

Halbschriftliches Rechnen: Geht es **sicher** und geschickt?

Wie Kinder einen flexiblen Einsatz
von Rechenstrategien lernen können

► Rechenstrategien, halbschriftlich rechnen, entdeckendes Lernen

Durch die Kenntnis verschiedener Rechenstrategien können Kinder nicht nur richtig, sondern auch geschickt rechnen. Aber was macht die Fähigkeit des geschickten Rechnens nach aktuellem Forschungsstand eigentlich aus? Und kann sie im Unterricht gefördert werden, ohne dass dies Nachteile für die Rechensicherheit hat?



1 Sollen Kinder Rechenstrategien selbst entdecken oder soll die Lehrkraft diese Strategien lehren?

VON AISO HEINZE

Im Mathematikunterricht der Grundschule spielen unterschiedliche Strategien beim Umgang mit Zahlen und Rechenoperationen von Anfang an eine wichtige Rolle. Bereits beim Zählen einer Menge (z.B. der Augenzahl bei zwei Würfeln) können verschiedene Zählstrategien angewendet werden, von denen einige effizienter sind als andere. Dies setzt sich bei den Grundrechenarten fort. So kann die Aufgabe $7+9$ auf unterschied-

lichen Wegen gelöst werden, sei es durch die universelle Strategie beim Zehnerübergang als $7+3=10$ und $10+6=16$ oder durch die Strategie, dass $7+9=9+7$ und $9+7=10+7-1=17-1=16$, oder durch die Strategie des gegensinnigen Veränderns und Verdoppelns: $7+9=8+8=16$.

Mit der Einführung der größeren Zahlräume bis 100 bzw. bis 1000 in den Klassenstufen 2 und 3 erweitert sich auch die Vielfalt der möglichen Rechenstrategien. Gleichzeitig tritt bei bestimmten Aufgabentypen die Effizienz verschiedener Rechenwege deutlicher hervor als bei kleineren Zahlräumen. So sollte etwa die Aufgabe 701–699 effizienter und sicherer durch die Ergänzungsstrategie („699 plus wie viel ergibt 701“) zu lösen sein als durch ein schriftliches Subtraktionsverfahren, das bei den zwei Überträgen fehleranfälliger sein dürfte.

Schülerinnen und Schüler sind in der Regel sehr kreativ in der Entwicklung verschiedener Rechenstrategien. In der Literatur finden sich diesbezüglich Vorschläge zur Strukturierung und Kategorisierung dieser Vielfalt, um sie einer didaktischen Diskussion zugänglich zu machen. So werden beispielsweise für die Addition und Subtraktion oft die in Abbildung 2 dargestellten Strategien als Hauptstrategien genannt, wobei die Bezeichnungen mitunter variieren.

Schrittweises Rechnen	Stellenweises Rechnen	Hilfsaufgabe	gegen-/gleichsinniges Verändern	Ergänzen (nur Subtraktion)
$123 + 456 = 579$	$123 + 456 = 579$	$527 + 398 = 925$	$527 + 398 = 925$	$701 - 698 = 3$
$123 + 400 = 523$	$100 + 400 = 500$	$527 + 400 = 927$	$525 + 400 = 925$	$698 + 3 = 701$
$523 + 50 = 573$	$20 + 50 = 70$	$927 - 2 = 925$		
$573 + 6 = 579$	$3 + 6 = 9$		$527 - 199 = 328$	
			$528 - 200 = 328$	

Natürlich gibt es auch hierbei Variationen. So können beispielsweise beim schrittweisen Rechnen auch zunächst die Einer, dann die Zehner und zum Schluss die Hunderter addiert werden. Außerdem verwenden Grundschul Kinder vielfach Mischstrategien, die Rechenschritte mehrerer der Strategien aus Abbildung 2 kombinieren.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass bestimmte Strategien in den in der Grundschule betrachteten Zahlräumen problematisch sein können. Das stellenweise Rechnen der Subtraktion bei Minusaufgaben mit Überträgen ist ein Beispiel, da hier bei bestimmten Notationsformen negative Zwischenergebnisse auftreten. Zudem gibt es natürlich Variationen in den Darstellungsmöglichkeiten. So kann neben der Notationsform in Abbildung 2 auch der Rechenstrich zur Darstellung genutzt werden. Dabei ist zu beachten, dass einige Darstellungsformen nicht für alle Strategien geeignet sind.

Was ist „geschicktes Rechnen“?

Ein Ziel der Thematisierung verschiedener Rechenstrategien im Unterricht ist die Entwicklung der Fähigkeit des „geschickten Rechnens“. Schülerinnen und Schüler sollen möglichst vorteilhafte Lösungswege für Rechenaufgaben finden, da diese prinzipiell einfacher und damit weniger fehleranfällig sind. Außerdem haben vorteilhafte Rechenwege oft das Potenzial, mit etwas Übung als Kopfrechenstrategien internalisiert zu werden (wie z.B. bei der Ergänzungsstrategie).

Wer legt fest, wann eine Lösung „geschickt“ ist?

Stellt man sich die Frage, wann eine Rechenstrategie eigentlich „geschickt“ oder „vorteilhaft“ ist, so wird deutlich, dass dies von drei unterschiedlichen Faktoren abhängen kann (vgl. Verschaffel u.a. 2009). Eine Strategie kann vorteilhaft sein bezogen auf

- die rechnende Person (z.B. wenn ein Kind die schrittweise Rechenstrategie am schnellsten und sichersten beherrscht, sodass es vorteilhaft ist, immer diese zu verwenden),
- die Aufgabe (z.B. ist für die Aufgabe $436 + 99$ die Hilfsaufgabenstrategie $436 + 100 = 536$ und $536 - 1 = 535$ geschickt, da diese sehr einfach ist),

- den jeweiligen Kontext (z.B. ist es bei Übungsaufgaben zur schriftlichen Addition für Schülerinnen und Schüler vorteilhaft, die schriftliche Addition als Lösung zu zeigen, weil die Lehrkraft dies vorgegeben hat).

Vor diesem Hintergrund ergeben sich bereits erste Hinweise für den Unterricht: Welche Ziele und Anforderungen werden den Schülerinnen und Schülern direkt und vor allem indirekt vermittelt? Viele Lernende werden vor einem Dilemma stehen, wenn eine Lehrkraft in einer Unterrichtssituation fordert, dass jede Aufgabe mit einer möglichst effizienten Strategie gelöst wird (d.h., die Strategien sind vorteilhaft bezogen auf die Aufgaben), und gleichzeitig betont, dass die Lösungen jeweils richtig sein müssen (d.h., die Strategien sind vorteilhaft, wenn ich sie sicher kann). Entsprechend ist es gerade in Unterrichtsphasen zum Erlernen des flexiblen Rechnens wichtig, die Korrektheit der Lösungen nicht höher zu gewichten als die Wahl einer effizienten Lösungsstrategie. Das langfristige Ziel, dass Schülerinnen und Schüler Aufgaben am Ende auch korrekt lösen können, steht dabei natürlich nicht infrage.

Wie finden Schülerinnen und Schüler „geschickte Lösungen“?

Für den Rest des Beitrags verstehen wir unter „geschickter“ Lösung oder Rechenstrategie nur noch den zweiten der oben genannten Fälle, d.h., die Lösung ist bezogen auf die gegebene Aufgabe geschickt. Es geht also darum, dass etwa bei einer Aufgabe wie $701 - 699$ die Ergänzungsstrategie oder die Hilfsaufgabe geschickter ist als beispielsweise das schrittweise Rechnen.

Die Frage, wie man zu einer Aufgabe eine geschickte Lösung findet, was also im Kopf einer Person passiert, wird seit einiger Zeit untersucht. Die Antwort auf diese Frage ist nicht unbedeutend, da sie Grundlage für das Lernen des geschickten Rechnens und die Unterrichtsgestaltung ist. Ein prominentes Erklärungsmodell ist das Strategiewahlmodell. Dieses geht davon aus, dass beim Erkennen einer Aufgabe eine passende Rechenstrategie aus dem Gedächtnis ausgewählt und angewendet wird (Lemaire/Siegler 1995). Aus

2 wichtige Rechenstrategien für die Addition und Subtraktion

dem Strategiewahlmodell lassen sich vier Lernvoraussetzungen für die Fähigkeit des geschickten Rechnens ableiten (siehe Abb. 3).

Es gibt ein weiteres Modell, das die oben skizzierte Auswahl einer fertigen Strategie für das geschickte Lösen einer gegebenen Aufgabe infrage stellt. So beschreibt Threlfall (2009) die Entwicklung einer Aufgabenlösung als einen dynamischen Prozess, bei dem bei einer Aufgabe eine Rechnung erst einmal angefangen wird und sich dann weiterentwickelt. Dabei kann es nach den ersten Rechenschritten durchaus zu einer Veränderung des zunächst eingeschlagenen Lösungswegs kommen, da das Kind aufgrund seines Vorwissens neue Zusammenhänge erkannt hat. Das Finden einer geschickten Lösung kann bei ausreichender Erfahrung zwar auch die Auswahl und Anwendung einer fertigen Strategie sein. Bei wenig Vorerfahrung kann man sich das Vorgehen aber eher als eine Art Baukastenprinzip vorstellen, bei dem verschiedene Wissens Elemente über Lösungswege und Zahleigenschaften kombiniert werden.

Wie wird geschicktes Rechnen gelernt?

Zu der Frage, welche Lerngelegenheiten Schülerinnen und Schülern für das geschickte Rechnen angeboten werden sollten, gibt es mehrere Vorschläge. Welcher davon am geeignetsten ist, kann von der Forschung bisher noch nicht beantwortet werden. Als gesichertes Wissen gilt, dass das traditionelle Einüben einer einzigen Strategie und eine nur kurze Behandlung anderer Strategien als sog. Rechentricks kaum die Fähigkeit des geschickten Rechnens fördert (vgl. die Studie von Klein u. a. 1998). Weiterhin besteht Einigkeit, dass verschiedene Rechenstrategien im Unterricht nicht nur zu thematisieren sind, sondern auch explizit verglichen werden müssen (z. B. als Vergleich von Lösungen in Rechenkonferenzen). Die zentrale Frage, ob Kinder am besten ihre eigenen

Rechenstrategien entdecken und verwenden sollten, kann bisher nicht klar beantwortet werden.

Vormachen oder selbst entdecken lassen?

Grundsätzlich lassen sich zwei idealtypische didaktische Ansätze unterscheiden: Beim ersten Ansatz bestimmt die Lehrkraft durch Vormachen, welche Strategien eingeführt und von den Kindern geübt und verglichen werden (was eine vorgeschaltete kurze Entdeckungsphase nicht ausschließt). Beim zweiten Ansatz werden hingegen keine Vorgaben gemacht, die Schülerinnen und Schüler entdecken ihre eigenen Rechenwege, vergleichen und optimieren diese.

Während viele Schulbücher sich eher an dem ersten Ansatz orientieren, gehen die Autoren der zuvor erwähnten Modelle (Strategiewahlmodell und Modell von Threlfall) beide vom zweiten Ansatz aus, d. h., Schülerinnen und Schüler sollen durch geeignetes Aufgabenmaterial selbst Rechenstrategien entdecken, vergleichen und optimieren und so die Fähigkeit des geschickten Rechnens aufbauen. Sie unterscheiden sich allerdings darin, welche Aspekte das Aufgabenmaterial betonen soll. Während für das Strategiewahlmodell vor allem Aufgaben empfohlen werden, die bestimmte Strategien nahelegen und für deren Übung geeignet sind (z. B. 701–699 oder 436+99), wird bei dem Modell von Threlfall zusätzlich Wert auf den Erwerb von Zahlwissen und die Analyse von Aufgabeneigenschaften (z. B. „Zahlenblick“) gelegt. Threlfall betont, dass keine Strategien durch die Lehrkraft vorgegeben oder hervorgehoben werden sollen, da dies die Kreativität der Kinder beeinträchtigt.

Es gibt bisher kaum Studien, die die oben genannten Unterrichtsansätze (vormachen vs. entdecken lassen) systematisch verglichen haben. In Deutschland wurden im Rahmen des Tiger-Projekts (Tiger = Tipps zum geschickten Rechnen) zwei Schülergruppen der Klassenstufe 3 nach den Ansätzen unterrichtet und mit einer dritten Vergleichsgruppe verglichen, die „normalen“ Unterricht hatte (z. B. Grüßing u. a. 2015). In der ersten Gruppe wurden die fünf Strategien aus Abbildung 2 nacheinander durch eine Lehrkraft eingeführt, von den Kindern eingeübt und Aufgabenlösungen immer wieder in Rechenkonferenzen daraufhin verglichen, ob die Strategien geschickt waren. Die zweite Gruppe hat keinerlei Strategien gezeigt bekommen, sondern im Sinne des Strategiewahlmodells anhand von Aufgaben, die bestimmte Strategien nahelegen, selbst Rechenwege entwickelt und diese in Rechenkonferenzen verglichen. Zusätzlich wurden im Sinne von Threlfall Aufgaben im Hinblick auf die Zahlbeziehungen analysiert und kategorisiert (z. B. „Zahlenblick“).

Strategiewahlmodell

1. Strategierepertoire: Kenntnis verschiedener Strategien (z. B. die in Abb. 2)
2. Strategieverteilung: Kenntnis, welche Strategien für welche Aufgabentypen geeignet sind
3. Strategieanwendung: Fähigkeit, jede bekannte Strategie schnell und sicher anzuwenden
4. Strategieflexibilität: Fähigkeit, die bekannten Strategien beim Lösen mehrerer Aufgaben flexibel anzuwenden, d. h. statt nur einer „Lieblingsstrategie“ auch andere Strategien einzusetzen

3 Voraussetzungen für die Fähigkeit des geschickten Rechnens nach dem Strategiewahlmodell

Unterricht zum geschickten Rechnen sollte

- grundsätzlich mehrere Strategien thematisieren,
- Strategien möglichst selbst entdecken lassen, indem Aufgaben gestellt werden, die bestimmte Strategien nahelegen (z. B. $227 + 399$, $504 - 497$, $248 + 162$); anspruchsvolle Strategien (Ergänzen, gleich-/gegensinniges Verändern) sollten zusätzlich durch die Lehrkraft thematisiert werden,
- Strategien bei konkreten Aufgaben hinsichtlich ihrer Effizienz vergleichen lassen (z. B. in Rechenkonferenzen); dabei sollten Begründungen (Kriterien) eingefordert werden,
- Gelegenheiten zum Analysieren von Aufgabeneigenschaften geben, damit bestimmte Aufgabentypen erkannt und diese als Begründung für die Strategieverwendung herangezogen werden können (z. B. Minusaufgaben, bei denen die Zahlen nahe beieinander liegen; Aufgaben, bei denen eine Zahl nahe am Hunderter ist),
- Lern- und Leistungssituation für die Kinder transparent machen, indem in einzelnen Übungsphasen durch geeignete Ankündigung das geschickte Rechnen stärker gewichtet wird als das richtige Rechnen mit ungeschickten Lösungen (dabei sollten natürlich auch geschickte Lösungen mit Rechenfehlern am Ende noch berichtet werden).

Ein Vergleich zeigte zunächst, dass beide Gruppen nach dem Unterricht (d. h. direkt nach der Unterrichtseinheit und auch noch nach drei und acht Monaten) sich in ihrer Leistung zum geschickten Rechnen nicht unterschieden, aber jeweils deutlich geschickter rechneten als die Vergleichsgruppe. Auffällig war in Detailanalysen allerdings, dass in der Gruppe, deren Kinder die Strategien selbst entdeckt hatten, vor allem die Strategie Hilfsaufgabe häufiger und dauerhafter angewendet wurde (selbst nach Einführung der schriftlichen Rechenverfahren). Dagegen wurden die Strategien gegen-/gleichsinniges Verändern und Ergänzen sehr viel seltener angewendet. Letzteres ist nicht überraschend, da diese Strategien anspruchsvoll sind. Gerade das Ergänzen ist eine Strategie, die nur von wenigen Grundschulkindern selbst entdeckt wird (vgl. De Smedt u. a. 2010). Schließlich wurde noch verglichen, ob sich durch den speziellen Unterricht zum geschickten Rechnen Nachteile bei der Rechensicherheit ergaben. Hier zeigten sich keine Unterschiede, weder zwischen den beiden Gruppen noch im Vergleich zur Vergleichsgruppe.

Fazit

Das geschickte Rechnen findet sich als ein Ziel des Mathematikunterrichts in der Grundschule in vielen Lehrplänen. Auch wenn der aktuelle Stand der Forschung noch nicht alle Fragen zufriedenstellend beantwortet, wie Kinder geschickte Lösungen finden und wie das geschickte Rechnen am besten gelernt bzw. unterrichtet werden kann, so können doch einige Empfehlungen für Lehrkräfte gegeben werden (Abb. 4).

Bedeutend ist die Erkenntnis, dass das geschickte Rechnen und die Thematisierung verschiedener Rechenstrategien in der Regel keine Nachteile bei der Rechensicherheit zur Folge

haben. Als Mitnahmeeffekt bietet die Behandlung des geschickten Rechnens gerade in der zweiten Hälfte der Grundschulzeit viele Übungsmöglichkeiten für Zahlwissen, Aufgabenanalysen und auch das grundlegende Kopfrechnen (als Teilschritte im Lösungsprozess). ■

Der Autor

Dr. Aiso Heinze ist Professor für Didaktik der Mathematik am IPN – Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik in Kiel.

Literatur

- **De Smedt, Bert/Torbeyns, Joke/Strassens, Nick/Ghesquière, Pol/Verschaffel, Lieven:** Frequency, efficiency and flexibility of indirect addition in two learning environments. In: Learning and Instruction, Heft 20-2010, S. 205–215
- **Grüßing, Meike/Schwabe, Julia/Heinze, Aiso/Lipowsky, Frank:** Anderer Unterricht – andere Rechenstrategien? Eine experimentelle Studie zum Vergleich zweier Instruktionsstrategien. In: Caluori, Franco/Linneweber-Lammerskitten, Helmut/Streit, Christine (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2015. Münster 2015, S. 320–323
- **Klein, Anton S./Beishuizen, Meindert/Treffers, Adri:** The empty number line in Dutch second grades: Realistic versus gradual program design. In: Journal for Research in Mathematics Education, Heft 29-1998, S. 443–464
- **Lemaire, Patrick/Siegler, Robert:** Four aspects of strategic change: Contributions to children's learning of multiplication. In: Journal of Experimental Psychology: General, Heft 124-1995, S. 83–97
- **Threlfall, John:** Strategies and flexibility in mental calculation. In: ZDM – The International Journal on Mathematics Education, Heft 41-2009, S. 541–555
- **Verschaffel, Lieven/Luwel, Koen/Torbeyns, Joke/Van Dooren, Wim:** Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. In: European Journal of Psychology of Education, Heft 24-2009, S. 335–359