden.

Wie wird geschicktes Rechnen gelernt?

Zu der Frage, welche Lerngelegenheiten Schülerinnen und Schülern für das geschickte Rechnen angeboten werden sollten, gibt es mehrere Vorschläge. Welcher davon am geeignetsten ist, kann von der Forschung bisher noch nicht beantwortet werden. Als gesichertes Wissen gilt, dass das traditionelle Einüben einer einzigen Strategie und eine nur kurze Behandlung anderer Strategien als sog. Rechentricks kaum die Fähigkeit des geschickten Rechnens fördert (vgl. die Studie von Klein u. a. 1998). Weiterhin besteht Einigkeit, dass verschiedene Rechenstrategien im Unterricht nicht nur zu thematisieren sind, sondern auch explizit verglichen werden müssen (z.B. als Vergleich von Lösungen in Rechenkonferenzen). Die zentrale Frage, ob Kinder am besten ihre eigenen

Rechenstrategien entdecken und verwenden sollten, kann bisher nicht klar beantwortet werden.

Vormachen oder selbst entdecken lassen?

Grundsätzlich lassen sich zwei idealtypische didaktische Ansätze unterscheiden: Beim ersten Ansatz bestimmt die Lehrkraft durch Vormachen, welche Strategien eingeführt und von den Kindern geübt und verglichen werden (was eine vorgeschaltete kurze Entdeckungsphase nicht ausschließt). Beim zweiten Ansatz werden hingegen keine Vorgaben gemacht, die Schülerinnen und Schüler entdecken ihre eigenen Rechenwege, vergleichen und optimieren diese.

Während viele Schulbücher sich eher an dem ersten Ansatz orientieren, gehen die Autoren der zuvor erwähnten Modelle (Strategiewahlmodell und Modell von Threlfall) beide vom zweiten Ansatz aus, d.h., Schülerinnen und Schüler sollen durch geeignetes Aufgabenmaterial selbst Rechenstrategien entdecken, vergleichen und optimieren und so die Fähigkeit des geschickten Rechnens aufbauen. Sie unterscheiden sich allerdings darin, welche Aspekte das Aufgabenmaterial betonen soll. Während für das Strategiewahlmodell vor allem Aufgaben empfohlen werden, die bestimmte Strategien nahelegen und für deren Übung geeignet sind (z.B. 701–699 oder $436+99$), wird bei dem Modell von Threlfall zusätzlich Wert auf den Erwerb von Zahlwissen und die Analyse von Aufgabeneigenschaften (z.B. „Zahlenblick“) gelegt. Threlfall betont, dass keine Strategien durch die Lehrkraft vorgegeben oder hervorgehoben werden sollen, da dies die Kreativität der Kinder beeinträchtigt.

Es gibt bisher kaum Studien, die die oben genannten Unterrichtsansätze (vormachen vs. entdecken lassen) systematisch verglichen haben. In Deutschland wurden im Rahmen des TigeR-Projekts (TigeR = Tipps zum geschickten Rechnen) zwei Schülergruppen der Klassenstufe 3 nach den Ansätzen unterrichtet und mit einer dritten Vergleichsgruppe verglichen, die „normalen“ Unterricht hatte (z.B. Grüsing u. a. 2015). In der ersten Gruppe wurden die fünf Strategien aus Abbildung 2 nacheinander durch eine Lehrkraft eingeführt, von den Kindern eingeübt und Aufgabenlösungen immer wieder in Rechenkonferenzen daraufhin verglichen, ob die Strategien geschickt waren. Die zweite Gruppe hat keinerlei Strategien gezeigt bekommen, sondern im Sinne des Strategiewahlmodells anhand von Aufgaben, die bestimmte Strategien nahelegen, selbst Rechenwege entwickelt und diese in Rechenkonferenzen verglichen. Zusätzlich wurden im Sinne von Threlfall Aufgaben im Hinblick auf die Zahlbeziehungen analysiert und kategorisiert (z.B. „Zahlenblick“).

Strategiewahlmodell

1. Strategierepertoire: Kenntnis verschiedener Strategien (z. B. die in Abb. 2)
2. Strategieverteilung: Kenntnis, welche Strategien für welche Aufgabentypen geeignet sind
3. Strategieanwendung: Fähigkeit, jede bekannte Strategie schnell und sicher anzuwenden
4. Strategieflexibilität: Fähigkeit, die bekannten Strategien beim Lösen mehrerer Aufgaben flexibel anzuwenden, d. h. statt nur einer „Lieblingsstrategie“ auch andere Strategien einzusetzen

3 Voraussetzungen für die Fähigkeit des geschickten Rechnens nach dem Strategiewahlmodell

Unterricht zum geschickten Rechnen sollte

- grundsätzlich mehrere Strategien thematisieren,
- Strategien möglichst selbst entdecken lassen, indem Aufgaben gestellt werden, die bestimmte Strategien nahelegen (z. B. $227 + 399$, $504 - 497$, $248 + 162$); anspruchsvolle Strategien (Ergänzen, gleich-/ gegensinniges Verändern) sollten zusätzlich durch die Lehrkraft thematisiert werden,
- Strategien bei konkreten Aufgaben hinsichtlich ihrer Effizienz vergleichen lassen (z. B. in Rechenkonferenzen); dabei sollten Begründungen (Kriterien) eingefordert werden,
- Gelegenheiten zum Analysieren von Aufgabeneigenschaften geben, damit bestimmte Aufgabentypen

erkannt und diese als Begründung für die Strategie-
verwendung herangezogen werden können
(z. B. Minusaufgaben, bei denen die Zahlen nahe bei-
einander liegen; Aufgaben, bei denen eine Zahl nahe
am Hunderter ist),

- Lern- und Leistungssituation für die Kinder trans-
parent machen, indem in einzelnen Übungsphasen
durch geeignete Ankündigung das geschickte Rech-
nen stärker gewichtet wird als das richtige Rechnen
mit ungeschickten Lösungen (dabei sollten natürlich
auch geschickte Lösungen mit Rechenfehlern am
Ende noch berichtigt werden).

Ein Vergleich zeigte zunächst, dass beide Grup-
pen nach dem Unterricht (d. h. direkt nach der
Unterrichtseinheit und auch noch nach drei
und acht Monaten) sich in ihrer Leistung zum
geschickten Rechnen nicht unterschieden, aber
jeweils deutlich geschickter rechneten als die
Vergleichsgruppe. Auffällig war in Detailanalysen
allerdings, dass in der Gruppe, deren Kinder die
Strategien selbst entdeckt hatten, vor allem die
Strategie Hilfsaufgabe häufiger und dauerhafter
angewendet wurde (selbst nach Einführung der
schriftlichen Rechenverfahren). Dagegen wurden
die Strategien gegen-/gleichsinniges Verändern
und Ergänzen sehr viel seltener angewendet.
Letzteres ist nicht überraschend, da diese Strate-
gien anspruchsvoll sind. Gerade das Ergänzen ist
eine Strategie, die nur von wenigen Grundschul-
kindern selbst entdeckt wird (vgl. De Smedt u. a.
2010). Schließlich wurde noch verglichen, ob sich
durch den speziellen Unterricht zum geschickten
Rechnen Nachteile bei der Rechensicherheit erga-
ben. Hier zeigten sich keine Unterschiede, weder
zwischen den beiden Gruppen noch im Vergleich
zur Vergleichsgruppe.

Fazit

Das geschickte Rechnen findet sich als ein Ziel
des Mathematikunterrichts in der Grundschule in
vielen Lehrplänen. Auch wenn der aktuelle Stand
der Forschung noch nicht alle Fragen zufrie-
denstellend beantwortet, wie Kinder geschickte
Lösungen finden und wie das geschickte Rech-
nen am besten gelernt bzw. unterrichtet werden
kann, so können doch einige Empfehlungen für
Lehrkräfte gegeben werden (Abb. 4).

Bedeutend ist die Erkenntnis, dass das
geschickte Rechnen und die Thematisierung ver-
schiedener Rechenstrategien in der Regel keine
Nachteile bei der Rechensicherheit zur Folge

haben. Als Mitnahmeeffekt bietet die Behandlung
des geschickten Rechnens gerade in der zweiten
Hälfte der Grundschulzeit viele Übungsmöglich-
keiten für Zahlwissen, Aufgabenanalysen und
auch das grundlegende Kopfrechnen (als Teil-
schritte im Lösungsprozess). ■

Der Autor

Dr. Aiso Heinze ist Professor für Didaktik der Mathematik am
IPN – Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften
und Mathematik in Kiel.

Literatur

- **De Smedt, Bert/Torbeyns, Joke/Strassens, Nick/Ghes-
quière, Pol/Verschaffel, Lieven:** Frequency, efficiency and
flexibility of indirect addition in two learning environments. In:
Learning and Instruction, Heft 20-2010, S. 205–215
- **Grüßing, Meike/Schwabe, Julia/Heinze, Aiso/Lipowsky,
Frank:** Anderer Unterricht – andere Rechenstrategien? Eine
experimentelle Studie zum Vergleich zweier Instruktionsstrate-
gien. In: Caluori, Franco/Linneweber-Lammerskitten, Helmut/
Streit, Christine (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2015.
Münster 2015, S. 320–323
- **Klein, Anton S./Beishuizen, Meindert/Treffers, Adri:** The
empty number line in Dutch second grades: Realistic versus
gradual program design. In: Journal for Research in Mathematics
Education, Heft 29-1998, S. 443–464
- **Lemaire, Patrick/Siegler, Robert:** Four aspects of strategic
change: Contributions to children's learning of multiplication.
In: Journal of Experimental Psychology: General, Heft 124-1995,
S. 83–97
- **Threlfall, John:** Strategies and flexibility in mental calculation.
In: ZDM – The International Journal on Mathematics Education,
Heft 41-2009, S. 541–555
- **Verschaffel, Lieven/Luwel, Koen/Torbeyns, Joke/Van Doo-
ren, Wim:** Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive
expertise in elementary mathematics education. In: European
Journal of Psychology of Education, Heft 24-2009, S. 335–359

(Gestütztes) Kopfrechnen als Alternative zum schriftlichen Rechnen im Zahlenraum bis 1000

**Flexibles Rechnen anbahnen –
die Hilfsaufgabe bei Subtraktionsaufgaben**

► Hilfsaufgabe, halbschriftlich rechnen, Zahlvorstellungen

In der mathematikdidaktischen Literatur besteht Konsens, dass Kopfrechenfähigkeiten trotz Computern und Smartphones bedeutsam sind. Für den flexiblen Einsatz von Kopfrechenstrategien müssen Schülerinnen und Schüler diese kennen und deren Nutzung als hilfreich erfahren. Dieser Beitrag gibt Ideen für die Erarbeitung sowie Übung der Rechenstrategie „Hilfsaufgabe bei Subtraktionsaufgaben“.

VON MARION SELG

Ziel des Mathematikunterrichts der Primarstufe ist es, Schülerinnen und Schüler an ein flexibles bzw. adaptives Rechnen heranzuführen. Dies bedeutet, dass Rechenmethoden und Rechenstrategien bewusst ausgewählt werden sollen (vgl. Selter 2003). Die Entscheidung für oder gegen eine bestimmte Rechenmethode bzw. -strategie wird aufgrund der Zahlenwerte der jeweiligen Aufgabe getroffen. Die Aufgabe $4264 - 1685$ kann nur

schwer und mit einem hohen mentalen Aufwand im Kopf gelöst werden. Hier bietet sich aufgrund der vielen Übergänge ein schriftliches Rechnen an. Dagegen kann die Aufgabe $2605 - 499$ mithilfe der Rechenstrategie „Hilfsaufgabe“ in wenigen Schritten schnell und sicher im Kopf gelöst werden ($2605 - 500 + 1$).

Zur Bedeutung des Zahlenrechnens

Das schriftliche Rechnen (Rechnen mit Ziffern) ist grundsätzlich eine effiziente Methode, um Aufga-

FOTOS: MARION SELG

6) $2605 - 499 = 1106$

$$\begin{array}{r} 2605 \\ - 499 \\ \hline 111 \\ 1106 \end{array}$$

6) $2605 - 499 =$

$$\begin{array}{r} 2605 \\ - 499 \\ \hline 11 \\ 0206 \end{array}$$

6) $2605 - 499 = 106$

$$\begin{array}{r} 2605 \\ - 499 \\ \hline 11 \\ 0106 \end{array}$$

1 fehlerhafte Schülerlösungen

ben mit beliebig großen Zahlen ökonomisch zu lösen. Die Kopfrechenanforderungen sind gering und durch die Vorgabe der Teilschritte ist der Aufwand überschaubar. In unserem Alltag spielen schriftliche Rechenverfahren jedoch kaum noch eine Rolle (vgl. Padberg/Benz 2011).

Im Unterricht sollte darauf geachtet werden, dass schriftliches Rechnen bewusst eingesetzt und nicht als Standard bei jeglicher Aufgabe genutzt wird. Der unreflektierte Einsatz kann dazu führen, dass Schülerinnen und Schüler ihre Ergebnisse nicht hinterfragen und jede Lösung akzeptieren. Der Blick für die Zahl als Ganzes kann schnell verloren gehen. Zudem unterstützt ein Zahlenrechnen (reines Kopfrechnen oder gestütztes Kopfrechnen/halbschriftliches Rechnen) – im Unterschied zum Ziffernrechnen (schriftliches Rechnen) – die Entwicklung von Zahl- und Operationsvorstellungen.

Um mögliche Fehler beim schriftlichen Rechnen aufzuzeigen, werden nachfolgend einige Beispiele aus einer Studie vorgestellt, die mit Schülerinnen und Schülern der Klassenstufe 5 (Realschule) durchgeführt wurde. In einem schriftlichen Test wurde unter anderem die Aufgabe 2605–499 mit der Anweisung gestellt, diese auf einem möglichst geschickten Weg zu lösen. 45 der 52 befragten Schülerinnen und Schüler lösten die Aufgabe schriftlich. Dabei wurden auch Ergebnisse wie beispielsweise 106, 206 und 1106 akzeptiert (siehe Abb. 1). Fast alle entstandenen Fehler sind auf vergessene oder zu viel gemachte Überträge zurückzuführen.

In einem anschließenden diagnostischen Interview wurde 25 Schülerinnen und Schülern erneut die Aufgabe 2605–499 gestellt. Zu beobachten war, dass nur vier Schülerinnen und Schüler die Aufgabe über eine Hilfsaufgabe lösten, obwohl die Zahlenwerte der Aufgabe diese Strategie doch sehr nahelegen. Nur drei Schülerinnen und Schüler gelangten auf diesem Weg zum korrekten Ergebnis. Knapp über die Hälfte löste die Aufgabe schriftlich. Vor dem konkreten Rechnen wurden die Schülerinnen und Schüler gefragt, ob sie jetzt schon sagen können, ob das Ergebnis größer oder kleiner als 2000 ist. Sechs der Schülerinnen und Schüler waren nicht in der Lage, ein korrektes Abschätzen vorzunehmen. Dies zeigt, dass sie über nur gering ausgeprägte Zahlvorstellungen verfügen. Alle sechs lösten die Aufgabe anschließend schriftlich.

Zahlen verorten

Da sich die Hilfsaufgabe insbesondere bei Subtrahenden anbietet, die recht nah am nächsten vollen Zehner oder Hunderter liegen (z.B. –9, –29, –97, –298, –390) ist es zunächst einmal wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler diese Nähe erkennen. Hierfür bieten sich Übungen am (fast)



Auf einen Blick

Klassenstufe: 3–5

Zeit: ca. 4 Stunden, danach wiederholt und mit variierbarem Zeitumfang einsetzbar

Lerngelegenheiten:

- Zahlennähe erkennen
- bewusste Nutzung der Hilfsaufgabe bei Subtraktionsaufgaben
- reflektierte Methodenwahl

Lernvoraussetzungen:

- Operationsvorstellungen von Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 1000 (bzw. 100)
- Aufgaben des Typs ZE – Z und HZE – H (z. B. 75 – 30, 538 – 200)
- von Vorteil: schrittweises Rechnen am Rechenstrich
- schriftliche Subtraktion für M4

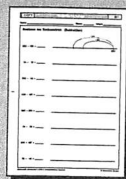
Materialien

M1 (M5): Rechnen am Rechenstrich

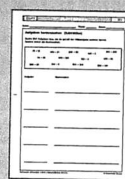
M2 (M6): Aufgaben herausuchen

M3 (M7): Aufgaben erfinden

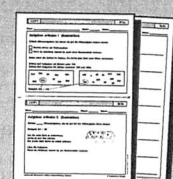
M4 (M8): Schriftlich oder Hilfsaufgabe?



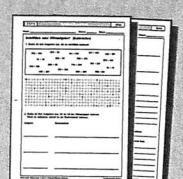
M1
Seite 14



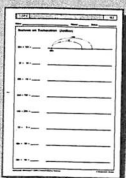
M2
Seite 15



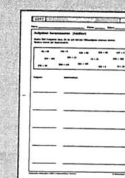
M3a-c
Seite 16–17



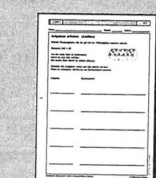
M4a-b
Seite 18–19



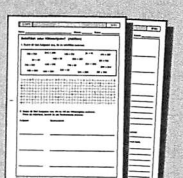
M5
Seite 20



M6



M7



M8a-b

leeren Zahlenstahl an. Unterteilungen in Einer sind dabei nicht notwendig. Die Lehrkraft zeichnet beispielsweise einen Zahlenstrahlausschnitt (siehe Abb. 2) an die Tafel und fragt anschließend, wo denn ungefähr die 49 (98, 197, 190) liegt.

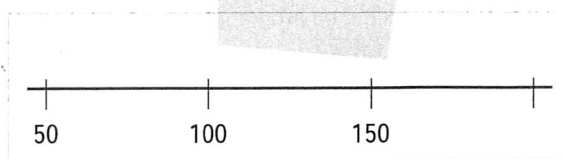
Die Verortung der Zahlen kann nun von den Schülerinnen und Schülern vorgenommen werden. Da ohne Hilfsmittel gearbeitet wird, kann nur

STOLPERSTEIN

Bei der unterrichtlichen Erarbeitung ist darauf zu achten, dass die Schülerinnen und Schüler die Vorgehensweise bei der Nutzung der Hilfsaufgabe verstehen. Eine gründliche Erarbeitung am Rechenstrich – idealerweise vorab mit Mehrsystemblöcken – ist dafür Voraussetzung. Wird die Strategie als unverständlicher Trick verwendet, kann dies dazu führen, dass der Ausgleich am Ende des Lösungsprozesses in die falsche Richtung erfolgt. Bei $62 - 19$ könnte nach erfolgreicher Berechnung von $62 - 20 = 42$ nun fälschlicherweise noch $42 - 1 = 41$ gerechnet werden anstatt $42 + 1 = 43$, da es sich aus Sicht der Schülerin bzw. des Schülers ja um eine Minusaufgabe handelt.



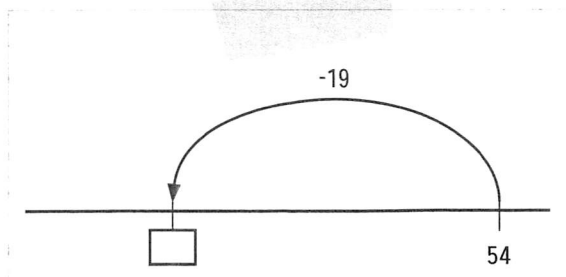
eine ungefähre Bestimmung erfolgen, was völlig ausreichend ist. Wichtig ist, dass bei jeder Verortung auch eine Begründung erfragt wird. Bei der 98 beispielweise sollte die Nähe zur 100 genannt und auch der Abstand von 2 bestimmt werden. Durch die Versprachlichung wird der Vorgang bewusster und bietet zudem auch Lerngelegenheit für leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler. Weitere ähnliche Übungen können folgen.



2 Zahlenstrahlausschnitt

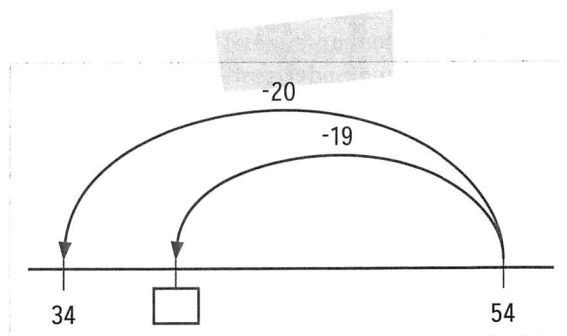
Darstellung am Rechenstrich

Bei der Darstellung am Rechenstrich kann beispielsweise mit der Aufgabe $54 - 20$ begonnen werden, welche die Lehrkraft an die Tafel schreibt. Im Klassenunterricht wird die Lösung ermittelt. Nun folgt eine neue Aufgabe: $54 - 19$. Nach einem kurzen Austausch über die Unterschiede und die Gemeinsamkeiten zur vorherigen Aufgabe wird mithilfe eines Pfeilbogens die Aufgabe $54 - 19$ am Rechenstrich eingezeichnet und zudem verdeutlicht, wo nachher die Lösung zu finden ist (siehe Abb. 3).



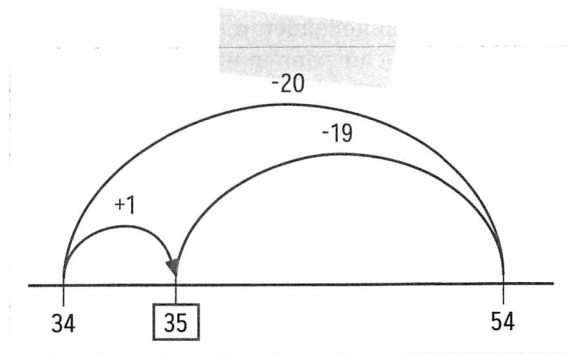
3 Rechenstrich zur Aufgabe 54 - 19

Gemeinsam wird nun überlegt, welche (helfende) Aufgabe leichter zu rechnen ist als minus 19. Erfahrungsgemäß kommt von der Schülerseite die Idee, dass man, wie bei der Aufgabe zuvor, 20 abziehen kann. Sollte der Vorschlag nicht kommen, kann die Lehrkraft den Bezug zur vorherigen Aufgabe herstellen. Weiterhin wird überlegt, ob der Pfeil von minus 20 nun größer oder kleiner als der von minus 19 ist. Anschließend kann dieser eingezeichnet werden. Das Zwischenergebnis kann ermittelt und notiert werden (siehe Abb. 4)



4 Rechenstrich zur Aufgabe 54 - 19 mit Zwischenergebnis

In einem letzten Schritt wird nun überlegt, ob zu viel oder zu wenig abgezogen wurde und wie der Ausgleich erfolgen muss, damit die Rechnung wieder stimmt. Dieser wird abschließend noch mithilfe eines Pfeilbogens dargestellt und das Ergebnis kann bestimmt werden (siehe Abb. 5).



5 Rechenstrich zur Aufgabe 54 - 19 mit Lösung

Unter Berücksichtigung der Versprachlichung kann die Hilfsaufgabe mit folgenden Aufgaben gemeinsam an der Tafel erarbeitet und vertieft werden: $63 - 9$, $85 - 29$, $52 - 17$, $263 - 99$, $84 - 49$, $423 - 198$, $364 - 38$, $621 - 190$, $462 - 90$, $740 - 297$.

Von dieser Vorgehensweise kann zu einem späteren Zeitpunkt im Lernprozess durch Verkürzung der Notation (z.B. nur noch Zwischenergebnisse ohne Rechenstrich notieren) zum reinen Kopfrechnen übergegangen werden.

Der Erarbeitung am Rechenstrich wird eine vorausgehende Erarbeitung mit Mehrsystemblöcken nach dem gleichen Vorgehen empfohlen.

Zu den Materialien

Die Übungen zur Vertiefung und zur reflektierten Methodenwahl sind für die Klassenstufen 3 bis 5 konzipiert. Die Materialien sind so gestaltet, dass die Anforderungen stetig ansteigen.

- M1: Rechnen am Rechenstrich

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten das Arbeitsblatt und üben dabei die Hilfsaufgabe ein. Dies kann direkt im Anschluss an die gemeinsame Erarbeitung an der Tafel erfolgen. Eventuell kann vor der Einzelarbeit bei einigen Aufgaben besprochen werden, welches die helfende Aufgabe ist.

- M2: Aufgaben herausuchen

Bei dieser Übung wird der Fokus auf den Subtrahenden gelegt, um so bewusst unterscheiden zu können, wann sich die Hilfsaufgabe anbietet und wann nicht. Zunächst können ähnliche Aufgaben wie abgebildet an die Tafel geschrieben werden. Im Klassengespräch werden nun die Aufgaben herausgesucht, die sich gut mit einer Hilfsaufgabe lösen lassen. Wichtig bei dieser Vorübung ist, Begründungen zu erfragen.

- M3a: Aufgaben erfinden I

Das Erfinden von Aufgaben erfordert eine intensive Auseinandersetzung mit der Strategie. Da ein freies Erfinden vielen Schülerinnen und Schülern erfahrungsgemäß schwerfällt, sind mögliche Zahlen für den Minuenden und den Subtrahenden vorgegeben. An dieser Stelle im Lernprozess kann für leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler die Notation gekürzt oder gänzlich weggelassen werden. Die Lehrkraft kann durch Ankreuzen Empfehlungen abgeben.

- M3b: Aufgaben erfinden II

Auch hier geht es wieder um das Erfinden von Aufgaben, jedoch auf einem höheren Niveau als bei M3a. Für den Subtrahenden gibt es nun keine Auswahlmöglichkeiten mehr. Damit nicht nur Aufgaben wie beispielsweise $100-99$ oder $600-599$ entstehen, wird der Minuend durch Würfeln ermittelt. Es bietet sich an, zunächst vier bis fünf Beispielaufgaben gemeinsam an der Tafel zu erfinden und zu lösen. Wichtig ist, dass die Wahl des Subtrahenden immer begründet wird. Die Anzahl der zu erfindenden Aufgaben kann die Lehrkraft individuell vorgeben. Die Möglichkeit, den Rechenstrich wegzulassen bzw. nur noch Zwischenergebnisse zu notieren, kann bei dieser Übung thematisiert werden.

- M4: Schriftlich oder Hilfsaufgabe?

Es ist keineswegs Ziel, dass später jegliche Aufgabe im Kopf gelöst wird. Daher ist es wichtig, im Unterricht darauf zu achten, dass bewusste Entscheidungen bei der Methodenwahl erfolgen. M4 bietet dazu die Möglichkeit. Bevor die Schülerinnen und Schüler das Arbeitsblatt zur

$$456 \dots - 283 \dots$$

Schreibe auf, warum du diese Aufgabe untereinander gerechnet hast.

Weil sie ihm Kopf zu schwer ist und weil keine glatte Zehnerzahl dabe ist.

$$423 \dots - 157 \dots$$

Schreibe auf, warum du diese Aufgabe untereinander gerechnet hast.

Weil sie nicht dicht beieinander sind.

$$562 \dots - 283 \dots$$

Schreibe auf, warum du diese Aufgabe untereinander gerechnet hast.

Weil die Zahl wo ich minus machen soll (283) da sind die Z u E größer als bei der Zahl wo ich es abziehe. (562)

individuellen Auseinandersetzung erhalten, können einige Aufgaben aus dem Kasten (oder ähnliche) an die Tafel geschrieben werden. Eine Zuordnung zu *schriftlich* oder zu *Hilfsaufgabe* sowie die passende Begründung sollte im Klassengespräch erfolgen. Bei den Aufgaben, die ein schriftliches Rechnen nahelegen, wurde darauf geachtet, dass diese viele Übergänge aufweisen, was zur Begründung herangezogen werden kann. Das Begründen fällt den Schülerinnen und Schülern oftmals nicht leicht und sollte daher regelmäßig geübt werden, damit es über *die Aufgabe ist leicht* bzw. *die Aufgabe ist schwer* hinausgeht und spezifische Aufgabenmerkmale herangezogen werden (siehe Abb. 6).

- M5 bis M8: Nutzung der Hilfsaufgabe bei Additionsaufgaben

Entsprechend der in diesem Artikel beschriebenen Erarbeitung und Übung der Hilfsaufgabe bei Subtraktionsaufgaben kann auch die unterrichtliche Umsetzung der Hilfsaufgabe bei Additionsaufgaben erfolgen. Hierfür können die Materialien M5 bis M8 eingesetzt werden.

Fazit

Um den unreflektierten und mechanischen Einsatz schriftlichen Rechnens zu reduzieren und damit auch die Denkfähigkeit sowie Zahl- und Operationsvorstellung zu fördern, bedarf es eines Unterrichts, der vielfältige Rechenstrategien zu allen Rechenoperationen thematisiert und der Schülerinnen und Schüler immer wieder auffordert, über Lösungswege nachzudenken und Begründungen zu formulieren. ■

6 Schüler begründen, warum sie schriftlich gerechnet haben.

Die Autorin

Marion Selg unterrichtete mehrere Jahre an einer Grundschule und ist seit 2012 akademische Mitarbeiterin am Institut für Mathematik und Informatik der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe.

Literatur

■ **Padberg, Friedrich/Benz, Christiane:** Didaktik der Arithmetik. Für Lehrerbildung und Lehrerfortbildung. Heidelberg 2011

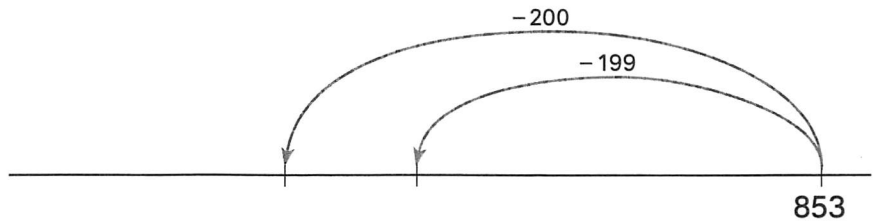
■ **Schipper, Wilhelm:** Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Braunschweig 2009

■ **Selter, Christoph:** Flexibles Rechnen – Forschungsergebnisse, Leitideen, Unterrichtsbeispiele. In: Sache – Wort – Zahl, Heft 31-2003, S. 45-50

Name: _____ Klasse: _____ Datum: _____

Rechnen am Rechenstrich (Subtraktion)

$853 - 199 =$ _____



$64 - 19 =$ _____

$760 - 48 =$ _____

$436 - 197 =$ _____

$802 - 290 =$ _____

$75 - 38 =$ _____

$670 - 197 =$ _____

$73 - 48 =$ _____



Name: _____ Klasse: _____ Datum: _____

Aufgaben heraussuchen (Subtraktion)

Suche fünf Aufgaben raus, die du gut mit der Hilfsaufgabe rechnen kannst.
Rechne immer am Rechenstrich.

75 – 19	670 – 21	235 – 99	429 – 3	841 – 290
94 – 28	500 – 366	123 – 9	470 – 60	
280 – 39	240 – 0	631 – 245	520 – 197	

Aufgabe:

Rechenstrich:

Name: _____ Klasse: _____ Datum: _____

Aufgaben erfinden I (Subtraktion)

Erfinde Minusaufgaben, bei denen du gut die Hilfsaufgabe nutzen kannst.

- ☐ Rechne immer am Rechenstrich.
☐ Wenn du möchtest, kannst du auch ohne Rechenstrich rechnen.

Nutze dabei die Zahlen im Kasten. Du darfst jede Zahl auch öfters verwenden.

Erfinde drei Aufgaben mit Zahlen unter 100.

Erfinde fünf Aufgaben mit Zahlen zwischen 100 und 1000.

340	723	65	192	625
850	534	72	185	508

420	9	29	98	345	399
198	18	295	39	297	190

Beispiel: $534 - 198$



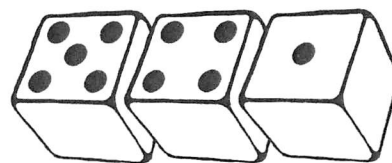
Name: _____ Klasse: _____ Datum: _____

Aufgaben erfinden II (Subtraktion)

Erfinde _____ Minusaufgaben, die du gut mit der Hilfsaufgabe lösen kannst.

Beispiel: $541 - 99$

Um die erste Zahl zu bekommen,
darfst du drei Mal würfeln.
Die zweite Zahl darfst du selbst erfinden.



Löse die Aufgaben.

Wenn du möchtest, kannst du am Rechenstrich rechnen.



Name: _____ Klasse: _____ Datum: _____

Aufgabe:

Rechenstrich:

Schriftlich oder Hilfsaufgabe? (Subtraktion)

708 - 199	670 - 29	414 - 176	721 - 490	423 - 157
74 - 38	562 - 99	562 - 283		970 - 190
613 - 195	890 - 68	710 - 290	612 - 245	
	831 - 368			64 - 18
456 - 287		635 - 298	652 - 186	

[illegible]

Rechenstrich:

Name: _____ Klasse: _____ Datum: _____

Aufgabe:

Rechenstrich:

3. Bei Nummer 1 hast du Aufgaben schriftlich gerechnet.

Schreibe eine Aufgabe auf, die du so gerechnet hast: _____

Schreibe auf, warum du diese Aufgabe schriftlich gerechnet hast.

4. Bei Nummer 2 hast du beim Ausrechnen mit der Hilfsaufgabe gerechnet.

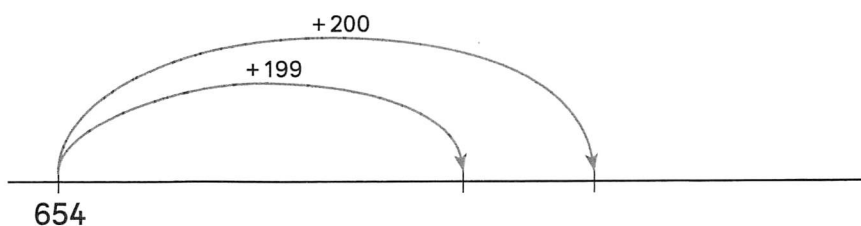
Schreibe eine Aufgabe auf, die du so gerechnet hast: _____

Schreibe auf, warum du diese Aufgabe mit der Hilfsaufgabe gerechnet hast.

Name: _____ Klasse: _____ Datum: _____

Rechnen am Rechenstrich (Addition)

$654 + 199 = \underline{\hspace{2cm}}$



$57 + 18 = \underline{\hspace{2cm}}$

$625 + 49 = \underline{\hspace{2cm}}$

$245 + 197 = \underline{\hspace{2cm}}$

$460 + 290 = \underline{\hspace{2cm}}$

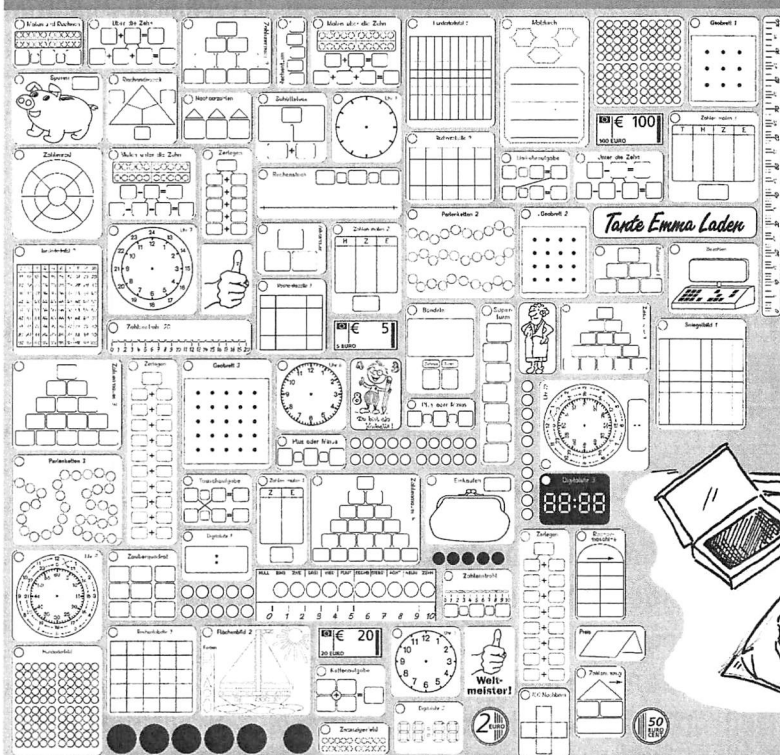
$53 + 9 = \underline{\hspace{2cm}}$

$624 + 39 = \underline{\hspace{2cm}}$

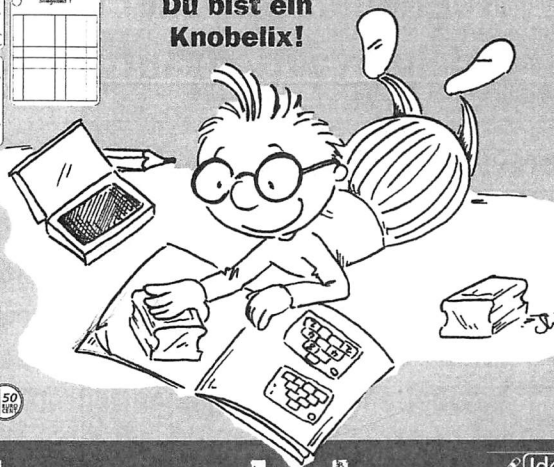
$324 + 48 = \underline{\hspace{2cm}}$

„Stempeln, Knobeln, Rechnen lernen“

Freier Zugang zu Mengendarstellungen und Aufgabenformaten für eigenproduktives Lernen



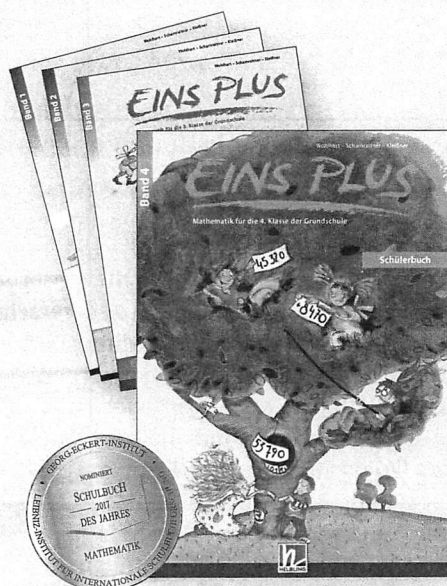
Du bist ein
Knobelix!



Idee, Gestaltung, Medien & Unterricht • Stefan Burger
Craissheimer Str. 2a • 91550 Dinkelsbühl
Fax: 09851-55 52 94 • Telefon: 09851-55 52 93
E-Mail: info@rechenstempel.de

www.rechenstempel.de

Idee & Gestaltung
Medien & Unterricht



Schülerbuch, je € 16,90

Band 1: ISBN 978-3-99035-443-8
Band 2: ISBN 978-3-99035-445-1
Band 3: ISBN 978-3-99035-738-5
Band 4: ISBN 978-3-99035-972-3

EINS PLUS

Zum neuen Schuljahr
vollständig für die
Klassen 1 bis 4!

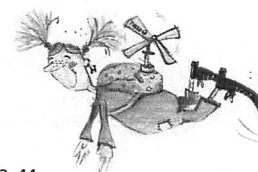
So spannend kann Mathematik sein!

EINS PLUS ist das **neue Lehrwerk** für die Grundschule, das bereits zum Schulbuch des Jahres 2017 nominiert wurde.

Ihr PLUS bei der Arbeit mit EINS PLUS:

- ▶ **AHA-Effekt von Anfang an:** Altersgerechter und lebensweltorientierter Zugang
- ▶ **Spielerische Entdeckungsreise:** Spannende Abenteuergeschichten, interessante Aufgabenstellungen, motivierende Denksportaufgaben, Spiele und Rätsel
- ▶ **Zeitgemäße Unterstützung und optimale Differenzierungsmöglichkeiten:** Spannende Lernsoftware, Knobelpunkte und Fördermaterial

**Fordern Sie Ihre kostenlosen
PRÜFEXEMPLARE an!**



www.helbling-verlag.de/einsplus



Helbling Verlag GmbH
73728 Esslingen · Martinstr. 42-44
Tel.: +49 711 758701-0
Fax: +49 711 758701-11
E-Mail: service@helbling.com

2740/02-18

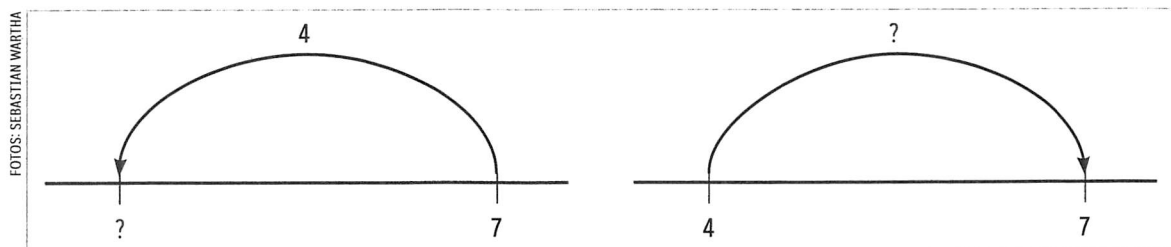
Minus: Mach den Unterschied!

Wegnehmende oder unterschiedsbestimmende Strategien bei Subtraktionsaufgaben bewusst auswählen

► Halbschriftlich rechnen, Differenz, Rechenstrich

Aufgaben wie $41 - 39$ oder $501 - 498$ können besonders schnell über die Ermittlung der Differenz beider Zahlen gelöst werden. Studien und Unterrichtserfahrung zeigen, dass die wenigsten Kinder diese effektive Strategie nutzen. Die meisten Lernenden bearbeiten solche Aufgaben zeitraubend und fehleranfällig über wegnehmende Strategien oder den schriftlichen Algorithmus.

1 Subtraktion als Wegnehmen (links) und als Unterschied (rechts)



VON SEBASTIAN WARTHA,
CORINNA FORCHER, LUKAS FINKE,
MELANIE ZIMMERMANN

In der vorgestellten Unterrichtssequenz sollen Kinder der zweiten Jahrgangsstufe entscheiden lernen, ob bzw. wann eine Subtraktionsaufgabe leichter über eine Strategie des Wegnehmens oder des Unterschiedbestimmens bearbeitet wird. Durch die Kommunikation über und die Darstellung von Rechenwegen werden nicht nur die beiden Grundvorstellungen zur Subtraktion wiederholt und vernetzt, sondern auch Zahlbeziehungen und Zahlvorstellungen genutzt und vertieft.

Nutzung der beiden Grundvorstellungen zur Subtraktion

Je nach Zahlenmaterial einer Subtraktionsaufgabe ist die Nutzung von wegnehmenden oder von unterschiedsbestimmenden Strategien nahe liegender.

Grundvorstellungen zur Subtraktion

Grundvorstellungen ermöglichen die Interpretation von mathematischen Ideen auf verschiedenen Darstellungsebenen. Der Rechenausdruck $7 - 4$ kann handelnd so interpretiert werden, dass von sieben Plättchen vier weggenommen werden. Das Ergebnis (drei) sind die verbleibenden Plättchen. Ikonisch kann der Term am Rechenstrich dargestellt werden: Ein Pfeil der Länge 4 startet bei 7 nach links. Das Ergebnis ist an der Pfeilspitze zu sehen (siehe Abb. 1 links).

Subtrahieren bedeutet nicht nur Wegnehmen, sondern auch die Bestimmung des Unterschieds zweier Zahlen (vgl. Selzer u. a. 2012). So ist $7 - 4$ auch der passende Rechenausdruck bei der Textaufgabe „Anton hat vier Plättchen, Sophie hat sieben Plättchen. Wie viele hat sie mehr als Anton?“. Am Rechenstrich würde mit der Unterschieds-Grundvorstellung der Term dargestellt werden, indem die Positionen 4 und 7 markiert werden. Das Ergebnis ist nun Länge des Pfeiles, der den Unterschied angibt (siehe Abb. 1 rechts).

Nutzung von unterschiedsbestimmenden Strategien beim Rechnen

Zahlreiche Studien zeigen auf, dass Subtraktionsaufgaben mit nahe beieinanderliegenden Zahlen besonders fehleranfällig sind. In der zweiten Jahrgangsstufe wurde 41–39 von 28% der befragten rund 2000 Kinder korrekt gelöst (vgl. Schipper u. a. 2011). Die Aufgabe 701–698 wurde in der dritten und vierten Jahrgangsstufe von weniger als der Hälfte der knapp 300 Lernenden (vgl. Selzer 2000) und in der fünften Jahrgangsstufe von etwa 60% der Befragten richtig gelöst. Von den rund 300 interviewten Fünftklässlern konnten nur 13% das Ergebnis „schnell“ durch Angabe der Differenz lösen.

Auffällig ist, dass viele Lernende die Nähe der Zahlen zwar erkannten, sie jedoch das Minuszeichen nicht als Frage nach dem Unterschied interpretieren konnten (vgl. Wartha u. a. 2014). Daher lösten sie diese Aufgaben mehrheitlich über wegnehmende Strategien oder einen schriftlichen Algorithmus (vgl. Torbeyns/Verschaffel 2013).

Diese Befunde sind problematisch. Einerseits sind die wegnehmenden Rechenwege umständlich und fehleranfällig. Andererseits bedeutet eine einseitige oder ausschließliche Interpretation der Subtraktion als Wegnehmen, dass Textaufgaben in Differenzkontexten („Matthias ist 33 Jahre alt, Sebastian ist 40, wie viele Jahre ist er älter?“) nicht mit der Subtraktion (40–33) in Verbindung gebracht werden.

Kommunizieren, Argumentieren und Darstellen von Rechenwegen

In der vorgestellten Unterrichtssequenz sollen die Lernenden die beiden Grundvorstellungen zur Subtraktion zur Berechnung von Subtraktionsaufgaben nutzen und reflektiert einsetzen lernen. Die Subtraktionsaufgaben werden als Textaufgaben und als Rechenausdrücke gestellt. Die Kommunikation der Rechenwege und die Argumentation der Entscheidung (Wegnehmen oder Unterschied?) erfolgen auf ikonischer Ebene am Rechenstrich.

Der Rechenstrich ist ein Zahlenstrahl ohne Markierungen und Einheiten. Er ist aufgrund der fehlenden Markierungen zwar keine Lösungshilfe, jedoch ein hervorragendes Arbeitsmittel zur Darstellung und Diskussion von Rechenstrategien. Bei der beschriebenen Unterrichtsreihe wurde der Rechenstrich bereits zu einem früheren Zeitpunkt thematisiert.

Unterrichtseinheit: Wegnehmen oder Unterschied bestimmen?

Differenzierender Einstieg und Diagnose (1. Stunde)

In der ersten Stunde der Unterrichtsreihe wurden die Lernenden aufgefordert, die Aufgabe 41–39 zu



Auf einen Blick

Klassenstufe: 2 (mit entsprechenden Aufgaben in anderen Zahlenräumen auch 3, 4, 5, 6)

Zeit: 5 Unterrichtsstunden

Lerngelegenheiten:

- Grundvorstellungen Subtraktion als Wegnehmen und als Unterschiedsbestimmung
- passender und flexibler Einsatz von Subtraktionsstrategien
- Kommunizieren über Rechenwege
- Darstellen von Rechenstrategien am Rechenstrich

Lernvoraussetzungen:

- Rechenstrich als Kommunikationsmittel über Rechenstrategien
- Grundvorstellung zur Subtraktion als Wegnehmen
- Grundvorstellungen zu Zahlen als Menge und als Position im Zahlenraum bis 100

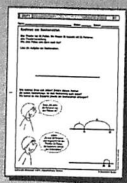
Materialien

M1: Rechnen am Rechenstrich

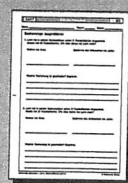
M2: Rechenwege ausprobieren

M3: „Unterschied bestimmen“ oder „Wegnehmen“?

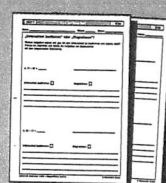
M4: Minusaufgaben mit dem Unterschied bestimmen



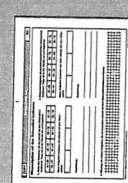
M1
Seite 26



M2
Seite 27



M3a-b
Seite 28



M4
Seite 29

bearbeiten und den Lösungsweg zu dokumentieren. Das Darstellen des Lösungswegs durch die Schülerinnen und Schüler konnte durch Terme, über einen Rechenstrich oder alternativ auch durch eine Zeichnung erfolgen.

Dieser Einstieg hat mehrere Zielsetzungen:

1. Er ist differenzierend, da leistungsstärkere Lernende aufgefordert werden können, weitere Wege und Darstellungen zur Lösung der Aufgabe 41–39 zu finden und einen besonders effektiven auszuwählen. Langsamere Rechner erhalten hingegen viel Zeit für *eine* Bearbeitung der Aufgabe.

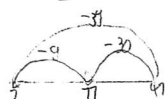
2 Leon löst die Aufgabe über Wegnehmen am Rechenstrich, Leander durch Unterschiedsbestimmung.

Rechne die Aufgabe 41-39. Beschreibe, zeichne ... deine Vorgehensweise.

$$47 - 39 = 2$$

$$47 - 30 = 17$$

$$17 - 9 = 2$$



Rechne die Aufgabe 41-39. Beschreibe, zeichne ... deine Vorgehensweise.

47-39=2 ich habe bei 39 angekommen zu zählen bis 47 und dann habe ich 2 Zahlen gezählt deswegen ist das Ergebnis 2

2. Die Lehrperson hat Zeit und Möglichkeit, sich einen Überblick über die Strategien, die Kompetenzen und Defizite ihrer Lernenden zu verschaffen. Sie sammelt Impulse für die anschließende Rechenkonferenz zu verschiedenen Lösungswegen der Kinder.

3. Er ist die Diskussionsgrundlage für die Rechenkonferenz, bei der ein Ergebnis sein soll, dass die Lösung auch durch Bestimmung des Unterschieds erfolgen kann.

Bei der Darstellung am Rechenstrich ist insbesondere zu beachten, dass das Ergebnis nicht bei der Zielposition eingetragen und abgelesen wird, sondern auf dem Pfeil. Es wird die Konvention eingeführt, dass ein Kreis um die Zahl das Ergebnis angibt.

Die Wege und Darstellungen der Lernenden waren sehr vielfältig. Es wurden sowohl wegnehmende als auch unterschiedsbestimmende Strategien verwendet. Diese wurden sowohl ikonisch (Rechenstrich) als auch symbolisch (Gleichungen) oder durch Text beschrieben. Ein Kind hat 41 Kreise gezeichnet und hat nach Durchstreichen von 39 Kreisen auch das Ergebnis 2 bestimmt.

Die Lernenden haben nach dem „Ich-Du-Wir-Prinzip“ zunächst in Einzelarbeit eine Strategie zur Aufgabe dokumentiert und sie anschließend mit ihrem Lernpartner diskutiert. Schließlich

wurden im Plenum (Kinositz) ausgewählte Strategien vorgestellt und diskutiert. Für die Diskussion der Aufgabe 41-39 wurden 45 Minuten eingeplant.

Erarbeitung und Diskussion der beiden Rechenrichtungen (2. bis 4. Stunde)

Die Lernenden wurden aufgefordert, eine Textaufgabe mithilfe des Rechenstrichs zu lösen (siehe M1): *Das Theater hat 32 Plätze. Die Klasse 2b besucht mit 28 Personen eine Theatervorstellung. Wie viele Plätze sind dann noch frei?* Nach der eigenen Bearbeitung wurden ihnen zwei Bearbeitungswege vorgelegt: Die Aufgabe 32-28 wird am Rechenstrich von Svea wegnehmend und von Julian durch Nutzung des Unterschieds gelöst.

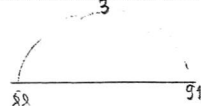
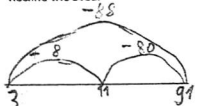
Die Kinder sollten zunächst diese Wege vergleichen. Anschließend diskutierten sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede mit ihrem eigenen Lösungsweg („Was ist am Rechenstrich gleich, was ist verschieden?“). Sie nahmen anschließend eine Bewertung vor („Wie findet man das Ergebnis schneller?“) und erklärten ihren Weg ihrem Lernpartner.

Auf dieser Grundlage bearbeiteten die Lernenden nun verschiedene Textaufgaben auf zwei Wegen am Rechenstrich (siehe M2): wie Svea

1. Levin hat in seinem Sammelalbum schon 91 Ninjakarten eingeordnet. Alessio hat 88 Ninjakarten. Wie viele Karten hat Levin mehr?

Rechne wie Svea.

Bestimme den Unterschied wie Lea-Marie.



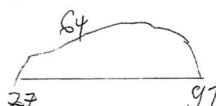
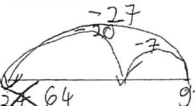
Welcher Rechenweg ist geschickter? Begründe.

Lea-Marie's Weg ist besser weil 91 und 88 nicht so einen langen Weg zu einander haben.

2. Levin hat in seinem Sammelalbum schon 91 Ninjakarten eingeordnet. Madita hat 27 Ninjakarten. Wie viele Karten hat Levin mehr?

Rechne wie Svea.

Bestimme den Unterschied wie Lea-Marie.

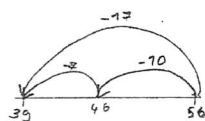


Welcher Rechenweg ist geschickter? Begründe.

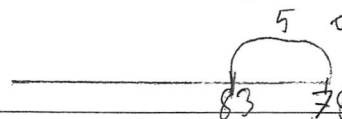
Lea-Marie
weil so viel Abstand ist

3 Je nach Zahlenmaterial ist es geschickter, den Unterschied zu bestimmen (links) oder wegzunehmen (rechts).

b. $56 - 17 =$

Unterschied bestimmen: ☐Wegnehmen: ☒weil die Zahlen weit aus
einander sind.

d. $83 - 78 =$

Unterschied bestimmen: ☒Wegnehmen: ☐weil die Zahlen ganz nah
aneinander
sind.

(durch Wegnehmen) und wie Julian (durch Unterschiedsbestimmung). Jedes Kind konnte auswählen und begründen, welcher Weg mit weniger Aufwand verbunden ist und warum.

Auf einem weiteren Arbeitsblatt werden nun keine Textaufgaben, sondern Subtraktionsterme zur Berechnung vorgelegt (siehe M3). Die Kinder sollen jetzt nicht mehr beide Wege einzeichnen, sondern bereits vor Aufgabebearbeitung entscheiden, ob sie wegnehmen oder den Unterschied bestimmen wollen. Ausreichend Platz für die Darstellung des Lösungswegs (z. B. am Rechenstrich) ermöglicht die anschließende Diskussion verschiedener Lösungswege. Die Kommunikation beschränkt sich nicht nur auf die verschiedenen Bearbeitungswege und Rechenrichtungen, sondern wird erweitert auf Begründungen für die Entscheidung der Rechenrichtung. Das Hauptargument für die Bearbeitung über die Differenz ist die Nähe der Zahlen des Terms.

Abschluss: Reflexion und Kreativität (5. Stunde)

Den Abschluss bildet ein Arbeitsblatt, bei dem aus acht Aufgaben diejenigen ausgewählt werden sollen, die über Unterschied schnell bestimmt werden können, und diejenigen, bei denen sich wegnehmende Strategien anbieten (siehe M4). Die Lernenden sollten noch einmal argumentieren, wie sie die Entscheidung treffen.

Auf dieser Grundlage sollten sie nun selber Aufgaben erfinden, die leicht über die Differenzbildung zu lösen sind. Sie nutzen hierbei ihre Argumentation auf der Metaebene (Zahlen sind nahe beieinander), um nun selbst „Unterschiedsaufgaben“ zu konstruieren.

Fazit

Die Lernenden haben sich in dieser Einheit nicht nur intensiv mit der bisweilen „stiefmütterlich“ behandelten Grundvorstellung der Subtraktion als Unterschied beschäftigt, sondern ihren Zahlenblick geschult und Zahlbeziehungen zur effektiven Berechnung von Termen genutzt. Das

Darstellen von Lösungswegen und die Kommunikation darüber ist differenzierend und unterstützt die Ausbildung der prozessbezogenen Kompetenzen. Wir schlagen vor, dass die Unterrichtseinheit durch Anpassung des Zahlenmaterials (501 – 498 oder 2,02 – 1,99) auch in anderen Zahlenräumen und -bereichen in höheren Jahrgangsstufen durchgeführt wird. ■

Die Autorinnen/die Autoren

Dr. Sebastian Wartha ist Professor am Institut für Mathematik der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe.

Corinna Forcher ist Grund- und Hauptschullehrerin und Lehrbeauftragte an der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe.

Lukas Finke ist wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mathematik der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe.

Melanie Zimmermann ist Lehramtsanwärterin für das Lehramt an Grundschulen in Baden-Württemberg.

Literatur

■ **Schipper, Wilhelm/Wartha, Sebastian/von Schroeders, Nicolai:** Bielefelder Rechentest. Hannover 2011

■ **Selter, Christoph:** Vorgehensweisen von Grundschüler(in)en bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 1000. In: Journal für Mathematik-Didaktik, Heft 21-2000 (3-4), S. 227-258

■ **Selter, Christoph/Prediger, Susanne/Nührenböcker, Markus/Hußmann, Stephan:** Taking away and determining the difference – a longitudinal perspective on two models of subtraction and the inverse relation to addition. In: Educational Studies in Mathematics, Heft 79-2012 (3), S. 389-408

■ **Torbeyns, Joke/Verschaffel, Lieven:** Efficient and flexible strategy use on multi-digit sums: a choice/no-choice study. In: Research in Mathematics Education, Heft 15-2013 (2), S. 129-140

■ **Wartha, Sebastian/Benz, Christiane/Finke, Lukas:** Rechenstrategien und Zahlvorstellungen von Fünftklässlern im Zahlenraum bis 1000. In: Roth, Jürgen/Ames, Judith (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2014. Band 2: Beiträge zur 48. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 10. bis 14. März 2014 in Koblenz. Münster 2014, S. 1275-1278

4 Sind die Zahlen nicht nahe beieinander, lohnt sich *wegnehmen* (links). Sind Zahlen dicht beieinander, ist *Unterschied bestimmen* schneller.

Name: _____ Klasse: _____ Datum: _____

Rechnen am Rechenstrich

Das Theater hat 32 Plätze. Die Klasse 2b besucht mit 28 Personen eine Theatervorstellung.

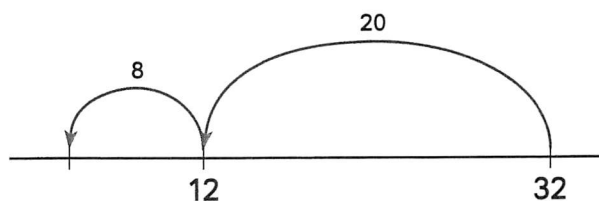
Wie viele Plätze sind dann noch frei?

Löse die Aufgabe am Rechenstrich.

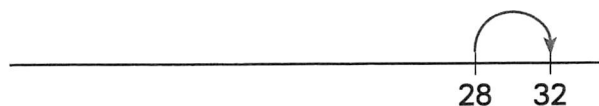
Wie rechnen Svea und Julian? Erkläre deinem Partner die beiden Rechenwege. Ist dein Rechenweg auch dabei? Wo kannst du das Ergebnis jeweils am Rechenstrich eintragen?



Svea: „Ich ziehe die Personen von den Plätzen ab.“



Julian: „Es sind 28 Personen und insgesamt hat das Theater 32 Plätze. Ich bestimme schnell den Unterschied.“



Name: _____ Klasse: _____ Datum: _____

Rechenwege ausprobieren

1. Levin hat in seinem Sammelalbum schon 91 Fussballkarten eingeordnet.
Alessio hat 88 Fussballkarten. Wie viele Karten hat Levin mehr?

Rechne wie Svea.

Bestimme den Unterschied wie Julian.

Welcher Rechenweg ist geschickter? Begründe.

2. Levin hat in seinem Sammelalbum schon 91 Fussballkarten eingeordnet.
Madita hat 27 Fussballkarten. Wie viele Karten hat Levin mehr?

Rechne wie Svea.

Bestimme den Unterschied wie Julian.

Welcher Rechenweg ist geschickter? Begründe.



Name: _____ Klasse: _____ Datum: _____

„Unterschied bestimmen“ oder „Wegnehmen“?

Welche Aufgaben eignen sich gut, um den Unterschied zu bestimmen und welche nicht?
Kreuze an, begründe und rechne die Aufgaben am Rechenstrich
mit dem angekreuzten Rechenweg.

a. $71 - 69 =$ _____

Unterschied bestimmen: ☐Wegnehmen: ☐

b. $56 - 17 =$ _____

Unterschied bestimmen: ☐Wegnehmen: ☐

Minusaufgaben mit dem Unterschied bestimmen

1. Finde drei Aufgaben, die du *schnell* mit dem Unterschied bestimmst. Trage sie in die Tabelle ein und begründe.

41 – 38	56 – 17	82 – 78	45 – 18
50 – 47	61 – 25	94 – 36	22 – 19

Diese Aufgaben bestimme ich *schnell* mit dem Unterschied:

--	--	--

Begründung:

2. Finde drei Aufgaben, die du *nicht schnell* mit dem Unterschied bestimmst. Trage sie in die Tabelle ein und begründe.

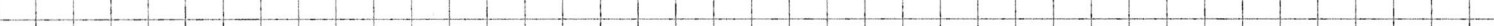
41 – 38	56 – 17	82 – 78	45 – 18
50 – 47	61 – 25	94 – 36	22 – 19

Diese Aufgaben bestimme ich *nicht schnell* mit dem Unterschied:

--	--	--

Begründung:

3. Überlege dir weitere Aufgaben, die du besonders schnell mit dem Unterschied bestimmen kannst.



„Das geht dann einfacher.“

Strategien für halbschriftliche Multiplikation in Rechenkonferenzen diskutieren

► Halbschriftlich rechnen, Multiplikation, geschicktes Rechnen

Für die halbschriftliche Multiplikation gibt es unterschiedliche Strategien. Wie gewinnbringend Kinder diese Strategien für ihre eigenen Rechnungen nutzen können, hängt auch von ihrem Wissen über Zahlbeziehungen ab. In diesem Zusammenhang ist es besonders wichtig, dass verschiedene Lösungswege erklärt und diskutiert werden. Dabei können verschiedene Notationsformen und Materialien unterstützen.

FOTOS: SOLVEIG JENSEN

11 · 12 = 133
~~44 · 10 = 440~~
~~120~~
~~120~~
 120 + 12 = 132
 127 + 12 = 139

1 Saras Fehler beim Nutzen einer Hilfsaufgabe: Sie addiert zweimal 12 statt 11. Die richtige Ergänzung des Zwischenergebnisses ist ein häufig auftretendes Problem.

VON SOLVEIG JENSEN

Beim „halbschriftlichen Rechnen“ handelt es sich um eine Form des geschickten Kopfrechens, bei dem Zwischenschritte oder -ergebnisse notiert werden. Bis in die 1990er-Jahre wurde es als Vorbereitung auf das schriftliche Rechnen verstanden. Damit einher ging eine Vorgabe von halbschriftlichen Strategien. Heute werden stattdessen vor dem Hintergrund des aktiv-entdecken-

den Lernens individuelle Zugänge betont. Es geht dabei um das geschickte Nutzen von Zahleigenschaften (z.B. 9 ist Nachbar von 10), um sich das Rechnen zu vereinfachen. Dafür sind fundiertes Wissen über Zahlbeziehungen und ein flexibler Umgang damit wesentliche Voraussetzungen.

Idealtypische Strategien

Eine wichtige Basis für die Handhabung der halbschriftlichen Multiplikation ist, dass die Schülerinnen und Schüler flexibel mit den Aufgaben des Einmaleins umgehen können und gelernt haben, Ergebnisse von ihnen bekannten Aufgaben abzuleiten (z.B. das Ergebnis von $9 \cdot 7$ von der Nachbaraufgabe $10 \cdot 7$). Außerdem müssen die Schülerinnen und Schüler Zahlen in die einzelnen Stellenwerte zerlegen können. Beim halbschriftlichen Rechnen werden aber weiterhin mehrstellige Zahlen betrachtet und nicht einzelne Ziffern pro Stelle verrechnet, wie es beim schriftlichen Rechnen geschieht.

Bei der Multiplikation werden vier idealtypische Strategien unterschieden:

Beim *stellenweisen Rechnen* werden beide Faktoren in ihre Stellenwerte zerlegt und diese einzeln miteinander multipliziert. So wird $11 \cdot 12$ verändert zu $10 \cdot 10 + 10 \cdot 2 + 1 \cdot 10 + 1 \cdot 2$.

Beim *schrittweisen Rechnen* wird einer der Faktoren in zwei Summanden zerlegt, z.B. wird bei $13 \cdot 12$ die 13 als $10 + 3$ dargestellt. Damit wird die

Aufgabe in zwei Teilrechnungen zerlegt ($10 \cdot 12$ und $3 \cdot 12$), deren Ergebnisse addiert werden.

Für eine *Hilfsaufgabe* wird einer der Faktoren verkleinert oder vergrößert, sodass das Ergebnis der Hilfsaufgabe nur noch leicht angepasst werden muss. Beispielsweise könnte das Kind für die Berechnung der Aufgabe $13 \cdot 12$ die Aufgabe $12 \cdot 12$ auswendig wissen und zu 144 dann einmal 12 addieren, weil eine 12 mit der Hilfsaufgabe zu wenig malgenommen wurde.

Bei der *Vergleichsaufgabe* hingegen werden beide Faktoren gegensinnig verändert, indem der eine Faktor durch eine natürliche Zahl dividiert und der andere mit der gleichen Zahl multipliziert wird. Bei $11 \cdot 12$ könnte die 6 als Teiler der 12 genutzt werden: $11 \cdot 12 = 66 \cdot 2 = 132$. Zur Anwendung dieser Strategien ist viel Wissen über Zahleigenschaften erforderlich – wie hier beispielsweise das Wissen über Teiler der 12.

Zu beachten ist, dass sich die Strategien der Kinder nicht immer klar einer idealtypischen Strategie zuordnen lassen, auch weil Mischformen vorkommen. Die Lehrkraft muss die idealtypischen Strategien kennen, um die Flexibilität der Kinder mit passenden Aufgaben und Impulsen zur Diskussion zu erhöhen und ihre Gedankengänge nachvollziehen zu können.

Schwierigkeiten und typische Fehler beim halbschriftlichen Multiplizieren

Bei allen Strategien gehören zu den Fehlerursachen Rechenfehler bei den Teilmultiplikationen bzw. -divisionen oder der Addition bzw. Subtraktion der Teilergebnisse.

Beim schrittweisen Rechnen ist eine falsche Zerlegung von Faktor oder Dividend eine weitere Fehlerursache. Beim Einsatz einer Hilfsaufgabe wird das errechnete Zwischenergebnis falsch korrigiert. Sara (siehe Abb. 1) hat sich zunächst bei $11 \cdot 12$ für die Zerlegung von 12 in 10 und 2 entschieden und berechnet die erste Teilrechnung $11 \cdot 10$. Danach scheint sie erst richtig 11 zu addieren, gerät aber durcheinander und ergänzt schließlich zweimal 12 statt 11.

Das stellenweise Rechnen für die Multiplikation ist aufwendig und kompliziert. Man braucht ein tragfähiges Verständnis für die stellenweise Zerlegung der beiden Faktoren und muss den Überblick über erledigte und noch zu bearbeitende Teilaufgaben behalten. Alina verliert ihn in Abbildung 2 und vergisst eine Teilrechnung. Sofia erfindet hingegen eine dazu (siehe Abb. 3).

Eine Fehlerursache bei der Multiplikation liegt darin, dass Kinder die Vorgehensweise von der stellenweisen Addition übertragen (siehe Abb. 4), bei der Zehner und Einer separat berechnet werden. Bei der Multiplikation sind aber mehr Teilrechnungen notwendig.



Auf einen Blick

Klassenstufe: 3

Zeit: 15–20 Unterrichtsstunden

Lerngelegenheiten:

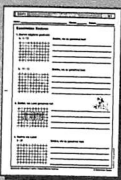
- halbschriftliches Rechnen von Multiplikationsaufgaben,
- Nachvollziehen verschiedener Strategien für die halbschriftliche Multiplikation,
- Diskussion der Vor- und Nachteile verschiedener Lösungswege bei unterschiedlichen Multiplikationsaufgaben

Lernvoraussetzungen:

- flexibler Umgang mit den Aufgaben des Einmaleins
- Ableitung der Ergebnisse von Multiplikationsaufgaben von bekannten Multiplikationsaufgaben
- Zerlegung einer Zahldarstellung in ihre einzelnen Stellenwerte

Materialien

M1: Geschicktes Rechnen



M1
Seite 34

$$11 \cdot 12 = 130$$

$$10 \cdot 10 = 100$$

$$2 \cdot 10 = 20$$

$$10 \cdot 1 = 10$$

$$11 \cdot 12 = 133$$

$$10 \cdot 10 = 100$$

$$10 \cdot 2 = 20$$

$$10 \cdot 1 = 10$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

$$1 \cdot 2 = 2$$

2 Alina vergisst eine Teilrechnung.

3 Sofia ergänzt eine überflüssige Teilrechnung.

Fördern und Fordern

Der Umgang mit halbschriftlicher Multiplikation ist selbstdifferenzierend, da jedes Kind auf einem ihm möglichen und naheliegenden Weg arbeitet. Für den Austausch in Rechenkonferenzen profitieren in heterogenen Gruppen leistungsschwache wie -starke Schülerinnen und Schüler vom gegenseitigen Erklären und Nachvollziehen der Lösungswege.

Beim stellenweisen Rechnen besteht die Gefahr, dass die Schülerinnen und Schüler die Schritte dieses komplexen Verfahrens unverstanden abarbeiten.

Halbschriftliche Rechenstrategien im Unterricht

Um Kinder von Anfang an zu unterstützen, aufgabenbezogen jeweils eine gut geeignete Strategie auszuwählen, eignet sich ein „problemlöseorientierter Ansatz“, der die Analyse verschiedener Aufgaben in den Mittelpunkt stellt (bei Schwabe u.a. 2014 für die Addition und Subtraktion beschrieben). Zentraler Bestandteil dieses Ansatzes ist die Sortierung von Aufgaben nach drei Aufgabentypen:

1. „schöne Aufgaben“ (Lösung ist sofort ablesbar),
2. Aufgaben, die mithilfe einer Strategie auf schöne Aufgaben zurückzuführen sind,
3. andere Aufgaben, die aufwendiger zu rechnen sind.

Daran schließt eine Reihe von Stunden mit Rechenkonferenzen zur Diskussion von Lösungswegen der Kinder an. Dafür werden jeweils zunächst von den Kindern in Einzelarbeit Lösungswege für einige Aufgaben erarbeitet. Dafür kann M1 eingesetzt werden. Der Arbeitsauftrag „Rechne mög-

lichst geschickt“ soll zum Nachdenken über die Aufgabenmerkmale anregen. Mithilfe des Auftrags „Erkläre, wie du gerechnet hast“ bereitet sich jedes Kind auf die Rechenkonferenz vor: Eine solche Rechenkonferenz folgt anschließend.

Die Lehrkraft übernimmt in der Phase der Rechenkonferenzen eine moderierende Rolle. Sie greift nicht inhaltlich in die Diskussion der Kinder ein. Stattdessen fordert sie Kinder auf, mit ihren Worten noch einmal zu wiederholen, und führt vor, wie genaues Nachfragen aussehen kann („Wie bist du jetzt darauf gekommen, dass ...?“). Sie hebt Überlegungen von Kindern hervor, wenn diese unterzugehen drohen (vgl. Götze 2007).

Bringt kein Kind einen Lösungsweg über Hilfs- oder Vergleichsaufgabe ein, sollten Impulse von der Lehrkraft gegeben werden, wie er auf dem Arbeitsblatt eingearbeitet ist: Ein Rechenweg eines fiktiven Kindes wird nachvollzogen („Rechne wie ...“) und im Plenum diskutiert.

Die Bewertung verschiedener Wege ist nicht einfach, weil es keine allgemeinen Kriterien für einen sinnvollen Strategieeinsatz gibt. Ist z. B. Luisas Nutzung einer Hilfsaufgabe besser geeignet als ein stellenweises Vorgehen ($4 \cdot 10$ und $4 \cdot 2$)? Im Mittelpunkt der Erarbeitung steht, ein geschicktes Vorgehen zu finden, um sich den Rechenweg so leicht wie möglich zu machen. Es ist toll, wenn man Wissen über mathematische Beziehungen nutzen kann, aber es spielt eben auch eine Rolle, ob ein Kind diese Beziehungen erfassen und verwerten kann. Insofern ist ein umständlicher Weg nicht falsch, sondern ggf. langsamer und deshalb unter Umständen weniger geschickt. Dies muss in der Gruppe ausgehandelt und begründet werden. So werden auch allgemeine mathematische Kompetenzen wie *Kommunizieren*, *Argumentieren* und *Darstellen* gefördert.

Zur Darstellung und Veranschaulichung von Rechenwegen

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, halbschriftliche Rechenwege zu protokollieren. Dabei müssen unterschiedliche Zielsetzungen beachtet werden: Dient die Notation als Gedächtnisstütze für das rechnende Kind oder dient sie dazu, den Rechenweg für andere darzustellen, um ihn diskutieren zu können? Wie bei den Strategien gilt auch für die Notationen, dass sie nicht streng vorgegeben werden, um das flexible Eingehen auf spezifische Gegebenheiten der Aufgabe nicht zu hemmen.

Für die Darstellung der Strategien wurde oben die Gleichungsschreibweise genutzt. Teilrechnungen werden dabei einzeln notiert. Bei der Rechnung des Kindes in Abbildung 5 muss z. B. die 12 im zweiten Schritt subtrahiert werden, weil sie vorher einmal zu viel multipliziert wurde. Dieser Zusammenhang sollte verbal

$$11 \cdot 12 = 102$$

$$10 \cdot 10 = 100$$

$$1 \cdot 2 = 2$$

$$100 + 2 = 102$$

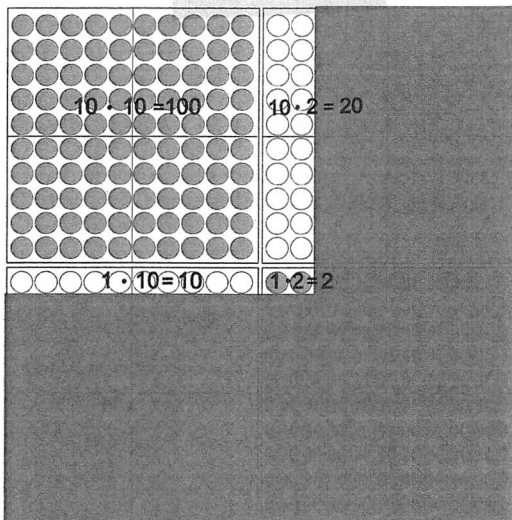
4 Toni versteht stellenweises Multiplizieren als Zehner mal Zehner und Einer mal Einer.

$$12 \cdot 4 = 48$$

$$12 \cdot 5 = 60$$

$$60 - 12 = 48$$

5 Ibo notiert in Gleichungsschreibweise und benutzt die Hilfsaufgabe korrekt.



6 Stellenweises Multiplizieren lässt sich am Vierhunderterfeld sehr gut veranschaulichen.

$$16 \cdot 22 = 352$$

·	20	2	
10	200	20	220
6	120	12	132
	320	32	352

7 Stellenweise Multiplikation mit dem Malkreuz: Die Zerlegung der Faktoren ist leicht zu erkennen.

ergänzt werden. Dahinter steckt die Umrechnung $4 \cdot 12 = (4 + 1 - 1) \cdot 12 = (5 - 1) \cdot 12 = 5 \cdot 12 - 12$.

Die Gleichungsschreibweise ist also hilfreich als Gedächtnisstütze und somit als Kontrollmöglichkeit. Der notierte Rechenweg ist auch für andere nachvollziehbar. Vorteil ist die flexible Anpassbarkeit an alle Strategien.

Für die Multiplikation gibt es weitere Mittel zur Darstellung, aber auch zur Veranschaulichung, die über eine reine Protokollierung des Rechenwegs hinausgehen.

Ein Material zur Unterstützung bei Strategien zur Multiplikation ist das Vierhunderterfeld. Beim stellenweisen Rechnen wird zunächst das Feld mithilfe eines Winkels so abgedeckt, dass die Grundaufgabe $11 \cdot 12$ zu sehen ist (siehe Abb. 6). Durch die farbliche Darstellung der verschiedenen Hunderter wird die stellenwertgerechte Zerlegung beider Faktoren sichtbar und auch die vier Teilrechnungen.

Sind die Kinder mit der Felddarstellung der Multiplikation vertraut, haben sie mit dem Vierhunderterfeld ein Instrument für den Überblick über die nötigen Teilrechnungen zur Verfügung,

das gleichzeitig ihr Verständnis stützen und zur Erklärung genutzt werden kann.

Die mithilfe des Vierhunderterfelds ermittelte Zerlegung der Faktoren lässt sich in ein Malkreuz übertragen (siehe Abb. 7).

Hier wird übersichtlich dargestellt, wie die beiden Faktoren in ihre Stellenwerte aufgespalten werden und wie das Endergebnis berechnet wird. Das Malkreuz dient damit der Kontrolle der Strategie, da leere Felder auf fehlende Teilrechnungen hinweisen. Beachtet werden muss, dass das Endergebnis durch die spalten- oder zeilenweise Addition bestimmt wird, zur Kontrolle ist aber die Durchführung beider Wege sinnvoll (vgl. Müller/Wittmann 1992).

Fazit

Im Mittelpunkt der Thematisierung von halbschriftlichen Strategien zur Multiplikation steht die Anregung zur aufgabenbezogenen Strategiewahl aufgrund bestimmter Merkmale. Dies ist für Schülerinnen und Schüler wie auch für die Lehrkraft eine große Herausforderung, weil es keine einfache Einteilung für gute und schlechte Strategien gibt. Sie kann aber gelingen mit der häufigen Diskussion verschiedener Wege und ihrer Vor- und Nachteile. ■

Die Autorin

Dr. Solveig Jensen absolviert zurzeit ihr Referendariat an einer Bremer Grundschule.

Literatur

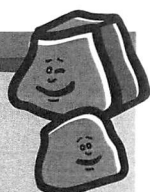
■ Götze, Daniela: Mathematische Gespräche unter Kindern. Hildesheim 2007

■ Müller, Gerhard/Wittmann, Erich: Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen. Stuttgart u. a. 1992

■ Schwabe, Julia/Grüßing, Meike/Heinze, Aiso/Lipowsky, Frank: Instruktionsstrategien zur Förderung der individuellen Kompetenz zur adaptiven Wahl von Additions- und Subtraktionsstrategien im Zahlenraum bis 1000. Ergebnisbericht. 2014. In: http://www.ipn.uni-kiel.de/de/das-ipn/abteilungen/didaktik-der-mathematik/dokumente/ergebnisbericht-tiger/at_download/file (29.06.2017)

STOLPERSTEIN

Rechenkonferenzen funktionieren meist nicht auf Anhieb. Das gegenseitige Zuhören und Verstehenwollen muss geübt werden. Deshalb ist die ständige Reflexion dieser Phase durch Rückmeldung der Lehrkraft und Selbstreflexionen zum eigenen Beitrag wichtig (vgl. Götze 2007).



Name: _____ Klasse: _____ Datum: _____

Geschicktes Rechnen

1. Rechne möglichst geschickt!

a. $4 \cdot 12$

Erkläre, wie du gerechnet hast:

b. 11 - 13

A blank grid for drawing a picture. The grid is 10 squares wide and 6 squares high. There are some faint, illegible marks in the bottom-left corner of the grid.

Erkläre, wie du gerechnet hast:

$\frac{1}{2}$

3. Erkläre, wie Luisa gerechnet hat!

		4	.	1	2	=	4	8
		5	.	1	2	=	6	0
6	0	-	1	2	=	4	8	



4. Rechne wie Luisa!

9 · 21

Erkläre, wie du gerechnet hast:

Jede Zeitschrift
mit umfassendem
Online-Archiv!

Alle Beiträge der
Themenhefte auch
zum Herunterladen!



Mathematik differenziert

2016

Heft	Titel	Best. Nr.
1	Geometrische Vorstellungen entwickeln* Bauwerke, Raum und Perspektive	23071601
2	Mathematik und Sprache Sprachliche Lernziele definieren und erreichen	23071602
3	Projekte im Mathematikunterricht 3-D-Modelle, magische Quadrate, Tabellenkalkulation, Zahlenbücher, Römische Zahlen	23071603
4	Algebraische Vorstellungen anbahnen* Terme, Gleichungen und Strukturen	23071604

2017

Heft	Titel	Best. Nr.
1	Digitale Medien Neue Zugänge für den Unterricht	23071701
2	Anfangsunterricht Kompetenzen entwickeln, Problemen vorbeugen	23071702
3	Muster entdecken, verstehen, fortsetzen	23071703
4	Knobeln Problemhaltige Aufgaben – regelmäßig und für alle Kinder	23071704

Deutsch differenziert

2016

Heft	Titel	Best. Nr.
1	Rechtschreibung verstehen* Lernwege – Lernhilfen – Lernangebote	23691601
2	Lesespiele* Lesekompetenz spielerisch fördern	23691602
3	Nach der Flucht* Ankommen in der neuen Sprache	23691603
4	Abenteuerliteratur Fantasiewelten entdecken, Medien produktiv nutzen	23691604

2017

Heft	Titel	Best. Nr.
1	Reformpädagogik Sprachmaterialien nutzen. Selbstständiges Lernen fördern	23691701
2	Deutsch als Zweitsprache Potenziale der Mehrsprachigkeit nutzen	23691702
3	Erzählen Motivierende Sprech- und Schreibenregungen	23691703
4	Spaß an Grammatik Anregungen für motivierende Aufgaben	23691704

Sachunterricht Weltwissen

2016

Heft	Titel	Best. Nr.
1	Sexualerziehung im Anfangsunterricht* Gefühle, Beziehungen, Zusammengehörigkeit	23701601
2	Luft-Phänomene Forschen und Experimentieren: Was kann Luft?	23701602
3	Die unglaubliche Kraft der Physik Hebel, Pendel, Flaschenzug, Wasserkraft, Rückstoß entdecken und verstehen	23701603
4	Winter mal ganz anders! Global – sozial – nachhaltig	23701604

2017

Heft	Titel	Best. Nr.
1	Eine Reise von der Urzeit bis heute Mit Kindern Evolution erforschen	23701701
2	Wasser neu entdeckt Hintergründe durchschauen – Zusammenhänge verstehen	23701702
3	Faszinierendes Salz Schmecken – Erforschen – Verwenden	23701703
4	Meine Klasse und ich Soziales Lernen im Sachunterricht	23701704

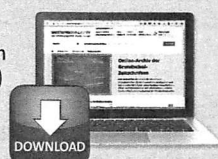
* Dieses Heft ist nicht mehr als Printausgabe erhältlich. Im Online-Archiv können Sie auf die dazugehörigen Inhalte zugreifen.

Das Online-Archiv!

Alle Ausgaben sind auch online erhältlich.

Alle Beiträge aus den Heften der letzten sieben Jahre stehen in unserem Online-Archiv zum Download zur Verfügung. Um zum jeweiligen Heft zu gelangen, geben Sie einfach die Bestellnummer im Suchfeld auf der Internetseite ein. Privat-Abonnenten (AboPlusWeb) laden die Beiträge ihrer abonnierten Zeitschrift kostenlos herunter.

www.die-grundschule.de/suche



www.mathematik-differenziert.de
www.deutsch-differenziert.de
www.sachunterricht-weltwissen.de

Gleich bestellen:

T. +49 531 708 8631

leserservice@westermanngruppe.de

westermann



Vorteile suchen, Sicherheit finden!



Unterrichtsanregungen für das halbschriftliche Multiplizieren

► Halbschriftlich rechnen, Rechenstrategien, Punktefelder

Wie beim Addieren und Subtrahieren sollten auch beim halbschriftlichen Multiplizieren unterschiedliche Strategien geeignet thematisiert werden. Im Idealfall wählen Kinder ihren Rechenweg dann je nach Aufgabe vorteilhaft. Dafür förderliche Maßnahmen, in einem Unterrichtsversuch erprobt, werden im folgenden Beitrag vorgestellt.



ILLUSTRATIONEN: ANTJE BOHNSTEDT

FOTOS: MARTINA GREILER-ZAUCHNER

$$15 \cdot 6 =$$

$$\begin{array}{l} 5 \cdot 6 = 30 \\ 10 \cdot 6 = 60 \\ \hline 90 \end{array}$$

1 Anwendung des Verteilungs- oder Distributivgesetzes: $15 \cdot 6$ als $5 \cdot 6 + 10 \cdot 6$

$$15 \cdot 6 =$$

$$\begin{array}{l} 2 \cdot 15 = 30 \\ 30 + 30 = 60 \\ 60 + 30 = 90 \end{array}$$

2 Verdoppeln: $15 \cdot 6$ als $(2 \cdot 15 + 2 \cdot 15) + 2 \cdot 15$

$$15 \cdot 6 =$$

$$\begin{array}{r} 15 \cdot 6 = 90 \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \\ 15 \quad 30 \quad 45 \quad 60 \quad 75 \quad 90 \end{array}$$

3 $15 \cdot 6$ durch wiederholtes Addieren eines Faktors

$$15 \cdot 6 =$$

$$\begin{array}{l} 65 \\ \leftarrow \\ 10 \cdot 6 = 60, 60 + 5 = 65 \end{array}$$

4 Falsche Übertragung des Verteilungs- oder Distributivgesetzes: $15 \cdot 6$ fehlerhaft als $10 \cdot 6 + 5$

VON MARTINA GREILER-ZAUCHNER
UND MICHAEL GAIDOSCHIK

Halbschriftliches Multiplizieren baut auf dem kleinen Einmaleins auf. Dessen Erarbeitung ist eine der großen Aufgaben im Mathematikunterricht des zweiten und dritten Schuljahrs. Schon dabei geht es um die Erarbeitung von *Ableitungsstrategien*: Auf Basis solider Grundvorstellungen zum Multiplizieren sollten Kinder zunächst lernen, sich aus wenigen Kernaufgaben (Verdoppeln, Verzehnfachen, Verfünffachen, Quadratzaufgaben) alle weiteren Einmaleins-Aufgaben rechnerisch zu erschließen (Gaidoschik 2015). Die dabei genutzten Strategien beruhen auf denselben Rechengesetzen, die später auch für das halbschriftliche Multiplizieren wichtig sind:

- Vertauschungs- oder Kommutativgesetz:

$$7 \cdot 2 = 2 \cdot 7$$

- Verbindungs- oder Assoziativgesetz:

$$4 \cdot 7 = (2 \cdot 2) \cdot 7 = 2 \cdot (2 \cdot 7) = 2 \cdot 14$$

- Verteilungs- oder Distributivgesetz:

$$6 \cdot 7 = (5 + 1) \cdot 7 = 5 \cdot 7 + 1 \cdot 7$$

$$9 \cdot 7 = (10 - 1) \cdot 7 = 10 \cdot 7 - 1 \cdot 7$$

Im Idealfall haben Kinder Mitte des dritten Schuljahres alle Aufgaben des kleinen Einmaleins weitgehend automatisiert und wissen weiterhin, wie diese Aufgaben miteinander zusammenhängen und abgeleitet werden können, sollte ihnen eine doch nicht „einfach einfallen“. Erst auf dieser Grundlage empfehlen wir die folgenden Schritte

Fördern und Fordern

- Ziel für alle Kinder: „Zerlegen und Plus“ für Aufgaben des Typs $ZE \cdot E$ / $E \cdot ZE$ verstehen, sicher anwenden, am 400-Punktefeld zeigen und erläutern
- Ziel für viele Kinder: Weitere, bei bestimmten Aufgaben vorteilhafte Rechenwege verstehen, passend anwenden, Wahl des Rechenwegs begründen

zur Erarbeitung des halbschriftlichen Multiplizierens – dann aber gestützt durch ermutigende Erfahrungen in acht dritten Klassen, in denen sie erprobt wurden.

Ein guter Einstieg: Standorte bestimmen!

Wie lassen sich Multiplikationen lösen, die das kleine Einmaleins überschreiten, wie etwa $13 \cdot 7$ oder $8 \cdot 23$? Kinder haben oder entwickeln dazu Ideen, noch ehe solche Aufgaben in der Klasse thematisiert wurden – insbesondere dann, wenn sie das Einmaleins wie oben skizziert erlernt haben. Diese Ideen durch eine schriftliche Standortbestimmung in Erfahrung zu bringen, ist ein guter Einstieg in die weiterführende, intensive Beschäftigung mit dem halbschriftlichen Multiplizieren.

Womit Sie vom Start weg rechnen dürfen/müssen

„Malaufgaben mit großen Zahlen: Darüber haben wir noch gar nicht gesprochen! Hast du trotzdem schon Ideen, wie man solche Aufgaben geschickt rechnen kann? Probiere es und schreibe auf, wie du rechnest!“ – Mit dieser Vorbemerkung wurden in den erwähnten Versuchsklassen Mitte des dritten Schuljahres unter anderem Aufgaben wie $15 \cdot 6$, $5 \cdot 17$ oder $65 \cdot 4$ gestellt. Etwa die Hälfte der Kinder übertrugen das von ihnen schon beim Lernen des kleinen Einmaleins vielfach genutzte Verteilungsgesetz von sich aus richtig auf den neuen Aufgabentypus (siehe Abb. 1). Andere vereinfachten die Aufgabe durch Rückgriff auf Verdoppelungen, auch dies eine Strategie, die ihnen schon beim kleinen Einmaleins hilfreich war (siehe Abb. 2). Etwa 15% aller Lösungen erfolgte durch wiederholtes Addieren eines Faktors (siehe Abb. 3).

Freilich tauchten auch fehlerhafte Rechenwege auf, die deutlich machen, dass das Übertragen von Strategien auf größere Zahlen keine Selbstverständlichkeit darstellt (siehe Abb. 4).

Der Lehrperson bietet eine solche Standortbestimmung zum einen die Möglichkeit, den Bedarf einzelner Kinder nach zusätzlicher Unterstützung in Erfahrung zu bringen. Zum anderen kann sie in



Auf einen Blick

Klassenstufe: 3

Zeit: 8–10 Unterrichtseinheiten
(nicht alle zur Gänze)

Lerngelegenheiten:

- verschiedene Rechenwege zur halbschriftlichen Lösung von Multiplikationen mit einem mehr als einstelligen Faktor auf Basis von Einsicht in operative Zusammenhänge entdecken, erarbeiten, festigen
- über Rechenwege kommunizieren
- Rechenwege begründen und bewerten
- Rechenwege zunehmend aufgabenadäquat wählen

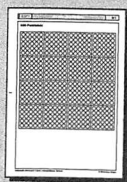
Lernvoraussetzungen:

- tragfähige Grundvorstellungen zur Multiplikation
- Verständnis von Ableitungsstrategien (operativen Zusammenhängen) im Bereich des kleinen Einmaleins
- Einmaleins sollte bereits weitgehend automatisiert sein
- grundlegende Einsichten ins dezimale Stellenwertsystem bis 1000

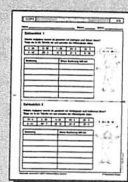
Materialien

M1: 400-Punktefeld

M2: Zahlenblick



M1



M2

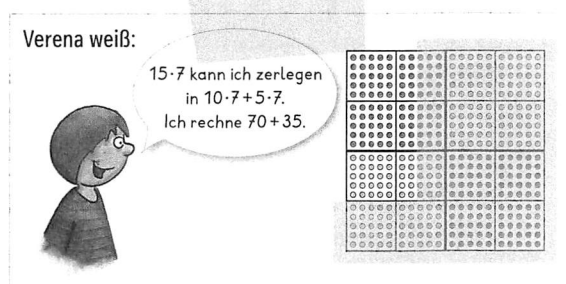
Seite 40

einer Rechenkonferenz an den von den Kindern gefundenen und erläuterten Rechenwegen weiterarbeiten. Dabei spielen Veranschaulichungen am 400-Punktefeld (**M1**) eine wichtige Rolle.

Gut für alle Tage: „Zerlegen und Plus“

Aufgaben des Typs $ZE \cdot E$ bzw. $E \cdot ZE$ können stets unter Verwendung des Verteilungsgesetzes als $Z \cdot E + E \cdot E$ gelöst werden. Ein geeignetes Darstellungsmittel, um dies für alle Kinder nachvollziehbar zu machen, ist das 400-Punktefeld. Das

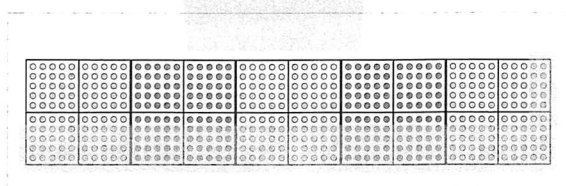
100-Punktefeld haben die Kinder schon im zweiten Schuljahr intensiv genutzt – zum Darstellen von Einmaleins-Aufgaben, aber auch von Ableitungswegen. Auf dieser Grundlage kann nun die Aufgabe aus Abbildung 5 gestellt werden.



5 Darstellung von $15 \cdot 7$ am 400-Punktefeld

Vermutlich werden einige Kinder $15 \cdot 7$ von sich aus durch Zerlegung in $10 \cdot 7$ und $5 \cdot 7$ lösen und am Punktefeld erläutern können, welche Teile des Feldes diesen Teilaufgaben entsprechen. Die Lehrperson kann sich dann zunächst auf das Moderieren und Verdeutlichen am Demonstrations-Punktefeld beschränken. Zu beachten ist aber, dass nicht nur das selbstständige Finden, sondern auch das Nachvollziehen einer solchen Strukturierung eine aktive gedankliche Leistung darstellt. Manche Kinder benötigen eine größere Anzahl ähnlicher Aufgaben, einzelne zusätzlich auch sehr deutliche Hinweise, um dies zu schaffen und die Strategie in weiterer Folge auch selbstständig auf Aufgaben dieses Typs übertragen zu können.

Am 400-Punktefeld können alle Malaufgaben des Typs $ZE \cdot E$ bzw. $E \cdot ZE$ mit Faktoren kleiner gleich 20 mit dem Malwinkel dargestellt werden. Den meisten Kindern gelingt es ohne weiteres, das „Zerlegen und Plus“ auf Aufgaben $ZE \cdot E/E \cdot ZE$ zu übertragen, in denen der zweistellige Faktor größer 20 ist. Einige benötigen dafür Darstellungen am 1000-Punktestreifen, an denen sie die entsprechende Zerlegung in zwei leicht zu berechnende Punktefelder mit mehr oder weniger Unterstützung entdecken bzw. nachvollziehen können.



6 Darstellung von $48 \cdot 6$ am 1000-Punktestreifen

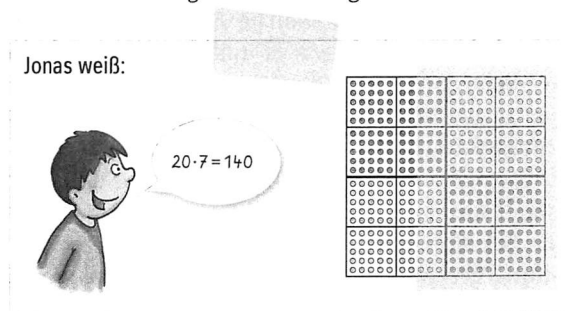
In den Versuchsklassen wurden von Kindern auch andere Zerlegungen als solche gemäß den Stellenwerten vorgeschlagen, etwa die Zerlegung von $16 \cdot 8$ in $8 \cdot 8 + 8 \cdot 8$. Mit Blick auf die übergeordneten Zielsetzungen des halbschriftlichen Rech-

nens war natürlich auch diese Variante von „Zerlegen und Plus“ willkommen (dieser Name wurde von Kindern vorgeschlagen). In den Konferenzen wurde dann diskutiert, ob der eine oder andere Rechenweg dem einen oder anderen Kind besser, einfacher... vorkommt und warum. Dies bot Anlass, in weiterer Folge Aufgaben eines ganz bestimmten Typs genauer in den Blick zu nehmen und zu überlegen, ob es dafür einfachere oder auch nur andere Wege gibt als „Zerlegen und Plus“: Multiplikationen zweistelliger Zahlen mit 9 oder 8 Einern.

Oft Vorteilhaft: „Zerlegen und Minus“

Schon bei der anfänglichen Standortbestimmung wurde die Aufgabe $8 \cdot 29$ von einzelnen Kindern als $8 \cdot 30 - 8$ gelöst. Um diesen Rechenweg, der für Zahlen mit 9 oder auch 8 Einern vorteilhaft sein kann, möglichst vielen Kindern zugänglich zu machen, sollten zu Beginn einer Einheit mehrere Aufgaben nur dieses Typs gestellt werden, verbunden mit der Aufforderung, dafür einen geschickten Rechenweg zu finden. Sofern einzelne Kinder von sich aus die nächstgrößere Zehnerzahl multiplizieren und im Sinne des Verteilungsgesetzes korrekt weiterrechnen, können diese Kinder aufgefordert werden, ihren Rechenweg den anderen zu erläutern.

Andernfalls empfiehlt es sich, diesen Rechenweg vorzugeben, etwa als Lösung eines fiktiven Kindes (siehe Abb. 7). Die Klasse soll dann darüber nachdenken, wie dieses Kind gedacht haben mag. Auch dieser Rechenweg (vielleicht „Zerlegen und Minus“ genannt) soll an Darstellungen am 400-Punktefeld verdeutlicht und begründet und auf weitere Aufgaben übertragen werden.



7 Darstellung von $19 \cdot 7$ am 400-Punktefeld

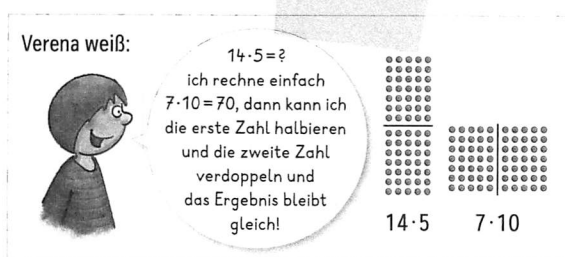
In weiterer Folge haben sich zwei Übungsformen besonders bewährt:

- Die Kinder sollen selbst Aufgaben erfinden, die sich für „Zerlegen und Minus“ besonders gut eignen.
- Aufgaben, für die „Zerlegen und Minus“ gut geeignet ist, und solche, wo dies nicht der Fall ist, werden gemischt (an der Tafel, auf Arbeitsblättern, auf Rechenkärtchen). Die Kinder sortieren (Aufgabe eignet sich für „Zerlegen und Minus“ oder nicht) und begründen ihre Wahl.

Für Profis: „Verdoppeln und Halbieren“

Ein nur in bestimmten Fällen möglicher, dann aber für manche Kinder sehr attraktiver Rechenweg beruht auf dem Verbindungsgesetz. So kann beispielsweise $15 \cdot 8$ zu $30 \cdot 4$ verändert und als $(3 \cdot 4) \cdot 10$ gelöst werden. Kinder der Versuchsklassen haben dafür „Verdoppeln und Halbieren“ als Name vorgeschlagen. Leonardo sprach im Interview treffend von „gegensinnigem Verändern“, wie er es wohl von seiner Lehrerin gehört hatte. Auch sonst beeindruckte er uns nachhaltig: Er sollte zu $5 \cdot 24$ unterschiedliche Rechenwege finden und bewerten. Leonardo nannte drei, an erster Stelle: „ $5 \cdot 24$ ist wie $10 \cdot 12$, also 120.“ Daneben gab er noch $5 \cdot 20 + 5 \cdot 4$ und $5 \cdot 30 - 5 \cdot 6$ als mögliche Wege an; letzterem bescheinigte er selbst „viel Aufwand“. „Gegensinnig Verändern“ war für ihn eindeutig „der allerschnellste Rechenweg, aber den kann man nicht immer einsetzen, weil der geht am allerbesten, wenn ein 5er ist und das andere eine gerade Zahl. Bei $17 \cdot 4$ würde er auch gehen, aber bei $17 \cdot 7$ nicht.“

In den Klassen wurde das „Verdoppeln und Halbieren“ anhand der Aufgabe $14 \cdot 5$ eingeführt. Dazu wurde der Rechenweg eines fiktiven Kindes vorgestellt und an einer Punktedarstellung erläutert.



8 Darstellung von $14 \cdot 5 = 7 \cdot 10$ an Punktefeldern

Unterstützend erhielten die Kinder Papierstreifen mit einem Punktefeld von $14 \cdot 5$ Punkten und den Auftrag, dieses mit einer Schere so in der Mitte durchzuschneiden, dass durch Umlegen daraus ein Feld mit $7 \cdot 10$ Punkten neu zusammengeklebt werden konnte. Vielen Kindern gelang und gefiel es, diese Überlegung auf weitere Aufgaben wie $18 \cdot 5$ ($=9 \cdot 10$), $16 \cdot 4$ ($=8 \cdot 8 = 32 \cdot 2$) oder auch $35 \cdot 8$ ($=70 \cdot 4$) zu übertragen. Andere lösten diese Aufgaben durch „Zerlegen und Plus“. In der anschließenden Rechenkonferenz wurden beide Strategien als geeignet beurteilt und diskutiert, bei welchen Zahlen „Verdoppeln und Halbieren“ überhaupt möglich ist und warum es manchen Kindern auch besser gefällt.

Fazit: Zahlenblick-Training lohnt!

In den folgenden Stunden blieb das Sortieren von Malaufgaben in den Versuchsklassen ein wichti-

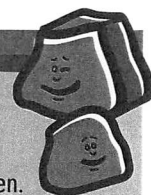
STOLPERSTEIN

Worauf ist zu achten?

Die Lehrkraft sollte die Rechenwege nicht vorgeben, sondern die Schülerinnen und Schüler möglichst selbst entdecken lassen. Das Abgleiten ins mechanische Anwenden nur einer Strategie („Quasi-Algorithmus“) sollte verhindert werden.

Was kann schiefgehen?

Einzelne Kinder brauchen länger, um zumindest einen Rechenweg für sich zu entdecken und abzusichern; sie wären überfordert, (zu früh) unterschiedliche Wege gehen zu müssen.



ges Übungsformat. Nicht immer wurde auch ausgerechnet. Wesentlich war den Lehrkräften, dass alle Kinder selbstständig einen richtigen Rechenweg finden. Auf dieser Basis sollten sie dann immer wieder auch bewusst *verschiedene* und wenn möglich *vorteilhafte* Rechenwege zu derselben Aufgabe suchen, diese bewerten und ihre Bewertung begründen (siehe M2).

Dabei zeigte sich, dass Kinder „vorteilhaft“ unterschiedlich interpretierten. Manche nannten durchgehend „Zerlegen und Plus“ als „einfachsten Rechenweg“, auch bei Aufgaben, die sich gut für „Zerlegen und Minus“ oder „Verdoppeln und Halbieren“ eignen, hatten dafür aber eine einleuchtende Begründung. So meinte Dino: „Das andere geht schon schnell und alles, aber das mit dem Plus ist halt sehr sicher, weil da hat man das kleine Einmaleins, und das kann ich gut!“

Insgesamt brachte das gezielte, anschauungsgestützte Erarbeiten einzelner Rechenwege, gefolgt von wiederholten Übungen im Suchen und Bewerten unterschiedlicher Wege, in mehrfacher Hinsicht Erfolge. In den abschließenden Interviews konnten auch leistungsschwächere Kinder in der Regel zumindest „Zerlegen und Plus“ selbstständig anwenden und mit erkennbarem Verständnis erläutern („Sicherheit finden“).

Viele Kinder wählten bei passenden Aufgaben von sich aus auch „Zerlegen und Minus“ und „Verdoppeln und Halbieren“ („Vorteile suchen“). Und einige – wie Leonardo – konnten dies mit einer Klarheit begründen, die die beteiligten Lehrkräfte, die alle zum ersten Mal so unterrichtet hatten, ebenso verblüffte wie uns, die wir diesen Unterrichtsversuch anregen und begleiten durften. ■

Literatur

■ Gaidoschik, Michael:
 Einmaleins verstehen, ver-
 netzen, merken. Strategien
 gegen Lernschwierigkeiten.
 Seelze 2015

Die Autorin/der Autor

Martina Greiler-Zauchner lehrt und forscht zur Didaktik der
 Grundschulmathematik an der PH Kärnten
 Michael Gaidoschik tut dies an der Freien Uni Bozen.

Name: _____ Klasse: _____ Datum: _____

Zahlenblick 1

Welche Aufgaben kannst du geschickt mit **Zerlegen und Minus** lösen?

Trage sie in die Tabelle ein und schreibe die Hilfsaufgabe dazu:

$4 \cdot 29$	$9 \cdot 15$	$4 \cdot 25$	$84 \cdot 6$	$94 \cdot 3$
$6 \cdot 43$	$89 \cdot 7$	$19 \cdot 8$	$21 \cdot 5$	$6 \cdot 49$

Rechnung	Diese Rechnung hilft mir



Zahlenblick 2

Welche Aufgaben kannst du geschickt mit **Verdoppeln und Halbieren** lösen?

Trage sie in die Tabelle ein und schreibe die Hilfsaufgabe dazu:

$15 \cdot 8$	$5 \cdot 48$	$4 \cdot 25$	$46 \cdot 4$	$94 \cdot 3$
$6 \cdot 43$	$89 \cdot 7$	$35 \cdot 12$	$37 \cdot 5$	$37 \cdot 4$

Rechnung	Diese Rechnung hilft mir



Jede Zeitschrift
mit umfassendem
Online-Archiv!

Alle Beiträge der Themenhefte auch zum Herunterladen!

Praxis Grundschule

2016

Heft	Titel	Best. Nr.
1	Feuer Entdecken, erforschen, erleben	65160100
2	Frühling Zeit des Erwachens	65160200
3	Jetzt kommt der Ball ins Spiel Fußball hat viele Seiten	65160300
4	Anfangsunterricht Mathematik Einblicke ins Denken der Kinder	65160400
5	Reisen ins Weltall Abheben, erkunden, entdecken	65160500
6	Lyrik in vielen Formen* Klang, Struktur und Sprache erkunden	65160600

2017

Heft	Titel	Best. Nr.
1	Psychomotorik Anregungen für die Grundschule	65170100
2	Problemlösen für alle! Mathematikunterricht problemorientiert gestalten	65170200
3	Ideen rund um die Reformation Mit Martin Luther den eigenen Glauben entdecken	65170300
4	Politisches Lernen im Sachunterricht vielseitig – notwendig – möglich	65170400
5	Kinderliteratur Von Bilderbuch bis Schmöcker – Neue Kinderliteratur im Unterricht	65170500
6	Alle inklusive Lernumgebungen differenziert gestalten	65170600

Grundschule

2016

Heft	Titel	Best. Nr.
1	Keine Angst vor dem Schulrecht! Was Sie für Ihre pädagogische Arbeit wissen müssen	53160100
2	Meine neuen Erstklässler* Wie Sie den Übergang vom Kindergarten in die Schule erfolgreich gestalten	53160200
3	Unterricht für alle Wie Sie die Inklusion an Ihrer Schule trotz schwieriger Bedingungen voranbringen können	53160300
4	Raus aus dem Klassenzimmer! Wie Sie mit außerschulischen Lernorten Ihren Unterricht bereichern	53160400
5	Holen Sie die Welt in Ihren Unterricht Wie digitale Medien das Lernen in der Grundschule bereichern	53160500
6	Jede Stimme zählt! Wie Demokratie-Erziehung die Selbstständigkeit der Schüler stärkt und Sie als Lehrkraft entlastet	53160600
7	Über die Raumgrenzen hinaus Wie Ihr Klassenzimmer Ihren Unterricht beeinflusst und wie Sie das für sich nutzen können	53160700
8	A13 für alle! Warum es endlich an der Zeit ist, Grundschullehrkräfte gleichzustellen	53160800
9	Förderpläne in der Praxis Wir nehmen Maß!	53160900
10	Was Kinder zu „Tyrannen“ macht* Hintergründe zur aktuellen Erziehungsdebatte – wichtige Informationen für Ihren Unterricht	53161000

2017

Heft	Titel	Best. Nr.
1	Unterrichtsstörungen effektiv begegnen	53170100
2	Motivation wecken! Wie Sie Ihre Schüler fürs Lernen begeistern	53170200
3	Zielscheibe Lehrkraft. Wie Schüler und Eltern mit ihrem Verhalten Lehrkräften zusetzen und wie Sie sich dagegen wappnen können	53170300
4	Ganztag leben! Wie Sie und Ihr Kollegium den Nachmittag pädagogisch sinnvoll gestalten	53170400
5	Von der Leine lassen. Offene Lernformen sind umstritten – wie sie trotzdem Ihren Unterricht bereichern	53170500
6	Stets das richtige Werkzeug! Methoden für Ihren Unterricht	53170600
7	Bewegung bringt's! Wie Ihr Unterricht und Ihre Schüler von körperlicher Aktivität profitieren	53170700
8	Sprachsensibel unterrichten	53170800
9	Rahmen setzen. Wie Sie erwünschtes Verhalten fördern und damit Unterrichtsstörungen vermeiden	53170900
10	Werte Vermittlung in der Grundschule	53171000

* Dieses Heft ist nicht mehr als Printausgabe
erhältlich. Im Online-Archiv können Sie auf die
dazugehörigen Inhalte zugreifen.



Das Online-Archiv!

Alle Ausgaben sind auch online erhältlich.
Alle Beiträge aus den Heften der letzten sieben Jahre stehen in
unserem Online-Archiv zum Download zur Verfügung. Um zum
jeweiligen Heft zu gelangen, geben Sie einfach die Bestellnummer im
Suchfeld auf der Internetseite ein. Privat-Abonnenten (AboPlusWeb)
laden die Beiträge ihrer abonnierten Zeitschrift kostenlos herunter.
www.die-grundschule.de/suche



www.praxisgrundschule.de
www.die-grundschule.de

Gleich bestellen:

T. +49 531 708 8631

leserservice@westermanngruppe.de

westermann

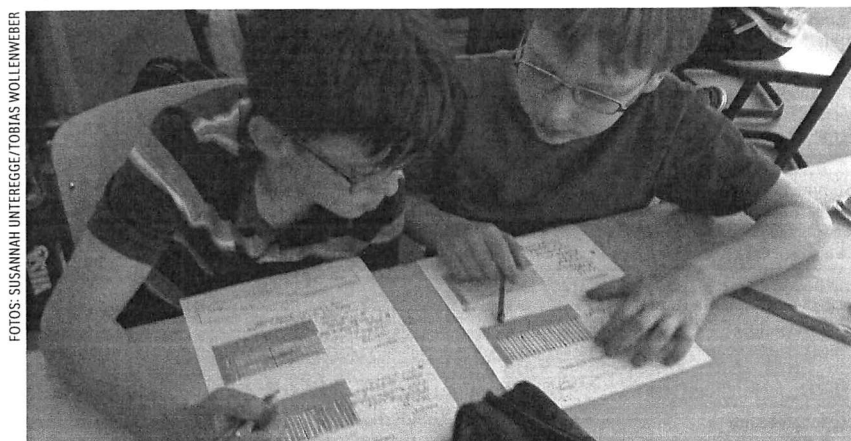


Der Austausch macht's

Anregungen zu einer materialgestützten Einführung der halbschriftlichen Division in kooperativen Lernsituationen

► Halbschriftlich rechnen, Punktefeld, Zahlzerlegung

Die halbschriftliche Division bietet ein großes Potenzial für individuelle Rechenwege. Die Möglichkeit zur Visualisierung von unterschiedlichen Vorgehensweisen an Punktefeldern kann sowohl beim verständnisorientierten Erlernen der halbschriftlichen Division helfen als auch zu tieferen Einsichten bei möglichen Zahlzerlegungen beitragen.



1 Kinder vergleichen verschiedene Rechenwege am Punktefeld.

VON SUSANNAH UNTEREGGE
UND TOBIAS WOLLENWEBER

Die Division – auch halbschriftlich?

Beim halbschriftlichen Rechnen geht es nicht um das Anwenden starrer, vorgegebener Lösungswege, sondern um individuelles und flexibles Vorgehen. Durch die verschiedenen Lösungsmöglichkeiten können leicht Gesprächsanlässe zwischen den Kindern entstehen und auch bewusst angeregt werden, in welchen sie sich z.B. über unterschiedliche Vorgehensweisen oder die Effizienz von Strategien austauschen können.

Mit Blick auf die halbschriftliche Addition und Subtraktion gibt es begleitend dazu bereits zahlreiche Angebote und Materialien, wie z.B. das Systemwürfel-Material Dienes (kardinal) oder den Rechenstrich (ordinal). Und auch für

die Multiplikation wurden bereits unterrichtspraktische Ideen und Materialien entwickelt, wie z.B. das Malkreuz in Verbindung mit einem 400-Punktefeld.

Die halbschriftliche Division scheint hingegen bisher seltener zum Gegenstand fachdidaktischer und vor allem unterrichtspraktischer Überlegungen gemacht worden zu sein. Dies ist womöglich darauf zurückzuführen, dass sie auf den ersten Blick nicht so viele verschiedene Strategien bereithält wie die anderen drei Grundrechenarten.

Strategien und Notationsweisen

Für die halbschriftliche Division lassen sich zwei Hauptstrategien (vgl. Padberg/Benz 2011) unterscheiden, zu denen es entsprechend verschiedene Möglichkeiten der Notation gibt, je nachdem, wie ausführlich man die Rechenschritte festhalten möchte.

Schrittweise

Der Dividend wird in geeignete Vielfache des Divisors zerlegt. Es gibt, je nach Zahlenwert, oft mehrere sinnvolle Möglichkeiten für Zerlegungsschritte.

Beispiel:

$$72 : 4 = 18$$

$$40 : 4 = 10$$

$$32 : 4 = 8$$

Mit Blick auf größere Zahlen kann diese Strategie einen späteren, verständnisorientierten Übergang zur schriftlichen Division vorbereiten, bei der dann die Anzahl der Zerlegungsschritte minimiert wird.

Hilfsaufgabe

Es wird – sofern vorhanden – zunächst eine einfacher zu lösende Hilfsaufgabe (z. B. eine Nachbar- oder Analogieaufgabe) berechnet, aus deren Ergebnis dann das Ergebnis der ursprünglichen Aufgabe abgeleitet werden kann.

Beispiel (Rückgriff auf eine Nachbaraufgabe):

$$72 : 4 = 18$$

$$80 : 4 = 20$$

$$8 : 4 = 2$$

Beispiel (Rückgriff auf eine Analogieaufgabe):

$$72 : 4 = 18$$

$$72 : 8 = 9$$

Im Rahmen dieser Hauptstrategien ist bezüglich der Notation auch der Rückgriff auf entsprechende Umkehraufgaben aus der Multiplikation möglich.

Unterrichtsidee

Punktefelder werden als (kardinales) Anschauungsmittel für die Visualisierung von Rechenwegen häufig im Kontext der Addition, Subtraktion und Multiplikation genutzt. Die hier vorgestellte Lernumgebung soll zeigen, dass auch bei der Einführung der halbschriftlichen Division alle Kinder davon profitieren können.

Mathematischer Hintergrund

Viele Rechenwege bei der halbschriftlichen Division (insbesondere die verschiedenen Möglichkeiten beim schrittweisen Rechnen) beruhen auf dem Distributivgesetz.

Das Distributivgesetz:

$$(a + b) : c = a : c + b : c$$

Beispiel: $72 : 4 = 40 : 4 + 32 : 4$

(Strategie „Schrittweise“)

Kinder müssen das Distributivgesetz auf formaler Ebene in der Grundschule natürlich weder kennen noch „bewusst“ nutzen. Gleichwohl können sie durch die Auseinandersetzung mit unterschiedlichen Zerlegungen (und deren Visualisierung am Punktefeld) schon eine Vorstellung dieser Gesetzmäßigkeit im Kontext konkreter Zahlen aufbauen.

Das 200-Punktefeld als Anschauungsmittel

Strukturierte Anschauungsmittel – wie z. B. Punktefelder – sind für das kindliche Erlernen und Verstehen arithmetischer Zusammenhänge unverzichtbar (vgl. Lorenz 1992). Punktefelder eignen sich als Anschauungsmittel hierbei in besonderer



Auf einen Blick

Klassenstufe: 3

Zeit: 3–4 Unterrichtsstunden

Lerngelegenheiten:

- Anbahnung eines flexiblen (vorteilhaften) Rechnens im Kontext schwieriger Divisionsaufgaben
- Erkundung und Ausnutzung von Beziehungen und Strukturen am Punktefeld
- Erklären und Begründen von eigenen Rechenwegen
- Verknüpfung von Division und Multiplikation

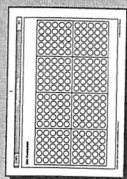
Lernvoraussetzungen:

- Kenntnisse im kleinen Einmaleins
- Grundvorstellungen im Bereich der Division (insbesondere zum Aufteilen)
- Erfahrungen im Umgang mit dem Material (Punktefeld)

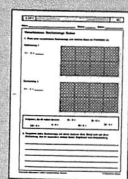
Materialien

M1: 200-Punktefeld

M2: Verschiedene Rechenwege finden



M1

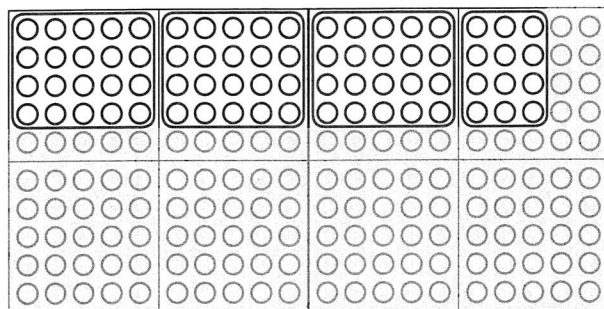


M2

Seite 46

Weise, um auch über mehrere Schuljahre hinweg immer wieder an bereits erlernte, dekadische Strukturen im Sinne einer kardinalen Vorstellung anzuknüpfen.

Der adäquate Umgang mit Anschauungsmitteln sowie das Wahrnehmen und Nutzen von Strukturen sind dabei immer auch Teil des Lernprozesses (vgl. Söbbeke 2007). Mit Blick auf die Verwendung des 200-Punktefeldes (siehe M1) im Kontext der halbschriftlichen Division ist es daher wichtig, mit den Kindern vor und auch während des Bearbeitungsprozesses Strukturen und mögliche Zerlegungen immer wieder an unterschiedlichen Beispielen gemeinsam zu thematisieren. Zentral ist, dass die Kinder lernen, den gesamten Ausschnitt auf dem Punktefeld (Dividend) flexibel in verschiedene rechteckige Zerlegungen mit glei-

**Schrittweise**

$20:4=5$

$20:4=5$

$20:4=5$

$12:4=3$

$5+5+5+3=18$

2 Abgedecktes 200-Punktfeld zur Aufgabe 72:4 mit möglicher schrittweiser Zerlegung der 72

cher Kantenlänge (Divisor) zu unterteilen. Dabei kann auch ein Bezug zu den Umkehroperationen aus der Multiplikation, die den Kindern häufig noch leichter fällt, hergestellt und produktiv genutzt werden.

Eine Aufgabe wie 72 geteilt durch 4, die über den Zahlenraum des „vertrauten“ kleinen Einmal-eins hinausgeht, bereitet vielen Kindern zunächst Schwierigkeiten. Ein passender Ausschnitt auf dem 200-Punktfeld kann dabei helfen, erste Zerlegungen in einfache Geteiltaufgaben zu finden (siehe Abb. 2).

Weitere mögliche, sichtbare Zerlegungen der 72 sind:

Schrittweise	Hilfsaufgabe	Hilfsaufgabe
$40:4=10$	$80:4=20$	$40:4=10$
$32:4=8$	$8:4=2$	$40:4=10$
$10+8=18$	$20-2=18$	$8:4=2$
		$10+10-2=18$

Ist der Umgang mit einem solchen passend abgedeckten Punktfeld einmal erlernt, bietet es den Kindern gerade zu Beginn der halbschriftlichen Division viele Vorzüge:

3 Tafelbild zur Einführung mit möglichen Kinderbegründungen

- die Möglichkeit einer verständnisorientierten Einsicht in die Richtigkeit und Sinnhaftigkeit einer Zerlegung im Sinne des Distributivgesetzes,
- die Visualisierung der Aufgabe als Ganzes sowie verschiedener Zerlegungsmöglichkeiten in ein und derselben Darstellung,
- Lernen auf zwei Wegen im Sinne eines Darstellungswechsels:
 1. symbolisch → kardinal: erst Zerlegung auf symbolischer Ebene, anschließend kardinale Rekonstruktion und Überprüfung am Punktfeld,
 2. kardinal → symbolisch: die kardinalen Strukturen des Punktfeldes als Ausgangspunkt für die Notation eines symbolischen Rechenwegs nutzen,
- Förderung des flexiblen Rechnens durch die Verwendung und den Vergleich von verschiedenen Rechenwegen.

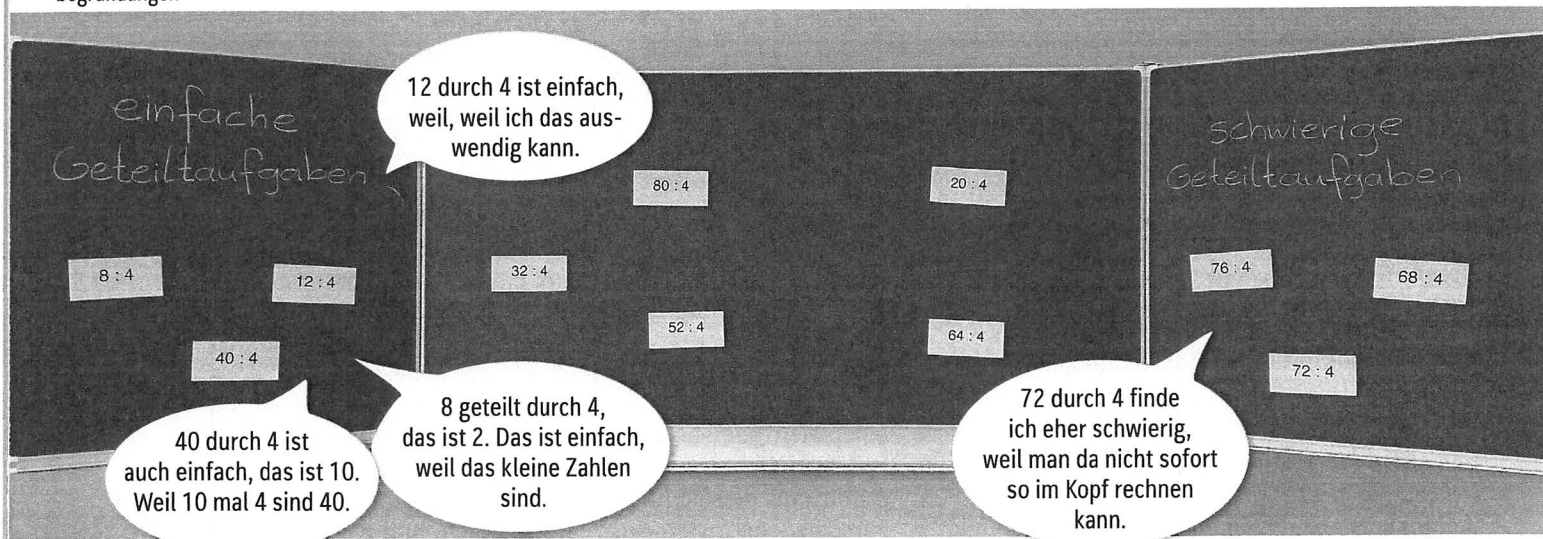
Einführung und erste Arbeitsphase

In der Tafelmitte hängen verschiedene Divisionsaufgaben aus der 4er-Reihe. Die Kinder sollen die Aufgaben entweder als „einfach“ (linke Tafelseite) oder „schwierig“ (rechte Tafelseite) einordnen.

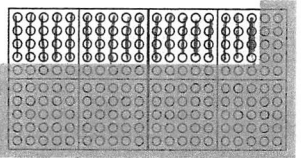
Anschließend erhalten die Kinder zu einer als „schwierig“ beurteilten Aufgabe (z.B. 72:4) einen passenden Ausschnitt auf dem Punktfeld, verbunden mit der Aufforderung, einen eigenen Rechenweg zu finden. Zuvor sollten der Aufbau und die Strukturen des Punktfeldes (siehe M1) kurz gemeinsam wiederholt werden.

Die Schülerelemente in den Abbildungen 4 bis 6 zeigen, wie heterogen die Herangehensweisen sein können. Speziell an den Abbildungen 4 und 5 wird deutlich, dass das Punktfeld die Anbahnung der halbschriftlichen Strategien *Schrittweise* und *Hilfsaufgabe* unterstützen kann.

Verschiedene Lösungsstrategien der Kinder sollten in einer gemeinsamen Reflexionsphase an



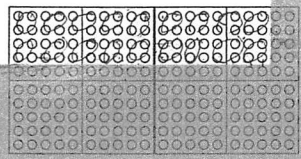
$72 : 4 = 18$



Ich habe so gerechnet:
Ich habe die Punkte durch
gestrichen und 4 Gruppen gemacht alle gezählt.

4 Irem orientiert sich noch stark an der Grundvorstellung des Aufteilens.

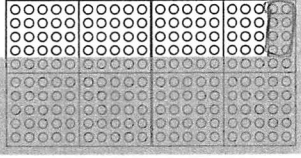
$72 : 4 = 18$



Ich habe so gerechnet:
weil ich $4 \cdot 10 = 40$
und $4 \cdot 8 = 32$
sind $40 + 32 = 72$

5 Taha wählt bereits ein schrittweises Vorgehen, indem er die Aufgabe in $4 \cdot 10$ und $4 \cdot 8$ multiplikativ zerlegt.

$72 : 4 = 18$
 $80 : 4 = 20$
 $20 - 2 = 18$



Ich habe so gerechnet:

6 Leyla wählt eine passende Hilfsaufgabe, um sich die Aufgabe leichter zu machen.

der Tafel vorgestellt und im Hinblick auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede sowie ihre Effizienz miteinander verglichen werden. Gegebenenfalls kann die Lehrkraft anschließend Impulse für weitere Strategien geben.

Weiterführende Aufgabe

Im Anschluss an den vorgestellten Einstieg bieten sich weitere Aufgaben im Rahmen einer offenen Lernumgebung zum Erkunden und Üben am Punktfeld an. Methodisch ist dabei zu empfehlen, die Lernprozesse der Kinder stets kooperativ – z.B. nach dem Ich-Du-Wir-Prinzip – zu gestalten.

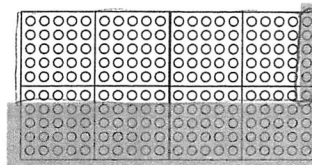
Den Kindern werden zum Beispiel im Rahmen einer Doppelstunde weitere „schwierige Geteiltaufgaben“ mit passenden Punktfeld-Ausschnitten angeboten, von denen beliebig viele im Sinne einer offenen Lerntheke bearbeitet werden können (siehe z.B. M2). Ziel für die Kinder in der Ich-Phase ist es, nach Möglichkeit zwei verschiedene Rechenwege zu derselben Aufgabe zu finden und im Punktfeld einzuzichnen (siehe Abb. 7). Dabei empfiehlt es sich mit Kindern zu besprechen, wie man seine Rechenwege besonders „schön“ darstellen kann (Pfeile, Farben, einkreisen, beschriften, markieren).

Rechenweg 1

$$114 : 6 = 19$$

$$120 : 6 = 20$$

$$6 : 6 = 1$$



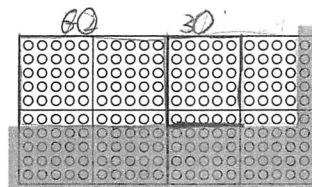
Rechenweg 2

$$114 : 6 = 19$$

$$60 : 6 = 10$$

$$30 : 6 = 5$$

$$24 : 6 = 4$$



Aufgaben, die dir helfen können:

$$120 : 6 =$$

$$6 : 6 =$$

$$24 : 6 = 4$$

$$54 : 6 =$$

$$60 : 6 = 10$$

$$30 : 6 =$$

Im Anschluss sollen immer zwei Kinder, die die gleiche Aufgabe bearbeitet haben, ihre Rechenwege in einer Du-Phase miteinander vergleichen und sich begründet für den einfachsten Rechenweg entscheiden.

Abschließend werden verschiedene, von den Kindern favorisierte Rechenwege in einer gemeinsamen Wir-Phase von einzelnen Kinderpaaren vorgestellt und gemeinsam reflektiert, denn: Der Austausch macht's!

Fazit

Die halbschriftliche Division bietet viel Potenzial für individuelle Rechenwege und sollte nicht als lästige Durchgangsstation auf dem Weg zur – verhältnismäßig schwer zu verstehenden – schriftlichen Division gesehen werden. Die vorgestellte Lernumgebung ermöglicht es, Kinder zur verständnisorientierten Entwicklung von und Auseinandersetzung mit verschiedenen Rechenstrategien anzuregen. Das passend abgedeckte Punktfeld kann in diesem Zuge einerseits dabei helfen, erste Zerlegungen zu schwierigen Aufgaben zu finden, andererseits aber auch vertiefende Einsichten in die den Rechenwegen zugrunde liegenden mathematischen Strukturen zu erlangen. Es bietet zudem die Chance, dass die Kinder mentale Vorstellungsbilder im Sinne verschiedener, flexibler Zerlegungsmöglichkeiten aufbauen, die langfristig eine rein symbolische Bearbeitung von schwierigen Geteiltaufgaben unterstützen – auch in höheren Zahlenräumen. ■

Die Autorin/der Autor

Susannah Unteregge ist wissenschaftliche Mitarbeiterin am Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts (IEEM) der Technischen Universität Dortmund.

Tobias Wollenweber ist wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts (IEEM) der Technischen Universität Dortmund.

7 David nutzt für die Berechnung der Aufgabe $114 : 6$ einmal eine Hilfsaufgabe und einmal eine schrittweise Zerlegung.

Literatur

■ **Lorenz, Jens Holger:** Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht. Göttingen 1992

■ **Padberg, Friedhelm/Benz, Christiane:** Didaktik der Arithmetik. Für Lehrerbildung und Lehrerfortbildung. 4. erweiterte, stark überarbeitete Auflage. Heidelberg 2011

■ **Söbbeke, Elke:** „Strukturwandel“ im Umgang mit Anschauungsmitteln. Kinder erkunden mathematische Strukturen in Anschauungsmitteln. In: Die Grundschulzeitschrift, Heft 201-2007, S. 4-13

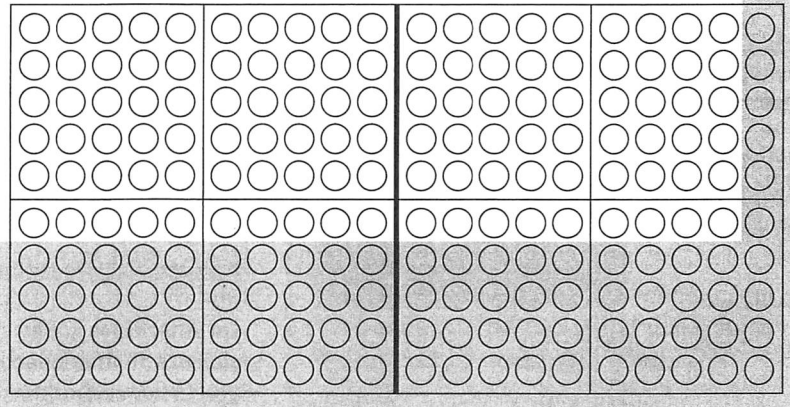
Name: _____ Klasse: _____ Datum: _____

Verschiedene Rechenwege finden

1. Finde zwei verschiedene Rechenwege und zeichne diese am Punktefeld ein.

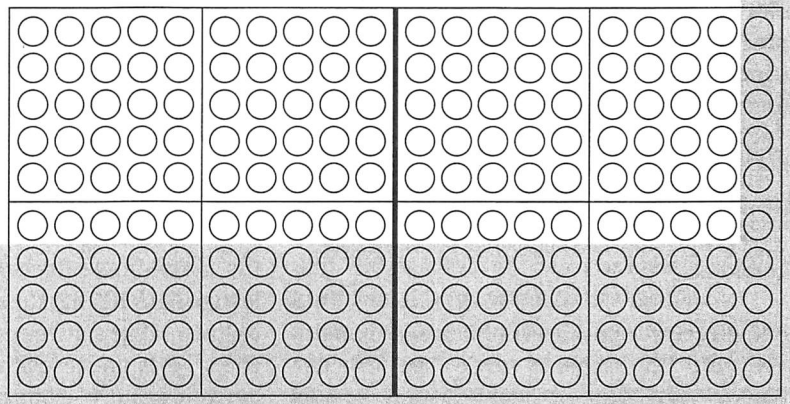
Rechenweg 1

$114 : 6 = \underline{\hspace{2cm}}$



Rechenweg 2

$114 : 6 = \underline{\hspace{2cm}}$



Aufgaben, die dir helfen können:

$24 : 6 =$

$54 : 6 =$

$120 : 6 =$

$6 : 6 =$

$60 : 6 =$

$30 : 6 =$

2. Vergleiche deine Rechenwege mit einem anderen Kind. Einigt euch auf einen Rechenweg, den ihr besonders einfach findet. Begründet eure Entscheidung.

Unter der Lupe

Dagmar Bönig, Jochen Hering,
Monika London, Marcus Nühren-
börger, Bernadette Thöne

Erzähl mal Mathe!

Mathematiklernen im Kinder-
gartenalltag und am Schulanfang
Kallmeyer, 136 Seiten, 24,95 €



Dieses gut lesbare Buch bereitet
zum einen sehr ansprechend wich-
tige didaktische Grundlagen für das
frühe arithmetische und geometri-
sche Lernen auf und bietet zum an-
deren zahlreiche Praxisbeispiele,
die nicht nur in der Kindertagesstät-
te, sondern auch im ersten Schul-
jahr gut eingesetzt werden können.

Besonders hervorzuheben ist die
Verbindung von Mathematik und
Sprache. Genauer gesagt: das Auf-
zeigen, welche mathematischen
Lernchancen beim und durch Er-
zählen entstehen können. Bevor
Aktivitäten zum „Mathelernen“ im
Alltag, mit Bilderbüchern, mit Re-

gelspielen und mit traditionellen
Kinderspielen gut vorstellbar be-
schrieben werden, stehen Benen-
nen, Erzählen, Klären und Erklären
im Fokus.

Es kann allen Lernbegleitern
empfohlen werden, die mit Kindern
am Übergang zwischen Elementar-
bereich und Grundschule mathe-
matische Lernsituationen aufgrei-
fen und gestalten wollen.

Daniela Kulot
**Gefährliche Sachen
zum Zählen und Lachen**
Thienemann Verlag
32 Seiten, 12,99 €



Auf den ersten Blick könnte der
Eindruck entstehen, dieses Zähl-
buch ist ein weiteres Werk, in dem
die Mengen von 1 bis 20 mit mehr
oder weniger sinnvoll gereimten
Texten illustriert werden. Bei den
Seiten bis zur Zahl 10 verfestigt
sich dieses Gefühl auch. Ab Seite
11 werden die Anzahlen größer als
10 zumindest als Zusammenset-
zung zwischen der Anzahl 10 und
weiteren Mengen dargestellt.

Diese Strukturierung wird bei
den Zahlsymbolen anhand von
Rechnungen dargestellt: $10 + 1 = 11$,
 $10 + 2 = 12$ usw. Auch die Illustrati-

onen auf den Seiten spiegeln die
Strukturierung wider: Die Anzahlen
werden immer als Zusammenset-
zung von zwei Mengen dargestellt.
Die verwendeten Mengenbilder
sind die gleichen, die auch schon
bei der Darstellung der Anzahlen
bis 10 zum Einsatz kamen.

Für die Erarbeitung des Zahlen-
raums eignet sich dieses Buch we-
niger. Als Leseanlass oder Unter-
haltung kann es jedoch auch in der
Schule eingesetzt werden.

Wilhelm Schipper, Astrid Ebeling
und Rotraut Dröge
**Handbuch für den
Mathematikunterricht**
3. Schuljahr, mit CD-Rom
Schroedel, 356 Seiten, 28,50 €



In bewährter Weise stellen die Au-
toren mathematikdidaktische Hin-
tergründe für die Unterrichtsinhalte
des dritten Schuljahrs anschaulich
dar und leiten daraus zahlreiche
Unterrichtsaktivitäten ab.

Als inhaltsübergreifendes Thema
werden zu Beginn des Buches die
Bedeutung von Medien und Chan-

cen wie Grenzen beim Einsatz von
digitalen Medien im Mathematikun-
terricht diskutiert.

Bei den didaktischen und unter-
richtspraktischen Ausführungen im
Bereich Zahlen und Operationen
sind die schriftlichen Rechenver-
fahren zur Addition und Subtraktion
in diesem Band ein zentrales The-
ma. Bei Raum und Form werden im
dritten Schuljahr zusätzlich zu den
Themen, die bereits im ersten und
zweiten Schuljahr thematisiert wur-
den, das geometrische Zeichnen
sowie Flächeninhalt, Umfang und
Rauminhalt vorgestellt. Bei Größen,
Messen und Sachrechnen werden
neben typischen Unterrichtsinhal-
ten das Mathematisieren und Mo-
dellieren differenziert thematisiert,
während bei Daten, Häufigkeit und
Zufall verschiedene kombinatori-
sche Aufgaben dargestellt werden.

Wieder stellt der Band eine wert-
volle Unterstützung bei der Pla-
nung und Gestaltung von Mathema-
tikunterricht dar.

Christiane Benz

Sabine Kaufmann
**Mathekalender fürs
Klassenzimmer**

Haben Sie ihn schon in ihrem
Klassenraum? Den Kalender mit
der monatlichen Knobelaufgabe
auf zwei Anforderungsniveaus?

Für Abonentinnen und Abo-
nenten kostenlos unter:
www.mathematik-differenziert.de/kalender

Aus unserem Online-Archiv

Im Folgenden haben wir interessante Beiträge zum Themen-
schwerpunkt aus bereits erschienenen Ausgaben von
Mathematik differenziert zusammengestellt. Sie finden diese
Beiträge unter www.mathematik-differenziert.de/suche.

Edith Böhme
Rechnen – schneller als der Taschenrechner
Herausforderung und Motivation fürs Kopfrechnen
Mathematik differenziert, Heft 3-2015

Für **Privatabonnenten** von Mathematik differenziert
sind diese Downloads und die anderer Beiträge aus ihrer
Zeitschrift **kostenlos**.

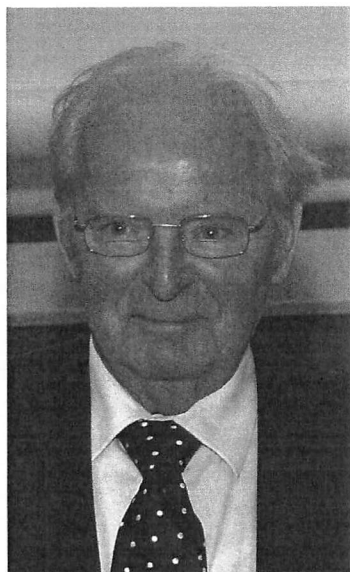
Klaus-Peter Eichler
Zahlenstrahl und Rechenstrich von Klasse 1 an
Veranschaulichungsmittel über die Grundschulzeit hinaus
Mathematik differenziert, Heft 4-2014

* Sie haben Fragen zum **AboPlusWeb**? Informationen finden Sie unter www.mathematik-differenziert.de/abo.
Oder lassen Sie sich persönlich durch unseren Leserservice beraten: 05 31 / 7 08 86 31.



MATHEMATIK IN PERSON: HEINRICH WINTER

Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht



Heinrich Winter wurde am 20. Juli 1928 in Buttlar in Thüringen geboren. Seine Kindheit und Jugend im Dritten Reich und während des Zweiten Weltkrieges waren sicher nicht einfach. Nach dem Krieg 1945 begann er

eine Ausbildung zum Lehrer und arbeitet dann bis 1950 an einer Grundschule. Erst danach konnte er sein Abitur nachholen und ab 1952 in Aachen studieren. Nebenher musste er als Lehrer arbeiten, 1960-1962 an einem Gymnasium in Aachen. 1954 heiratete er und wurde 1960 Vater. 1963 schloss er sein Studium mit einem Dokortitel in Geographie ab und unterrichtete dann Mathematikdidaktik an der Pädagogischen Hochschule in Neuss.

1969 wurde Heinrich Winter Professor in Dortmund, wechselte 1973 nach Neuss und 1978 nach Aachen, wo er studiert hatte und bis 1993 arbeitete. Von 1983 bis 1987 war er Vorsitzender der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM). 1989 veröffentlichte er sein wichtigstes Buch „Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht“. 2005 erhielt er die Ehrendoktorwürde der Universität Dortmund. Er starb am 6. März 2017.

Für Heinrich Winter war es wichtig, dass es im Mathematikunterricht nicht nur um mathematische Inhalte, wie Zahlen, Symbole und Rechenregeln geht, sondern auch darum mit Hilfe der Mathematik die Welt besser zu verstehen. Außerdem soll der Mathematikunterricht die Fähigkeit, Probleme zu lösen, fördern. Heute stimmen ihm viele zu, dass diese Winterschen Grunderfahrungen sehr wichtig sind. Heinrich Winter meinte auch, dass Schülerinnen und Schüler Mathematik am besten lernen, wenn sie Zusammenhänge selbst entdecken anstatt unverstandene Regeln auswendig zu lernen. In vielen Schulen wird heute nach seinen Ideen unterrichtet.

Aufgaben:

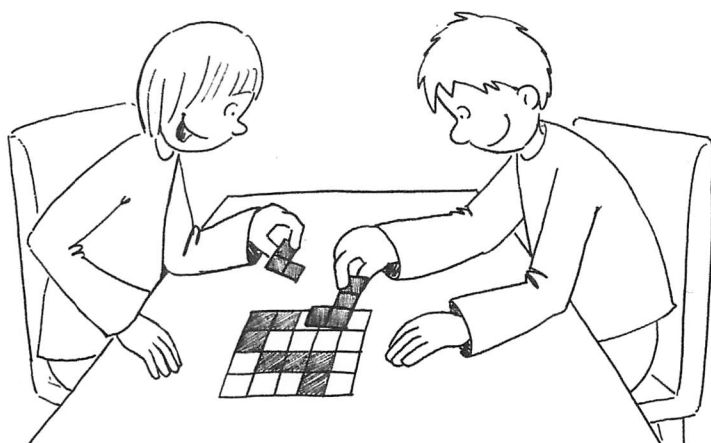
Erfinde selbst Aufgaben, die du mit Hilfe der Jahreszahlen im Text lösen kannst, z. B.:

1. Wie alt war Winter als er seine Ausbildung begann?
2. Wie alt war Winter als er den Dokortitel bekam?
3. Wie viele Jahre arbeitete Winter als Professor in Aachen?
4. Wieviel länger arbeitete Winter in Aachen als in Neuss?
5. ...

Schreibe jeweils auf, wie du rechnest.

Nachgedacht!

Wie viele große Ls, wie viele kleine?



Für das Experiment brauchst du zwei Sorten von Spielplättchen:

- „kleine Ls“: Spielplättchen, die aus drei Quadraten in L-Form zusammengesetzt sind. Davon brauchst du zehn Stück.
- „große Ls“: Spielplättchen, die aus vier Quadraten zusammengesetzt sind und die auch L-Form haben. Davon reichen dir fünf Stück.

Suche dir ein Partnerkind.

Malt euch ein Spielfeld aus 4×5 Quadraten auf.

Könnt ihr dieses Feld mit den Plättchen belegen, ohne dass sich zwei überlappen?

Könnt ihr ausrechnen, wie viele große und wie viele kleine Ls dafür gebraucht werden?

Versucht anschließend, ein 5×6 -Spielfeld mit Plättchen zu belegen.

Ihr könnt euch auch ein Spielfeld nach euren Vorstellungen zeichnen und versuchen, es mit den großen und kleinen Ls zu belegen.

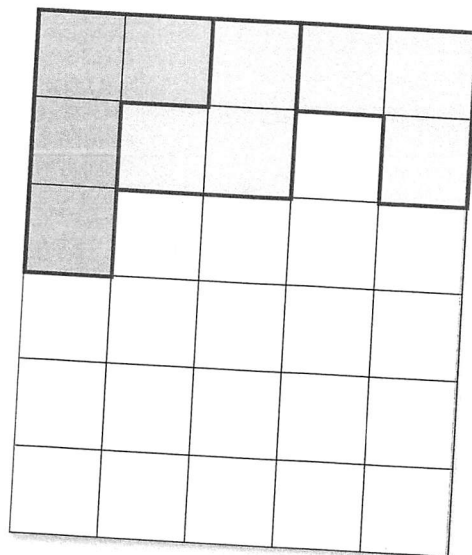


Illustration: Antje Bohnstedt

Infos

Der Autor

Die Aufgabe stammt von Dr. Albrecht Beutelspacher – dem Leiter des Mathematikums in Gießen.

Die Aufgabe

finden Sie zum Ausdrucken in HeftPlusWeb (**Nachgedacht! M1**).

Events

mathematikum
Mathematik zum Anfassen.

Veranstaltungen im Mathematikum
vom 15.03. bis 15.06.2018

Kindervorlesungen

für Kinder von acht bis zwölf Jahren
jeweils um 11:00 Uhr

24.03.2018 Mathematik und Ostern

21.04.2018 Dem Zufall auf der Spur

13.05.2018 Mathematische Experimente für die ganze Familie
(im Rahmen des Internationalen Museumstags)

02.06.2018 Mathematik bei den Bienen

Sonderausstellungen

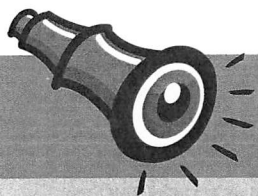
28. März bis 1. Mai 2018
Kunst im Mathematikum
Ingrid Hornef – Ordnung:
Nichts als Zufall

Ab dem 24. Mai 2018

Sonderausstellung zur Unendlichkeit

Veranstaltungsort ist das Mathematikum in Gießen.

Weiteres unter
www.mathematikum.de



VORSCHAU

FOTO: NORA BENZ



Heft 2-2018: Outdoor-Mathematik

Wir verlassen den Klassenraum um auf dem Schulgelände, in der Turnhalle, in freier Natur und auf ausgewählten Wegen Mathematik zu entdecken und zu erfahren. Problemstellungen aus der unmittelbaren Lebenswelt der Kinder, die sich ohne großen Aufwand realisieren lassen, bilden den Kern der vorgestellten Unterrichtsideen, die daneben auch fächerverbindende Potenziale entfalten.

Heft 3-2018: Daten erfassen

Das Heft befasst sich mit dem Teilaspekt „Daten erfassen und darstellen“ der Kompetenz „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit“ – von ersten Erfahrungen beim Erfassen und Darstellen von Daten im Anfangsunterricht, bis zur Durchführung eigener Datenerhebungen und der Nutzung und Weiterverarbeitung von Daten.

Heft 4-2018: Ebene Geometrie

Einladung zur Mitarbeit

Möchten Sie an einer Ausgabe von Mathematik differenziert mitarbeiten?

Dann melden Sie sich bitte bei:
Redaktion MATHEMATIK DIFFERENZIERT
Michael Venhoff
michael.venhoff@edu-group.de

Lesestoff



Weltwissen Sachunterricht 1-2018

Mehr als wischende Finger

Smartphones und Tablets kommen in Grundschulen noch wenig zum Einsatz – auch, weil es vielen Lehrkräften an Erfahrung und/oder an konkreten Unterrichtsideen mangelt. Wir wollen diese Lücke schließen, indem wir effektive Einsatzmöglichkeiten von digitalen Medien im Sachunterricht anhand von erprobten Unterrichtsbeispielen vorstellen.



Praxis Grundschule 1-2018

Ökonomisches Lernen
Ökonomische Themen bieten für vielfältige Zugänge: handlungsnah, kognitiv, philosophisch und praktisch. Sie ermöglichen Bildung für nachhaltige Entwicklung, denn das Thema „Ökonomie“ kann mit ökologischen, sozialen oder kulturellen Schwerpunkten vernetzt werden. Wir möchten Sie mit Beispielen aus dem Unterricht ermuntern, häufiger ökonomische Themen aufzugreifen.



Deutsch differenziert 1-2018

Freies Schreiben

Das freie Schreiben ermöglicht es Kindern, ihren eigenen Zugang zur Schriftsprache zu finden. Wir bieten Ideen, wie freies Schreibens in den Unterricht eingebracht werden kann. Unterschiedliche Impulse werden vorgestellt, die von den Kindern genutzt werden können, um ins Schreiben zu kommen, z. B. Alltagsbeobachtungen oder Kunstwerke.

Leser-service & Kontakt

Sie wollen ein Heft bestellen, ein Abonnement abschließen oder uns Ihre geänderte Anschrift mitteilen? Wir sind gerne für Sie da:

Telefon
0531 708-8631

Telefax
0531 708-617

E-Mail
leserservice@westermanngruppe.de

Impressum

Herausgeber und Verlag:
Bildungshaus Schulbuchverlage
Westermann Schroedel
Diesterweg Schöningh Winklers GmbH
Georg-Westermann-Allee 66
38104 Braunschweig

Geschäftsführung:
Thomas Michael

Redaktion:
Tel.: 0531/708-0
Karin Bokemeyer (V.i.S.d.P.),
Michael Venhoff -382
Fax: 0531/708-374
E-Mail:
katrin.bokemeyer@westermanngruppe.de

Herausgeber (Konzept und Inhalt):
Ludwig Augustin, Prof. Dr. Sabine Kaufmann,
Dr. Claudia Lack, Brigitte Spindeler,
Dr. Oliver Thiel

Redaktionsleitung:
Bernd Bredemeyer

Marketing:
Dr. Christina Schlegl
E-Mail: christina.schlegl@westermanngruppe.de
Linda Fechner
E-Mail: linda.fechner@westermanngruppe.de

Anzeigen und Vertrieb:
Anzeigenverkauf: Anke Pfeiffer
E-Mail: anke.pfeiffer@westermanngruppe.de
Tel.: 0531/708-8339
Anzeigenpreise: Preisliste Nr. 9 vom 01.01.2018
Vertrieb: Svenja Ahrens
E-Mail: svenja.ahrens@westermanngruppe.de
Tel.: 0531/708 8346

Anzeigen und Vertriebsleitung:
Nicole Bornemann

Layout und Herstellung:
Stefanie Oeft, PER MEDIEN & MARKETING

Titelbild:
Christoph Breig

Gesamtherstellung:
westermann druck GmbH, Braunschweig

Erscheinungsweise/Bezugsbedingungen:
Mathematik differenziert erscheint viermal im Jahr; jeweils zum 15. März, 15. Juni, 15. September und 15. Dezember.
AboPlusWeb für Privatpersonen 56,00 € (D) / 57,60 € (A) / 78,00 CHF, für Studierende und Referendare jährlich 39,20 € (D) / 40,30 € (A) / 54,60 CHF (Preismäßigung jeweils bei Vorlage einer entsprechenden Bescheinigung).
Jahresabonnement Print für Schulen: 84,00 € (D) / 86,40 € (A) / 117,00 CHF.
Einzelheft Verkaufspreis 15,00 € (D) / 15,40 € (A) / 20,50 CHF. Alle Preise zzgl. 2,20 € (D) / 2,25 € (A) / 3,50 CHF Versandkosten pro Heft. In den Inlandsbezugspreisen für das Jahresabonnement sind 7% Mehrwertsteuer für die Printausgaben und 19% Mehrwertsteuer für den Online-Zugang zu bezahlpflichtigen ergänzenden Inhalten enthalten. Der Jahresabonnementspreis wird nach Lieferung der ersten Heftausgabe in Rechnung gestellt (Preisänderungen und Irrtümer vorbehalten). Der Bezugszeitraum beträgt zunächst 1 Jahr und verlängert sich jeweils um ein weiteres Jahr, wenn nicht spätestens 6 Wochen vor Beendigung des Bezugszeitraums schriftlich gekündigt wird. Bestellungen an den Buch- und Zeitschriftenhandel oder an BMS Bildungsmedien Service GmbH, Postfach 3320, 38023 Braunschweig. Alle Rechte vorbehalten. Ein Nachdruck darf nur mit vorheriger Einwilligung des Verlages erfolgen.

Beilagen/Beihefter:
myPrints, westermann druck GmbH,
Braunschweig (Vollbeilage)
Bildungshaus Schulbuchverlage GmbH,
Braunschweig (Einhefter)

ISSN-1869-1552



23071801

Sie haben die Wahl

Nicht warten. Jetzt starten.

Abo PlusWeb
kostenloser
Archiv-Zugang

Vier gute Gründe, die für ein Zeitschriftenabonnement sprechen:

- Sie sparen bis zu 40 % gegenüber dem Einzelheftkauf.
- Sie genießen 30 % Rabatt auf alle weiteren Print-erzeugnisse der Westermann Fachzeitschriften.
- Sie haben uneingeschränkten Zugriff auf das gesamte Online-Archiv Ihrer Zeitschrift (nur für Privatabonnenten).
- Sie erhalten eine attraktive Prämie Ihrer Wahl zu Ihrem Abo-Abschluss.



www.praxisgrundschule.de
Spaß am Unterrichten.



www.mathematik-differenziert.de
Für Mathematik nach Maß.



www.sachunterricht-weltwissen.de Experimentieren – Entdecken – Lernen



www.die-grundschule.de
Ihre verlässliche Partnerin für den Schulalltag.



www.deutsch-differenziert.de Optimale Förderung für jedes Kind.



www.lernenkonkret.de
Bildung im Förderschwerpunkt geistige Entwicklung.

Die Seite für den kompletten Überblick: www.die-grundschule.de/zeitschriften

Materialien zu diesem Heft

Gestütztes Kopfrechnen

- M1:** Rechnen am Rechenstrich (Subtraktion).....PDF ... Word ... Lösung
M2: Aufgaben herausuchen (Subtraktion)PDF ... Word
M3: Aufgaben erfinden (Subtraktion).....PDF ... Word
M4: Schriftlich oder Hilfsaufgabe? (Subtraktion) ...PDF ... Word ... Lösung
M5: Rechnen am Rechenstrich (Addition).....PDF Lösung
M6: Aufgaben herausuchen (Addition).....PDF Lösung
M7: Aufgaben erfinden (Addition)PDF
M8: Schriftlich oder Hilfsaufgabe? (Addition).....PDF Lösung

Mach den Unterschied

- M1:** Rechnen am Rechenstrich.....PDF ... Word
M2: Rechenwege ausprobieren.....PDF ... Word
M3: „Unterschied bestimmen“ oder „Wegnehmen“?PDF ... Word
M4: Minusaufgaben mit dem Unterschied bestimmen.....PDF ... Word

Lösungswege diskutieren

- M1:** Geschicktes RechnenPDF ... Word ... Lösung

Halbschriftlich multiplizieren

- M1:** 400er-Punktefeld.....PDF
M2: ZahlenblickPDF ... Word ... Lösung

Halbschriftlich dividieren

- M1:** 200er-Punktefeld.....PDF
M2: Verschiedene Rechenwege findenPDF ... Word ... Lösung



Haben Sie Probleme beim Download?
 Unser Online-Support hilft Ihnen weiter.
 E-Mail:
onlineprodukte@westermanngruppe.de
 Tel. 0531 / 708-8575

Differenzierungsangebot von Weltwissen Sachunterricht

- vereinfacht
- Klassendurchschnitt
- erhöhte Anforderung
- reines Material
- Aufgaben für alle Anforderungsniveaus

Wenn Sie die Materialseiten verändern wollen, können Sie mithilfe der Worddokumente selbst passgenaue Arbeitsblätter erstellen.

Die Seiten sind in einer grundschulgerechten Schrift aufgebaut.

Diese heißt „bs Druckschrift Gru 1“. Sie verwendet gut lesbare Buchstabenformen (auffällig beim kleinen a und l) sowie die Ziffern nach Ziffernschreibkurs.

Damit Sie die Schrift zum Verändern der Arbeitsblätter nutzen können, müssen Sie diese einmalig auf Ihrem Rechner installieren. Eine Anleitung zur Installation sowie die Schrift finden Sie im Datenpaket unter www.mathematik-differenziert.de/01-2018.