

Zahlen auf volle Hunderter gerundet, damit der Überschlag schnell bestimmt werden kann:

$$674 + 258; \text{Überschlag } 700 + 300 = 1\,000$$

Um genauere Überschläge zu erzielen, sollte das Verfahren des gegensinnigen Veränderns thematisiert werden (vgl. S. 80). Bei dieser Beispielaufgabe führt der Überschlag mit gegensinnigem Verändern beider Summanden zu einer genaueren Abschätzung:

$$674 + 258; \text{Überschlag } 700 + 200 = 900$$

- Den Kindern wird gezeigt, dass sie ihre Rechnungen auch durch spaltenweises Addieren in Gegenrichtung kontrollieren können, also „von unten nach oben“, wenn sie zunächst „von oben nach unten“ gerechnet haben.
- Auch der Taschenrechner kann als Kontrollinstrument eingesetzt werden.

255 Schriftlich subtrahieren

Für die Erarbeitung der schriftlichen Subtraktion können Lehrerinnen und Lehrer zwischen fünf verschiedenen Verfahren wählen. Sie unterscheiden sich voneinander in der Art der Bestimmung der Differenz und der Behandlung des Übertrags. Die stellenweise Differenz kann durch Abziehen von oben nach unten erfolgen oder durch Ergänzen von

unten nach oben. Für die Behandlung des Übertrags stehen drei Techniken zur Verfügung,

- das *Entbündeln* (Entbündeln bzw. Wechseln einer größeren Einheit in 10 kleinere Einheiten),
- die *Erweiterungstechnik* mit *gleichsinnigem Verändern* von Minuend und Subtrahend (z. B. den Minuenden um 10 Einer vergrößern und gleichzeitig den Subtrahenden um einen Zehner vergrößern) und
- die *Auffülltechnik* (das Auffüllen des Subtrahenden zum Minuenden).

Die Techniken des Entbündelns und Erweiterns können mit beiden Rechenrichtungen (Abziehen und Ergänzen) kombiniert werden, die Auffülltechnik nur mit dem Ergänzen, sodass insgesamt fünf verschiedene Verfahren möglich sind, von denen aber in deutschen Grundschulen nur drei größere Verbreitung gefunden haben, nämlich

- (1) das Abziehen mit Entbündeln ((1) in Tab. 2.5-4),
- (2) das Ergänzen mit Erweitern (4) und
- (3) die Auffülltechnik (5).

Einen Überblick über die Schreib- und Sprechweisen bei allen fünf Verfahren gibt die Tab. 2.5-4 (vgl. auch Schipper, 2009a, 203).

Tab. 2.5-4 Schreib- und Sprechweise bei fünf verschiedenen Verfahren der schriftlichen Subtraktion

	Abziehen		Ergänzen																																											
Entbündeln	①	<table><tr><td></td><td>H</td><td>Z</td><td>E</td></tr><tr><td></td><td>7</td><td>10</td><td></td></tr><tr><td></td><td>8</td><td>3</td><td>7</td></tr><tr><td>-</td><td>4</td><td>7</td><td>2</td></tr><tr><td></td><td>3</td><td>6</td><td>5</td></tr></table>		H	Z	E		7	10			8	3	7	-	4	7	2		3	6	5	- 7 Einer minus 2 Einer gleich 5 Einer. - 3 Zehner minus 7 Zehner geht nicht. Ich wechsele (entbündele) einen Hunderter in 10 Zehner. Dann habe ich 13 Zehner und nur noch 7 Hunderter. - 13 Zehner minus 7 Zehner gleich 6 Zehner. - 7 Hunderter minus 4 Hunderter gleich 3 Hunderter.	②	<table><tr><td></td><td>H</td><td>Z</td><td>E</td></tr><tr><td></td><td>7</td><td>10</td><td></td></tr><tr><td></td><td>8</td><td>3</td><td>7</td></tr><tr><td>-</td><td>4</td><td>7</td><td>2</td></tr><tr><td></td><td>3</td><td>6</td><td>5</td></tr></table>		H	Z	E		7	10			8	3	7	-	4	7	2		3	6	5	- Von 2 Einern bis 7 Einer sind es 5 Einer. - Von 7 Zehnern bis 3 Zehner geht nicht. Ich wechsele (entbündele) einen Hunderter in 10 Zehner. Dann habe ich 13 Zehner und nur noch 7 Hunderter. - Von 7 Zehnern bis 13 Zehner sind es 6 Zehner. - Von 4 Hundertern bis 7 Hunderter sind es 3 Hunderter.
		H	Z	E																																										
		7	10																																											
		8	3	7																																										
	-	4	7	2																																										
	3	6	5																																											
	H	Z	E																																											
	7	10																																												
	8	3	7																																											
-	4	7	2																																											
	3	6	5																																											
Erweitern	③	<table><tr><td></td><td>H</td><td>Z</td><td>E</td></tr><tr><td></td><td>8</td><td>3¹⁰</td><td>7</td></tr><tr><td>-</td><td>4₁</td><td>7</td><td>2</td></tr><tr><td></td><td>3</td><td>6</td><td>5</td></tr></table>		H	Z	E		8	3 ¹⁰	7	-	4 ₁	7	2		3	6	5	- 7 Einer minus 2 Einer gleich 5 Einer. - 3 Zehner minus 7 Zehner geht nicht. Ich erweitere „oben“ um 10 Zehner und „unten“ um 1 Hunderter. - 13 Zehner minus 7 Zehner gleich 6 Zehner. - 8 Hunderter minus 5 Hunderter gleich 3 Hunderter.	④	<table><tr><td></td><td>H</td><td>Z</td><td>E</td></tr><tr><td></td><td>8</td><td>3¹⁰</td><td>7</td></tr><tr><td>-</td><td>4₁</td><td>7</td><td>2</td></tr><tr><td></td><td>3</td><td>6</td><td>5</td></tr></table>		H	Z	E		8	3 ¹⁰	7	-	4 ₁	7	2		3	6	5	- Von 2 Einern bis 7 Einer sind es 5 Einer. - Von 7 Zehnern kann man nicht bis 3 Zehner ergänzen. Ich erweitere „oben“ um 10 Zehner und „unten“ um 1 Hunderter. - Von 7 Zehnern bis 13 Zehner sind es 6 Zehner. - Von 5 Hundertern bis 8 Hunderter sind es 3 Hunderter.								
		H	Z	E																																										
		8	3 ¹⁰	7																																										
	-	4 ₁	7	2																																										
		3	6	5																																										
	H	Z	E																																											
	8	3 ¹⁰	7																																											
-	4 ₁	7	2																																											
	3	6	5																																											

Auffüllen		Abziehen		Ergänzen																	
				⑤ <table><tr><td></td><td>H</td><td>Z</td><td>E</td></tr><tr><td></td><td>8</td><td>3</td><td>7</td></tr><tr><td>-</td><td>4₁</td><td>7</td><td>2</td></tr><tr><td></td><td>3</td><td>6</td><td>5</td></tr></table>		H	Z	E		8	3	7	-	4 ₁	7	2		3	6	5	- Von 2 Einern bis 7 Einer sind es 5 Einer. - Die 7 Zehner fülle ich mit 6 Zehnern auf. Dann habe ich die geforderten 3 Zehner und weitere 10 Zehner, die zu einem Hunderter gebündelt werden. Kurz: - Von 7 Zehnern bis 13 Zehner sind es 6 Zehner. - Von 5 Hundertern bis 8 Hunderter sind es 3 Hunderter.
	H	Z	E																		
	8	3	7																		
-	4 ₁	7	2																		
	3	6	5																		

Abziehen oder Ergänzen?

Die Diskussion, welches Verfahren der schriftlichen Subtraktion mit den Kindern erarbeitet werden soll, ist über 100 Jahre alt. Schon zu Beginn des 20. Jahrhunderts wurde darüber gestritten, ob das „*norddeutsche Verfahren*“ (Abziehen mit Entbündeln, fälschlich auch als „Borgeverfahren“ bezeichnet, denn es wird entbündelt, nicht „geborgt“) oder die „*österreichische*“ bzw. „*süddeutsche*“ Methode (Ergänzen mit Auffüllen), die schon von Adam Ries (1574; vgl. Abb. 2.5-23) als (einziges) Verfahren der schriftlichen Subtraktion propagiert wurde, zu bevorzugen sei. Eine frühe Bewertung nimmt Költzsch (1907, 180) vor: „Die österreichische Methode braucht keine Erinnerungspunkte im Minuendus“ (gemeint sind Punkte bzw. Striche als Hinweise auf vorgenommene Entbündelungen in der Endform der Schreibweise); „die norddeutsche dagegen erscheint etwas leichter und einfacher für das Verständnis des Kindes“.

Beide Verfahren konkurrierten zu Beginn des 20. Jahrhunderts sowohl in der Volksschule als auch im Gymnasium miteinander, wobei tendenziell das „norddeutsche“ Verfahren in der Volksschule weiter verbreitet war, im Gymnasium mehrheitlich das „süddeutsche“ Verfahren unterrichtet wurde (Lietzmann, 1912, 50).

Für das Gymnasium wurde bereits 1913 vom „Deutschen Ausschuss für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (DAMNU)“ als einheitliches Verfahren das „süddeutsche“ Ergänzen vorgeschlagen (Drenckhahn, 1952). Für die Grundschule wurde eine solche Empfehlung am 25. März 1958 vom „Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland“ (KMK, 1958) ausgesprochen (Abb. 2.5-20).

„Bei der Subtraktion wird die Ergänzungsmethode angewandt:

Beispiele:

$$\begin{array}{r} a: \quad 395 \\ - 254 \\ \hline 141 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} b: \quad 521 \\ - 378 \\ \hline 143 \end{array}$$

Es wird gesprochen:

zu a: 4 und 1 ist 5
5 und 4 ist 9
2 und 1 ist 3

zu b: 8 und 3 ist 11
8 und 4 ist 12
4 und 1 ist 5

(Die unterstrichene Zahl ist zu betonen.)“

Abb. 2.5-20 Empfehlungen der KMK vom 25. März 1958

In den späteren Empfehlungen (KMK, 1976) wurde nur die Sprechweise von „und“ auf „plus“ geändert.

Für die Festlegung auf ein einheitliches Verfahren für die schriftliche Subtraktion findet man in den KMK-Empfehlungen von 1958 die folgende Begründung: „Eine Einheitlichkeit in den Formen des schriftlichen Rechnens hat für Schüler und Lehrer so große Vorteile, daß um ihretwillen persönliche Neigungen oder einzelstaatliche Gewohnheiten außer acht bleiben müssen“ (KMK, 1958). Eine Begründung für die Festlegung auf das Ergänzen wird aber nicht gegeben. Dafür waren wohl andere Überlegungen und Intentionen ausschlaggebend (vgl. Schipper, 1998).

Anpassung an den gymnasialen Mathematikunterricht

Die „Einheitlichkeit in den Formen des schriftlichen Rechnens“ sollte für alle Schulformen erreicht werden. Die Anpassung des Rechnens in der Volksschule an die gymnasiale Praxis des ergänzenden Rechnens war ein wichtiges Motiv der KMK (Drenckhahn, 1952; Windolph, 1997).

Schnelligkeit und Sicherheit als zentrale Auswahlkriterien

Wegen der großen lebenspraktischen Bedeutung schriftlichen Rechnens in der damaligen Zeit waren schnelle und sichere Ausführungen der schriftlichen Verfahren nachvollziehbare Auswahlkriterien. Anders als die vier anderen Verfahren der schriftlichen Subtraktion muss bei der Auffülltechnik keine Zwischenform der Notation erarbeitet werden. Die angestrebte Endform wird bereits in der Erarbeitungsphase erreicht.

Den Hintergrund der Entscheidung für das Ergänzen bildete vermutlich auch eine empirische Untersuchung von Johnson (1938), über die Drenckhahn (1952, 351) folgendes berichtete: „Nach ihm weist das Borgeverfahren 16 Prozent mehr Fehler auf und verlangt 67 Prozent mehr Zeit als das Ergänzungsverfahren“. Es kann angenommen werden, dass die KMK sich auf diese Publikation gestützt hat, obwohl Roth (1956) zwei Jahre vor der Veröffentlichung der Empfehlungen über eine neuere empirische Studie von Brownell und Moser (1949) berichtet hatte, die die Befunde von Johnson stark relativiert. Diese beiden Autoren konnten zeigen, dass

- das „österreichische“ (Ergänzungs-)Verfahren zwar schneller zur Rechenfertigkeit führt, aber deutlich schwieriger zu erklären und von den Kindern zu verstehen ist;
- eine drillmäßige Behandlung des Ergänzens das beste Verfahren ist, wenn rein mechanische Rechenfertigkeit angestrebt wird;
- auf Einsicht zielende Unterrichtsmaßnahmen grundsätzlich, also unabhängig vom Verfahren, zu besseren Leistungen (gemessen an der Fehlerhäufigkeit) führen als Drillmethoden und
- das Abziehen mit Entbündeln zu favorisieren ist, wenn Verständnis angestrebt wird.

Diese Befunde wurden auch von Mosel-Göbel (1988) bestätigt. Sie konnte zeigen, dass 80 Prozent der Kinder, die das Abziehen mit Entbündeln gelernt haben, ihre Rechnungen auf eine Art begründen konnten, die Einsicht in das Verfahren dokumentiert. Von denjenigen Kindern dagegen, die das Ergänzen mit Erweitern oder mit der Auffülltechnik gelernt hatten, zeigten nur zehn Prozent Verständnis für ihren Algorithmus; die überwiegende Mehrheit dieser Kinder beherrschte das Verfahren nur rein mechanisch.

Aktuelle Situation

Als Folge einer an die Kultusministerien aller Bundesländer gerichteten Initiative von Radatz und Schipper, das Verfahren der schriftlichen Subtraktion freizugeben, hat das Land Nordrhein-Westfalen am 10. September 1996 (Az. IIA 336-27/1 Nr. 665/95) für dieses Bundesland die Festlegung auf das ergänzende Rechnen aufgehoben. Bayern ist mit seinem Lehrplan vom Juli 2000 (Bayerisches Staatsministerium, 2000) noch einen Schritt weiter gegangen. Für dieses

Bundesland wurde als Verfahren der schriftlichen Subtraktion das Abziehen mit Entbündeln festgelegt.

Im Jahre 2001 hat die KMK die Festlegung von 1958 auf das Ergänzen aufgehoben. In ihrer Sitzung am 14. Dezember 2001 hat sie beschlossen, den Anhang der „Empfehlungen und Richtlinien zum Mathematikunterricht in der Grundschule“ vom 3. Dezember 1976 (KMK, 1976) aufzuheben. In diesem Anhang waren Rechenrichtung, Schreibform und Sprechweise der schriftlichen Subtraktion festgelegt (Abb. 2.5-20 mit Änderung der Sprechweise von „und“ auf „plus“).

Mit Beschluss von 2001 ist das Verfahren der schriftlichen Subtraktion nach mehr als vierzigjähriger Festlegung auf das Ergänzen nun auch durch die KMK freigegeben. Bis auf Bayern, das im neuen LehrplanPLUS Grundschule (Bayerisches Staatsministerium, 2014) wieder das Abziehen mit Entbündeln festgeschrieben hat, folgen die Lehrpläne und Kerncurricula der anderen Bundesländer den KMK-Empfehlungen von 2001. In einigen Lehrplänen wird die Freigabe ausdrücklich angesprochen, in anderen erfolgt die Freigabe dadurch, dass kein Verfahren mehr vorge-schrieben wird. Lehrerinnen und Lehrer können nun selbst entscheiden, welches Verfahren sie einführen wollen. Im folgenden Abschnitt möchten wir dafür einige Entscheidungshilfen geben.

Bewertung der drei Hauptverfahren

Bereits mehrfach haben wir betont, dass das Hauptziel der Erarbeitung schriftlicher Rechenverfahren in der Grundschule heute nicht mehr nur die Beherrschung der Technik bis zur vollständigen Automatisierung sein kann. Die Schülerinnen und Schüler sollen die schriftliche Subtraktion durchführen können und verstehen. Unsere Bewertung der drei Hauptverfahren orientiert sich in erster Linie an dem Ziel des Verständnisses.

Abziehen mit Entbündeln

Weltweit ist das Abziehen mit Entbündeln das am häufigsten verwendete Verfahren. Es wird u. a. eingesetzt in den USA, Kanada, Niederlande, England, Italien, Spanien, Portugal, Türkei, Japan, China, Finnland, Schweden, Indonesien, Israel und weiteren Ländern (vgl. Mosel-Göbel, 1988).

Das Abziehen ist die *Grundvorstellung* der Subtraktion, die von vielen Kindern schon vor der Einschulung erworben wird und in Sachkontexten gegenüber dem Ergänzen deutlich häufiger vorkommt. In den meisten Kontexten zur Subtraktion im Alltag und in Schulbüchern geht es um die Grundvorstellung des Abziehens. Dazu passt dieses Verfahren.

Die *Behandlung des Übertrags* mit Entbündeln bei der Subtraktion nutzt vom Grundsatz her die gleiche fundamentale Idee unseres dezimalen Stellenwertsystems, die bei der schriftlichen Addition in Form des Bündelns genutzt wird. Ein Umlernen oder Aneignen von „Tricks“ ist nicht notwendig. Das Entbündeln wird in der konkret-handelnden *Erarbeitung des Verfahrens* für die Sicherung des Verständ-

nisses genutzt, sprachlich begleitet und auf die symbolische Ebene der Notation übertragen.

Die *Notationsform* in der Erarbeitungsphase mag Erwachsenen etwas umständlich erscheinen. Sie hilft aber gerade den leistungsschwächeren Kindern, bei Unsicherheit über den Ablauf des Verfahrens zu rekonstruieren, weil in der Notation der Entbündelungsprozess sehr ausführlich dargestellt ist.

Beim Abziehen mit Entbündeln wird von oben nach unten gerechnet. Bei der schriftlichen Addition hat sich mehrheitlich ein Rechnen von unten nach oben durchgesetzt. Diese Unterschiede in den *Rechenrichtungen* können den Kindern helfen, Verwechslungen von Addition und Subtraktion zu vermeiden. Die Gefahr der Verwechslung beider Verfahren (Rechenrichtungsfehler) wird auch dadurch reduziert, dass bei der schriftlichen Subtraktion die Umformungen ausschließlich beim Minuenden vorgenommen werden, so dass keine Interferenzen mit dem Übertrag bei der schriftlichen Addition entstehen können.

Die *empirische Studie* von Mosel-Göbel (1988) zeigt, dass Grundschüler dieses Abziehverfahren deutlich besser verstehen als eines der Ergänzungsverfahren. Außerdem beträgt die Fehlerquote z. B. bei der Aufgabe $562 - 326$ beim Abziehen nur 2,9 Prozent gegenüber 10,9 Prozent beim Erweitern und 25,0 Prozent beim Auffüllen.

Subtraktionen mit mehreren Subtrahenden sind im Vergleich mit Ergänzungsverfahren beim Abziehen schwieriger zu berechnen, weil das Entbündeln nur einer größeren Einheit im Minuenden manchmal nicht ausreicht, die Aufgabe zu lösen. Dieses Problem stellt sich aber nicht, wenn in einer Sachsituation des Kaufens von mehreren Artikeln erst die Gesamtausgaben über Addition ermittelt und dann vom vorhandenen Betrag subtrahiert werden. Außerdem wird in vielen Lehrplänen zwar die schriftliche Addition mehrerer Summanden gefordert, Subtraktionen mit mehr als einem Subtrahenden werden aber ausdrücklich ausgeschlossen.

Als Argument gegen das Abziehen mit Entbündeln wird häufig angeführt, dass Nullen im Minuenden (z. B. bei der Aufgabe $600 - 186$) für die Kinder schwierig zu behandeln seien und deshalb zu häufigen Fehlern führen könnten. Auch wenn wir uns wünschen, dass die Kinder diese Aufgabe im Kopf ergänzend lösen, kann sie selbstverständlich auch abziehend mit Entbündeln gerechnet werden. Da an der Zehnerstelle des Minuenden eine Null steht, wird einer der 6 Hunderter in 10 Zehner entbündelt; es bleiben 5 Hunderter. Von den so entstandenen 10 Zehnern wird einer zu 10 Einern entbündelt; es bleiben 9 Zehner. Dann kann beginnend mit $10\text{ E} - 6\text{ E} = 4\text{ E}$ die Aufgabe stellenweise gelöst werden. Dieses Vorgehen erfordert einen etwas höheren Schreibaufwand, ist aber vom Grundsatz her nicht schwieriger.

	H	Z	E
		9	
	5	10	10
	6	0	0
-	1	8	6
	4	1	4

Abb. 2.5-21 Abziehen mit Entbündeln mit Nullen im Minuenden

Der Einwand, bei diesem Aufgabentyp käme es zu häufigeren Fehlern, lässt sich empirisch nicht bestätigen. In der Studie von Mosel-Göbel wurde diese Aufgabe von den Kindern, die das Abziehverfahren gelernt hatten, in 2,9 Prozent der Fälle falsch gelöst, von den Kindern mit der Erweiterungstechnik in 2,2 Prozent der Fälle und von den Kindern mit der Auffülltechnik in 5,9 Prozent der Fälle.

Ergänzen mit Erweitern

Das Ergänzen ist eine der *Grundvorstellungen* der Subtraktion, von der wir hoffen, dass sie bei Aufgaben wie $701 - 698$ als Kopfrechenverfahren genutzt wird. Im Vergleich mit dem Abziehen gibt es im Alltag aber deutlich weniger Sachkontexte zum Ergänzen. Diese Grundvorstellung ist im Denken der Kinder nicht so fest verankert wie die des Abziehens; für nicht wenige Kinder steht das Ergänzen mit Erweitern daher im Kontrast zu ihrer natürlichen Grundvorstellung der Subtraktion.

In älteren Lehrplänen wurde gefordert, das Ergänzen mit der Plus-Sprechweise (Abb. 2.5-20 in der Version der KMK-Empfehlung von 1976) durchzuführen, nicht mit der Bis-Sprechweise wie in Tab. 2.5-4. Dies hat zu gehäuft Verwechslungen von Addition und Subtraktion geführt (Gerster, 1982, 52), so dass wir dringend empfehlen, die Bis-Sprechweise zu nutzen, wenn ein Ergänzungsverfahren unterrichtet wird.

Die *Behandlung des Übertrags* basiert auf dem Gesetz von der Konstanz der Differenz bei gleichsinnigem Verändern von Minuend und Subtrahend. Den Kindern Verständnis für diese Gesetzmäßigkeit zu vermitteln, stellt Lehrerinnen und Lehrer vor eine kaum überwindbare Hürde. Oft wird versucht, Einsicht in dieses Gesetz dadurch zu vermitteln, dass zwei Kinder sich Rücken an Rücken aufstellen und alle feststellen, dass Paul ungefähr eine Handbreit größer ist als Mia. Beide Kinder stellen sich dann auf einen Stuhl und klettern mit großem Vergnügen auf das Pult. Immer noch ist Paul ungefähr eine Handbreit größer als Mia. Das verstehen alle Kinder. Dass dies aber etwas mit dem Hinzufügen von 10 Einern beim Minuenden und einem Zehner beim Subtrahenden zu tun hat, wird nicht erkannt. Auch spätere Bemühungen um Vermittlung von Einsicht sind mehrheitlich erfolglos. Für die meisten Kinder ist und bleibt das Ergänzen mit Erweitern ein unverständlicher Algorithmus.

Wenn schon das gleichsinnige Verändern als Grundlage des Verfahrens von den Kindern nicht verstanden wird, dann kann auch keine Erarbeitung erfolgen, die zu einem Verständnis führt. In Schulbüchern wurde die Erweiterungstechnik häufig so dargestellt, dass ein Außenstehender 10

Einer (oder Zehner) zum Minuenden und einen Zehner (oder Hunderter) zum Subtrahenden dazugibt, so dass die Aufgabe dann stellenweise gelöst werden kann. Ein Beispiel zeigt die folgende Abbildung.

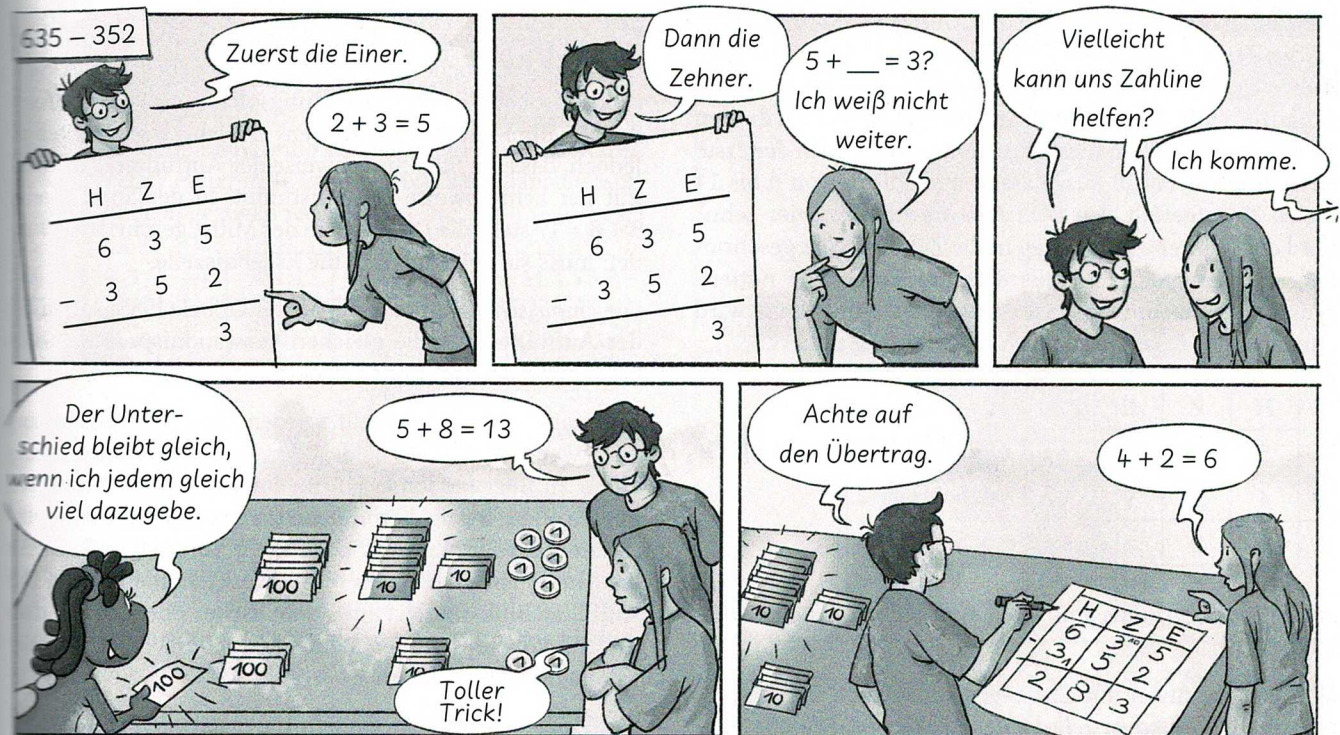


Abb. 2.5-22 Erweiterungstechnik als „Trick“ (in Anlehnung an Welt der Zahl 3, 2004, 97 und Welt der Zahl 3, 2009, 101)

Zahlstrahl erscheint als Retter in der Not. Das ist für die Kinder ein „Toller Trick“ – und bleibt es leider auf Dauer.

Notationsverfahren sollen Kindern helfen, vergessene Verfahrensabläufe wieder zu erinnern. Da die Kinder aber schon nicht verstanden haben, warum „oben“ eine „kleine 10“ und „unten“ eine „kleine 1“ notiert wird, bestehen nur geringe Chancen, dass diese Notation ihnen hilft, das Verfahren zu rekonstruieren. Nach dem Wegfall der „kleinen 10“ im 4. Schuljahr kann der verbliebenen „kleinen 1“ ohnehin nicht mehr angesehen werden, ob das Ergänzen mit Erweitern oder mit Auffülltechnik erarbeitet wurde.

Mosel-Göbel (1988) hat in ihrer empirischen Studie gezeigt, dass 80 Prozent aller Kinder, die das Abziehen mit Entbündeln gelernt haben, das Verfahren verstanden haben und ihre Rechnungen einsichtig begründen können. Dies können von den Kindern, die ein Ergänzungsverfahren gelernt haben, nur 10 Prozent. Mit etwas Routine lernen die Kinder die Technik des Ergänzens mit Erweitern, ein Verständnis für dieses Verfahren kann jedoch kaum erreicht werden.

Ergänzen mit Auffülltechnik

Die Auffülltechnik wurde schon von Adam Ries (1574) empfohlen.

Subtrahiren

Ther wie du ein zahl von der andern nimmst/Thu ihm also/Seh oben die zahl/davon du nimmst/vnd die du abnimmst/gleich darunder/wie im summiren.

Darnach mach ein linien darunder/vnd heb zu forderst an/wie im Addiren/Nimm die erste der vndersten zahl/von der ersten figur/der obersten zahl/was dann bleibet/seh vnder. Darnach nim die ander figur der vnderen zahl/von der andern der obersten zahl/was bleibet/seh auch vnder. Magstu aber die vnder figur/von der obern nicht nemen/so nim sie von zehen/Zum bleibenden gib die ober/vnd seh gleich vnder die zehen/was kompt. Darnach addir eins der nechsten vnderen figur/gegen der linien Handt/vnd subtrahir fort bis zum end/wie folgt:

89674	79864	30000
63521	67876	12345
26153	11988	17655

Abb. 2.5-23 Auffülltechnik nach Adam Ries, 1574, 11 f.

Minuend und Subtrahend werden stellengerecht untereinander geschrieben. Gerechnet wird von rechts („der ersten Figur“) nach links mit der Von-Sprechweise: „1 von 4 gleich 3“. „Magstu aber die under Figur von der obern nicht nemen, so nim sie von zehen/ Zum bleibenden gib die

ober und setz gleich under die Linien was kompt. Darnach addir eins der nechsten undern Figurn gegen der lincken Handt und subtrahir fort biß zum end wie folget.“ In der mittleren Aufgabe der Abb. 2.5-23 wird an der Einerstelle zunächst 6 von 10 gleich 4 gerechnet, zu dieser 4 die 4 von der Einerstelle des Minuenden addiert, die Summe 8 „under die Linien“ geschrieben und der Übertrags-Zehner zur 7 an der Zehnerstelle des Subtrahenden im Kopf addiert. Die in heutigen Schulbüchern vorgeschlagenen Verfahren des Ergänzens mit Auffüllen entsprechen grundsätzlich diesem Verfahren von Adam Ries. Manchmal wird jedoch der erste Rechenschritt bis 10 ausgelassen und sofort „von 6 bis 14 gleich 8“ aufgefüllt. Mit dem Aussprechen bis „vier-zehn“ wird der Zehner als Übertrag in die Zehnerspalte geschrieben und dann das Ergebnis 8 in der Einerstelle notiert. Wenn die Plus-Sprechweise verwendet wird, dann wird zunächst das Ergebnis, danach der Übertrag notiert.

	H	Z	E	Sprich:
	5	6	7	$9 + 8 = 17$. Schreibe 8, übertrage 1.
-	4	3 ₁	9	$4 + 2 = 6$. Schreibe 2.
	1	2	8	$4 + 1 = 5$. Schreibe 1.

Abb. 2.5-24 Auffülltechnik nach Wittmann & Müller, 2012, 93

Wie das Ergänzen mit Erweitern nutzt auch die Auffülltechnik die *Grundvorstellung* des Ergänzens. Die oben angeführten Bedenken, dass dies nicht die Grundvorstellung ist, die Kinder in erster Linie mit der Subtraktion verbinden, gilt daher auch für dieses Verfahren.

Für die *Behandlung des Übertrags* wird zumeist ein mechanischer Kilometerzähler oder ein selbst erstelltes Modell eines solchen Kilometerzählers vorgeschlagen. Vier Papierstreifen mit den Ziffern 0 bis 9 werden je durch rechteckige Anzeigenfelder für die vier Stellenwerte geführt und zu Ringen zusammengeklebt. Ein zu diesem Modell passende Einführungsaufgabe lautet z. B. „Leon macht eine Fahrradtour. Bei der Abfahrt hat der Kilometerzähler einen Stand von 439 km, am Ende der Fahrradtour zeigt er 567 km. Wie viele Kilometer ist er gefahren?“

In der *Erarbeitungsphase* sollen die Kinder am Modell die Zahl 439 einstellen, den Einerstreifen um ein Feld auf Null vorstellen und gleichzeitig die Zehnerstelle um 1 vergrößern. Damit soll die Technik mechanischer Kilometerzähler simuliert werden, die das Erreichen einer Null an einer Stelle mit der Vergrößerung um 1 an der nächsten höheren Stelle verbindet. Anschließend sollen sie den Einerstreifen so lange weiterschieben, bis die 7 angezeigt wird. Zugleich müssen sie registrieren, dass sie damit den Einerstreifen um insgesamt 8 Felder vorgeschoben haben und dies als Ergebnis in der Einerstelle der Stellentafel notieren.

Heutige Grundschüler werden wohl noch nie einen mechanischen Kilometerzähler gesehen haben, erst recht nicht seine Technik kennen, sodass zu bezweifeln ist, dass sie den Hintergrund der am Modell vorzunehmenden, überaus

komplexen Handlungen verstehen. Gravierender ist noch, dass hier im Grunde nur auf der symbolischen Ebene der Ziffern gearbeitet wird. Wir können uns nicht vorstellen, dass einer Mehrheit von Drittklässlern auf die beschriebene Weise ein Verständnis für die Auffülltechnik vermittelt werden kann.

Die *Notationsform* der Auffülltechnik ist die kürzeste der drei hier besprochenen Verfahren der schriftlichen Subtraktion. Schon in der Erarbeitungsphase wird die Endform der Notation mit „kleinen Einsen“ erreicht. Von Nachteil ist jedoch, dass die Plus-Sprechweise der Auffülltechnik nicht mit der Schreibweise übereinstimmt. In der Sprechweise $9 + 8 = 17$ steht die Differenz in der Mitte, geschrieben werden muss sie aber unten in die Ergebniszeile.

Die *empirischen Befunde* von Mosel-Göbel (1988) sehen bei der Auffülltechnik die gleichen Verständnisprobleme wie beim Ergänzen mit Erweitern.

Insgesamt muss festgestellt werden, dass die Vermittlung von Verständnis bei beiden Ergänzungsverfahren eine kaum zu überwindende Hürde darstellt. Beide Verfahren nutzen eine wenig verbreitete und vertraute Grundvorstellung der Subtraktion. Die Erweiterungstechnik ist für die Kinder ein „Trick“, der für sie unverstanden bleibt. Die Auffülltechnik operiert auf symbolischer Ebene, ohne dass die Kinder die dahinter stehende Technik mechanischer Kilometerzähler kennen.

Das Abziehen mit Entbündeln nutzt dagegen die natürliche Grundvorstellung des Abziehens und knüpft damit an die vertrauten Abziehverfahren beim Kopfrechnen in den beiden ersten Schuljahren an. Vor allem nutzt es in der Erarbeitungsphase mit dem Entbündeln eine Technik, die die Kinder verstehen können. Da Verständnis das zentrale Ziel der Behandlung schriftlichen Rechnens ist, ist aus unserer Sicht das Abziehen mit Entbündeln das für den heutigen Mathematikunterricht zu bevorzugende Verfahren. Deshalb gehen wir im Folgenden nur noch auf dieses Verfahren ein.

Vorkenntnisse prüfen und sichern

Um im Sinne des Abziehens mit Entbündeln schriftlich subtrahieren zu können, müssen die Kinder Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 20 sicher lösen können und den Prozess des Entbündelns verstehen. Für die rechnerische Sicherheit reicht es grundsätzlich aus, die Ergebnisse von Subtraktionen im Zahlenraum bis 10 auswendig zu wissen und Aufgaben mit Zehnerübergang nichtzählend, z. B. schrittweise schnell berechnen zu können. Noch einfacher ist es, wenn die Kinder schon über ein Auswendigwissen aller Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 20 verfügen. Bezogen auf das Entbündeln müssen die Schülerinnen und Schüler erkennen, wann und warum dieser Vorgang notwendig ist, wissen wie er durchgeführt und notiert wird und dann das Ergebnis berechnen.

Einem von Tartaglia (1499 – 1557) vorgeschlagenen Verfahren der schriftlichen Subtraktion kann dafür die Grund-

entnommen werden, die hier an der Beispielaufgabe 432 – 358 erläutert wird. Minuend und Subtrahend werden stellengerecht untereinander geschrieben. Die Rechnung beginnt – wie viele andere historische Verfahren – von links nach rechts. Zunächst wird geprüft, ob die Differenz an jeder Stelle ohne Übertrag berechnet werden kann. In der Beispielaufgabe ist dies an der Hunderterstelle möglich, nicht jedoch an der Zehnerstelle. Deshalb wird ohne Notation, also rein mental, ein Hunderter entbündelt; aus 8 H, 12 Z, 3 E entstehen 7 H, 12 Z, 3 E. Da auch die Rechnung an der Einerstelle nicht ohne weiteres gelöst werden kann, wird noch ein Zehner in 10 Einer entbündelt. Danach kann an jeder Stelle abgezogen werden.

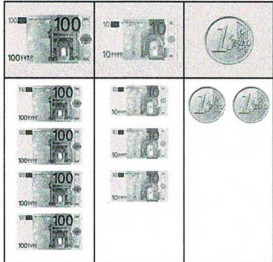
8	2	3	→	7	12	3	→	7	11	13
3	5	8		3	5	8		3	5	8
								4	6	5

Abb. 2.5-25 Tartaglias Subtraktion von links nach rechts mit vorherigem mentalen Entbündeln

Die Idee, zunächst die Stellen „passend“ zu machen, sodass in den einzelnen Stellenwerten ohne Übertrag gerechnet werden kann, ist auch die Grundidee beim Entbündelungsverfahren. Wir schlagen vor, sie vor der eigentlichen Erarbeitung des Verfahrens in Sachkontexten mit spielerischen Handlungen zu festigen.

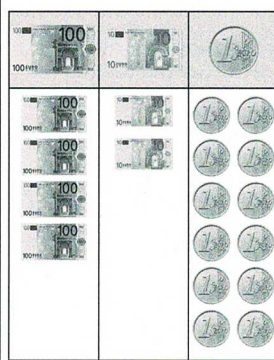
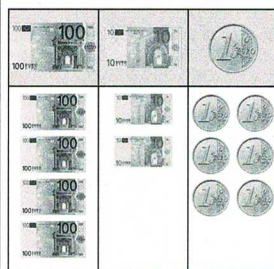
Ein Kind verwaltet die Wechselkasse mit Scheinen zu 100 € und 10 € sowie Münzen zu 1 €. Die Lehrerin (später die Partnerin) fordert ein Kind auf, z. B. 432 Euro aus der Wechselkasse zu holen und in eine Stellentafel (KV 2.1) zu legen. Anschließend möchte die Lehrerin (die Partnerin) von diesem gelegten Betrag 6 Euro haben.

Tab. 2.5-5 Von 432 € sollen 6 € abgegeben werden.

vorhanden		
abzugeben	6 Euro	

Die Kinder erkennen, dass es nicht möglich ist, von den 432 Euro 6 Euro abzugeben, weil dort ja nur 2 Euro liegen. Ein 10-Euro-Schein wird in 10 Ein-Euro-Stücke gewechselt.

Tab. 2.5-6 Ein 10-Euro-Schein wird in 10 Münzen zu je 1 Euro gewechselt; 6 Euro können abgegeben werden.

vorhanden		
abzugeben	6 Euro	
es bleiben		

Dieser Vorgang wird auf die symbolische Ebene übertragen.

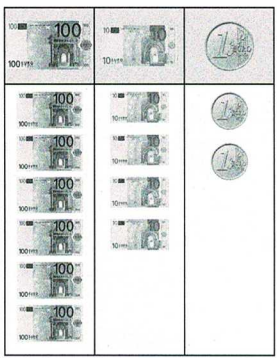
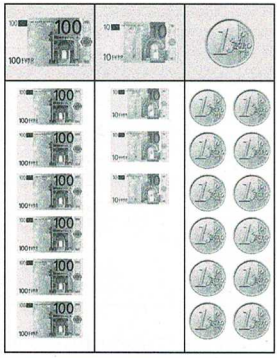
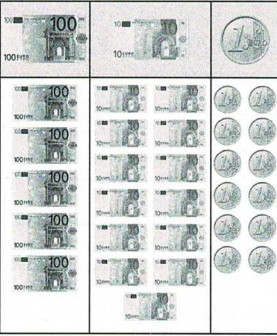
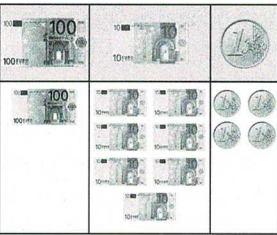
Tab. 2.5-7 Übertragung auf die symbolische Ebene

	H	Z	E		H	Z	E
	4	3	2		4	2	12
–			6	–			6
					4	2	6

Manchen Kindern wird die soeben besprochene Aufgabe zu leicht erscheinen, weil sie sie im Kopf rechnen können. An ihr kann aber die Grundidee des Wechsels gut erarbeitet werden und damit die Basis für das Rechnen mit größeren Zahlen geschaffen werden.

Ein Kind legt 642 Euro in die Stellentafel und soll davon 468 Euro abgeben. Von rechts nach links werden die Entbündelungsprozesse so lange fortgesetzt, bis der Betrag abgegeben werden kann. Von 2 Ein-Euro-Münzen können keine 8 abgegeben werden. Also wird einer der 4 Zehn-Euro-Scheine in 10 Ein-Euro-Münzen gewechselt. Von den verbliebenen 3 Zehn-Euro-Scheinen können keine 6 abgegeben werden. Es muss einer der 6 Hundert-Euro-Scheine in 10 Zehn-Euro-Scheine gewechselt werden. Dann haben wir insgesamt noch 5 Hundert-Euro-Scheine, 13 Zehn-Euro-Scheine und 12 Ein-Euro-Münzen. Jetzt kann passend abgegeben werden.

Tab. 2.5-8 Fortgesetztes Entbündeln, um einen Betrag passend abgeben zu können

vorhanden		
abzugeben	468 Euro	
einen Zehner wechseln		
einen Hunderter wechseln		
es bleiben		

Auch diese konkreten Handlungen werden in symbolischer Form notiert.

Tab. 2.5-9 Fortgesetztes Entbündeln auf der symbolischen Ebene

	H	Z	E		H	Z	E		H	Z	E	
	6	4	2		6	3	12		5	13	12	
-	4	6	8		-	4	6	8	-	4	6	8
										1	7	4

Das Verfahren „Abziehen mit Entbündeln“ erarbeiten

Wie die schriftliche Addition (S. 100 ff.) kann auch die schriftliche Subtraktion im Sinne des Abziehens mit Entbündeln sowohl mit Zehnersystemblöcken als auch mit Rechengeld gut erarbeitet werden. Wir empfehlen vorbereitende Übungen zur Festigung des Verständnisses für die Notwendigkeit und Art der Durchführung sowie Notation des Entbündelns, wie sie im letzten Abschnitt beschrieben wurden.

Nach Durchführung dieser Übungen ist es naheliegend, die Erarbeitung des Verfahrens ebenfalls mit Rechengeld vorzunehmen. Auch in dieser Erarbeitungsphase sollte eine „Wechselstube“ mit 100-Euro- und 10-Euro-Scheinen sowie Ein-Euro-Münzen eingerichtet werden, um die Aufmerksamkeit der Kinder auf das Wechseln bzw. Entbündeln zu fokussieren. Nach den vorbereitenden Übungen kann das Verfahren an einer Beispielaufgabe mit zwei Überträgen erarbeitet werden, z. B. an der Aufgabe $853 - 476$. Für die Erarbeitungsphase empfehlen wir, nach der Kopfzeile eine Leerzeile für eine übersichtliche Notation der Überträge zu lassen.

Tab. 2.5-10 Erarbeitung des Abziehens mit Entbündeln mit Rechengeld

Aufgabe: 853 – 476																														
Handlungen	Sprechweise	Notation																												
1. Schritt: Darstellen des Minuenden <table><tr><th>H</th><th>Z</th><th>E</th></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>	H	Z	E				„Erst 853 Euro in die Tabelle legen und die Aufgabe in die Stellentafel schreiben.“	<table><tr><td></td><th>H</th><th>Z</th><th>E</th></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>8</td><td>5</td><td>3</td></tr><tr><td>–</td><td>4</td><td>7</td><td>6</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>				H	Z	E						8	5	3	–	4	7	6				
H	Z	E																												
																														
	H	Z	E																											
	8	5	3																											
–	4	7	6																											
2. Schritt: Wechseln und Subtraktion der Einer <table><tr><th>H</th><th>Z</th><th>E</th></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>	H	Z	E				„3 Einer minus 6 Einer geht nicht. Ich wechsle einen Zehner in zehn Einer. Dann habe ich 4 Zehner und weitere 10 Einer. 13 Einer minus 6 Einer gleich 7 Einer.“	<table><tr><td></td><th>H</th><th>Z</th><th>E</th></tr><tr><td></td><td></td><td>4</td><td>10</td></tr><tr><td></td><td>8</td><td>5</td><td>3</td></tr><tr><td>–</td><td>4</td><td>7</td><td>6</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>7</td></tr></table>				H	Z	E			4	10		8	5	3	–	4	7	6				7
H	Z	E																												
																														
	H	Z	E																											
		4	10																											
	8	5	3																											
–	4	7	6																											
			7																											
3. Schritt: Wechseln und Subtraktion der Zehner <table><tr><th>H</th><th>Z</th><th>E</th></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>	H	Z	E				„4 Zehner minus 7 Zehner geht nicht. Ich wechsle einen Hunderter in zehn Zehner. Dann habe ich 7 Hunderter und weitere 10 Zehner. 14 Zehner minus 7 Zehner gleich 7 Zehner.“	<table><tr><td></td><th>H</th><th>Z</th><th>E</th></tr><tr><td></td><td>7</td><td>4¹⁰</td><td>10</td></tr><tr><td></td><td>8</td><td>5</td><td>3</td></tr><tr><td>–</td><td>4</td><td>7</td><td>6</td></tr><tr><td></td><td></td><td>7</td><td>7</td></tr></table>				H	Z	E		7	4 ¹⁰	10		8	5	3	–	4	7	6			7	7
H	Z	E																												
																														
	H	Z	E																											
	7	4 ¹⁰	10																											
	8	5	3																											
–	4	7	6																											
		7	7																											
4. Schritt: Subtraktion der Hunderter <table><tr><th>H</th><th>Z</th><th>E</th></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>	H	Z	E				„7 Hunderter minus 4 Hunderter gleich 3 Hunderter“	<table><tr><td></td><th>H</th><th>Z</th><th>E</th></tr><tr><td></td><td>7</td><td>4¹⁰</td><td>10</td></tr><tr><td></td><td>8</td><td>5</td><td>3</td></tr><tr><td>–</td><td>4</td><td>7</td><td>6</td></tr><tr><td></td><td>3</td><td>7</td><td>7</td></tr></table>				H	Z	E		7	4 ¹⁰	10		8	5	3	–	4	7	6		3	7	7
H	Z	E																												
																														
	H	Z	E																											
	7	4 ¹⁰	10																											
	8	5	3																											
–	4	7	6																											
	3	7	7																											

Weitere materialunabhängige Übungs- und Schreibformen

Bei den ersten materialunabhängigen Übungen zur schriftlichen Subtraktion erfolgt die Notation der Aufgabe – wie in der Erarbeitungsphase – in einer Stellentafel. Bei der Sprechweise werden die Stellenwerte eine Zeit lang mitgesprochen, die stellenweisen Ergebnisse betont ausgespro-

chen. In dieser Übungsphase werden auch die Sonderfälle mit Null im Minuenden sorgfältig erarbeitet.

Schreibweise				Sprechweise
746 – 387				6 Einer minus 7 Einer geht nicht. Einen Zehner wechseln.
	H	Z	E	16 Einer minus 7 Einer gleich 9 Einer.
	6	3 ¹⁰	10	
	7	4	6	3 Zehner minus 8 Zehner geht nicht. Einen Hunderter wechseln.
–	3	8	7	
	3	5	9	13 Zehner minus 8 Zehner gleich 5 Zehner.
				6 Hunderter minus 3 Hunderter gleich 3 Hunderter.

Abb. 2.5-26 Erste materialunabhängige Übungen mit ausführlicher Schreib- und Sprechweise

Eine Null an der Zehnerstelle des Minuenden ist eine Schwierigkeit, die im Unterricht gesondert behandelt werden muss. Die Kinder sollen verstehen, dass in solchen Fällen zunächst ein Hunderter in 10 Zehner entbündelt, dann einer der Zehner in 10 Einer gewechselt wird. Für eine übersichtliche Notation dieser Entbündelungen schlagen wir vor, nach der Kopfzeile der Stellentafel zwei Leerzeilen vorzusehen.

Schreibweise				Sprechweise
805 – 547				5 Einer minus 7 Einer geht nicht. Kein Zehner zum Wechseln da. Einen Hunderter in 10 Zehner, dann einen Zehner in 10 Einer wechseln.
	H	Z	E	
		9	10	
	7	10		
	8	0	5	15 Einer minus 7 Einer gleich 8 Einer.
–	5	4	7	9 Zehner minus 4 Zehner gleich 5 Zehner.
	2	5	8	7 Hunderter minus 5 Hunderter gleich 2 Hunderter.

Abb. 2.5-27 Aufgaben mit Null an der Zehnerstelle des Minuenden

Die Subtraktion von vollen Hundertern kann häufig ergänzend im Kopf berechnet werden, z. B. eine Aufgabe wie $700 - 585$. Dennoch sollen die Kinder auch lernen, wie dieser Aufgabentyp schriftlich mit Abziehen und Entbündeln gelöst werden kann. Auch hier empfehlen wir zwei Leerzeilen nach der Kopfzeile der Stellentafel.

Schreibweise				Sprechweise
900 – 624				0 Einer minus 4 Einer geht nicht. Kein Zehner zum Wechseln da. Einen Hunderter in 10 Zehner, dann einen Zehner in 10 Einer wechseln.
	H	Z	E	10 Einer minus 4 Einer gleich 6 Einer.
		9	10	9 Zehner minus 2 Zehner gleich 7 Zehner.
	8	10		8 Hunderter minus 6 Hunderter gleich 2 Hunderter.
	9	0	0	
–	6	2	4	
	2	7	6	

Abb. 2.5-28 Subtraktion von vollen Hundertern

Wir empfehlen, die ausführliche Notation des Entbündelns im 3. Schuljahr beizubehalten, damit sich die damit verbundene Denkweise festigt. Erst im Rahmen der Wiederholung der schriftlichen Subtraktion zu Beginn des 4. Schuljahrs sollte die Schreibweise deutlich verkürzt werden. Entsprechende Hinweise finden Sie im Handbuch für das 4. Schuljahr.

Verkürzt werden kann aber die begleitende Sprechweise schon im 3. Schuljahr dadurch, dass die Stellenwerte nicht mehr mitgesprochen werden. Der Hinweis auf das Entbündeln sollte aber weiterhin ausgesprochen und mitgedacht werden.

Schreibweise				Sprechweise
667 – 458				7 minus 8 geht nicht. Einen Zehner wechseln.
	H	Z	E	17 minus 8 gleich 9.
		5	10	5 minus 5 gleich 0.
	6	6	7	6 minus 4 gleich 2.
–	4	5	8	
	2	0	9	

Abb. 2.5-29 Verkürzung der Sprechweise

Als letzte Verkürzung im 3. Schuljahr schlagen wir vor, die Schreibweise in der Stellentafel wegzulassen. Dabei sollte aber darauf geachtet werden, dass im Rechenheft die Ziffern stellengerecht untereinander geschrieben und die Überträge richtig positioniert werden.

Schreibweise				Sprechweise
635 – 547				5 minus 7 geht nicht. Einen Zehner wechseln.
	5	2 ¹⁰	10	15 minus 7 gleich 8.
	6	3	5	2 minus 4 geht nicht. Einen Hunderter wechseln.
–	5	4	7	12 minus 4 gleich 8.
	0	8	8	5 minus 5 gleich 0.

Abb. 2.5-30 Rechnen ohne Stellentafel im Rechenheft

Als Aufgabe für das letzte Beispiel haben wir bewusst eine mit einer zweistelligen Differenz ausgewählt. In der Anfangszeit sollte die Null an der Hunderterstelle mitgeschrieben werden, später kann sie entfallen. Wie mit Kommazahlen schriftlich addiert werden kann, haben wir auf Seite 110 ausgeführt. Die schriftliche Subtraktion mit Kommazahlen kann dazu analog erarbeitet werden.

Fehlertypen

Fehler bei der schriftlichen Subtraktion können unterschiedliche Ursachen haben. Sie können einerseits Folge insgesamt schwacher rechnerischer Fähigkeiten (z. B. verfestigtes zählendes oder ziffernweises Rechnen) sein, andererseits als Folge von spezifischen Schwierigkeiten mit dem im Unterricht behandelten Verfahren der schriftlichen Subtraktion entstehen. In den folgenden Tabellen stellen wir häufig zu beobachtende verfahrensunabhängige Fehlertypen sowie spezifische Fehler beim Abziehen und beim Ergänzen jeweils mit einem Beispiel und Hinweisen auf mögliche Hilfestellungen vor.

Tab. 2.5-11 Häufig zu beobachtende verfahrensunabhängige Fehler

Beispiel	Beschreibung	mögliche Hilfen
$\begin{array}{r} 5 \quad 6 \quad 4 \\ - 3 \quad 2 \quad 6 \\ \hline 2 \quad 3 \quad 9 \end{array}$	Fehler um +1 bei der Subtraktion (zählendes Rechnen)	Wiederholung 4-Phasen-Modell beim Zehnerübergang
$\begin{array}{r} 5 \quad 6 \quad 4 \\ - 3 \quad 6 \quad 6 \\ \hline 2 \quad 4 \quad 2 \end{array}$	Ziffernweises Rechnen mit Bilden der absoluten Differenz	Fehler beim Kopfrechnen erneut thematisieren; auf Rechenrichtung hinweisen
$\begin{array}{r} 5 \quad 6 \quad 4 \\ - 3 \quad 2 \quad 6 \\ \hline 8 \quad 9 \quad 0 \end{array}$	Rechenrichtungsfehler: Addition statt Subtraktion (häufiger zu beobachten beim Ergänzen)	Überschlag oder Probe (durch schriftliche Addition) rechnen lassen Kontrastaufgaben im kleinen Zahlenraum
$\begin{array}{r} 5 \quad 8 \quad 4 \\ - \quad 6 \quad 6 \\ \hline 1 \quad 8 \end{array}$	Unvollständige Operation: Subtraktion wird an der nicht besetzten Stelle des Subtrahenden nicht ausgeführt.	Aufgabe erneut mit Material erarbeiten Kontrastaufgaben im kleinen Zahlenraum Überschlag
$\begin{array}{r} 5 \quad 6 \quad 4 \\ - 3 \quad 2 \quad 6 \\ \hline 2 \quad 3 \quad 6 \end{array}$	Perseverationsfehler: Letzte Ziffer der Aufgabe wird als Ergebnis übernommen.	„Laut denken“ lassen Die Aufgabe $14 - 6$ mündlich stellen
$\begin{array}{r} 5 \quad 6 \quad 4 \\ - 3 \quad 0 \quad 6 \\ \hline 2 \quad 0 \quad 8 \end{array}$	Grundsätzlicher Fehler mit Null: Taucht in der Rechnung eine Null auf, dann ist das Ergebnis Null.	Bedeutung der Null klären Teilaufgaben (z. B. $64 - 6$) anbieten Entbündeln bei Null im Minuenden bzw. Übertrag zur Null im Subtrahenden beim Ergänzen erneut thematisieren

Tab. 2.5-12 Häufig zu beobachtende Fehler beim Abziehen mit Entbündeln

Beispiel	Beschreibung	mögliche Hilfen
$\begin{array}{r} 5 \quad 6 \quad 4 \\ - 3 \quad 2 \quad 6 \\ \hline 2 \quad 4 \quad 8 \end{array}$	Der entbündelte Zehner wird nicht berücksichtigt.	<i>Zu den Entbündelungsfehlern</i> – Arbeiten mit Material in der Stellentafel – Kontrastbeispiele im überschaubaren Zahlenraum bis 100 – Teilfertigkeiten üben (Entbündeln)
$\begin{array}{r} 5 \quad 0 \quad 0 \\ - 3 \quad 2 \quad 6 \\ \hline 2 \quad 8 \quad 4 \end{array}$	Bei Nullen im Minuenden wird zwar jeder zugehörige Subtrahend von 10 subtrahiert, aber es wird nicht entbündelt.	
$\begin{array}{r} 5 \quad 0 \quad 0 \\ - 3 \quad 2 \quad 6 \\ \hline 1 \quad 8 \quad 4 \end{array}$	Bei Nullen im Minuenden werden zugehörige Subtrahenden von 10 subtrahiert. Die Entbündelung wird nur an der Hunderterstelle berücksichtigt.	

Tab. 2.5-13 Häufig zu beobachtende Fehler bei Ergänzungsverfahren

Beispiel	Beschreibung	mögliche Hilfen
$\begin{array}{r} 5 \quad 6 \quad 4 \\ - 3 \quad 2 \quad 6 \\ \hline 2 \quad 4 \quad 8 \end{array}$	Der Übertrag wird nicht berücksichtigt.	<i>Zu den Übertragsfehlern:</i> – Gleichsinniges Verändern bzw. Auffüllen bis 10 und dann weiter erneut behandeln – Arbeiten in der Stellentafel – Kontrastbeispiele im überschaubaren Zahlenraum bis 100 – Überschlag oder Probe (schriftliche Addition) rechnen lassen
$\begin{array}{r} 5 \quad 6 \quad 4 \\ - 3 \quad 2 \quad 6 \\ \hline 1 \quad 4 \quad 8 \end{array}$	Der Übertrag wird einer falschen Stelle zugeordnet.	
$\begin{array}{r} 5 \quad 6 \quad 4 \\ - 3 \quad 2 \quad 6 \\ \hline 1 \quad 3 \quad 8 \end{array}$	Durchgängig wird über den Stellenwert hinaus ergänzt (Übertrag zu viel).	
$\begin{array}{r} 5 \quad 6 \quad 4 \\ - \quad 8 \quad 2 \\ \hline 5 \quad 8 \quad 2 \end{array}$	Der Übertrag wird nicht in die leere Stelle des Subtrahenden übernommen.	
$\begin{array}{r} 5 \quad 6 \quad 4 \\ - 3 \quad 0 \quad 6 \\ \hline 2 \quad 6 \quad 8 \end{array}$	Kein Übertrag zur Null im Subtrahenden	
$\begin{array}{r} 5 \quad 6 \quad 4 \\ - 3 \quad 2 \quad 4 \\ \hline 2 \quad 3 \quad 0 \end{array}$	Übertrag zu viel bei gleichen Ziffern in einer Spalte	
$\begin{array}{r} 5 \quad 0 \quad 4 \\ - 3 \quad 9 \quad 6 \\ \hline 2 \quad 0 \quad 8 \end{array}$	Kein Übertrag beim Ergänzen von 10 bis 10	

Beispiel	Beschreibung	mögliche Hilfen
$\begin{array}{r} 5 \quad 0 \quad 4 \\ - 3 \quad 2 \quad 6 \\ \hline 2 \quad 3 \quad 8 \end{array}$	Zur 0 im Minuenden wird nicht ergänzt.	<i>Zu den Fehlern mit Null:</i> - Klärung des Begriffs der Null - Addieren und Ergänzen mit 0 im kleinen Zahlenraum
$\begin{array}{r} 5 \quad 0 \quad 0 \\ - 3 \quad 2 \quad 6 \\ \hline 2 \quad 8 \quad 4 \end{array}$	Keine Berücksichtigung von Überträgen bei Nullen im Minuenden	- Übertrag zur 0 erneut erarbeiten

Die Anzahl der bekannten Fehlermuster bei den Ergänzungsverfahren ist wesentlich größer als beim Abziehen mit Entbündeln. Besonders auffällig sind Interferenzen mit dem Verfahren der schriftlichen Addition, die sich nicht nur beim gelegentlichen Verwechseln der Operationen zeigen. Weil in vielen Lehrgängen mit Ergänzungsverfahren die Plus-Sprechweise erarbeitet und auch für die schriftliche Addition ein Rechnen „von unten nach oben“ vorgeschlagen wird, kommt es zu grundsätzlichen Verständnis- und Unterscheidungsschwierigkeiten mit häufigen Verwechslungen von Addition und Subtraktion.

Bei Ergänzungsverfahren sind außerdem besonders häufig Übertragsfehler zu beobachten. In der Studie von Kühnhold & Padberg (1986) betrug der Anteil dieses Fehlertyps an der Anzahl aller Fehler fast 50 Prozent. Dieser Befund ist ein weiteres Zeichen dafür, dass Ergänzungsverfahren von vielen Kindern nicht verstanden werden.

In den Tabellen Tab. 2.5-11 bis Tab. 2.5-13 haben wir bereits Fördermaßnahmen bei spezifischen Schwierigkeiten vorgeschlagen. Hier möchten wir noch auf grundlegende Unterrichtsmaßnahmen aufmerksam machen, mit denen die Anzahl der Fehler reduziert werden kann.

- Regelmäßige *Überschlagsrechnungen* helfen den Kindern, krasse Fehllösungen zu erkennen und zu korrigieren. Im Tausenderraum werden die Zahlen auf volle Hunderter gerundet. Das gleichsinnige Verändern von Minuend und Subtrahend (z. B. $978 - 537$; Überschlag: $1\,000 - 600 = 400$ oder $900 - 500 = 400$) führt in der Regel zu besseren Abschätzungen als das Runden streng nach Rundungsregeln ($978 - 537$; Überschlag nach Rundungsregel: $1\,000 - 500 = 500$).
- Ebenfalls hilfreich ist die Rechenkontrolle durch eine *Probe* bzw. Gegenrechnung über die schriftliche Addition, obwohl viele Kinder diese zusätzliche Rechnung nicht gern durchführen.
- Das *begleitende Sprechen* beim Bearbeiten einer Subtraktionsaufgabe sollte möglichst lange Zeit vor allem von den rechenschwächeren Kindern erwartet werden, bis es zum „inneren Sprechen“ verinnerlicht ist.

2.5.6 Üben und Entdecken

Die Kinder sollen schriftliche Additionen und Subtraktionen mit Verständnis durchführen können. Die alte Forderung, dies besonders schnell und automatisiert zu können, ist angesichts der Vorherrschaft elektronischen Rechens im Beruf und Alltag nicht mehr haltbar. Wichtiger als fortwährende Übungen zur Automatisierung sind Formate, die das Verständnis fördern und nach der Erarbeitung der schriftlichen Addition eine Kopfrechenkultur aufrecht erhalten können. Wichtig ist auch das Anwenden der Verfahren in Sachrechnungssituationen und bei interessanten mathematischen Untersuchungen.

Im Kopf oder schriftlich

Den Kindern werden mehrere Aufgaben zur Addition oder Subtraktion im Zahlenraum bis 1 000 präsentiert. Sie sollen die Aufgaben aber nicht sofort rechnen, sondern zunächst entscheiden, ob sie sie im Kopf oder schriftlich lösen wollen. Erst nach dieser Entscheidung lösen sie die Aufgaben mit ihren gewählten Verfahren.