

Der Austausch macht's

Anregungen zu einer materialgestützten Einführung der halbschriftlichen Division in kooperativen Lernsituationen

► Halbschriftlich rechnen, Punktefeld, Zahlzerlegung

Die halbschriftliche Division bietet ein großes Potenzial für individuelle Rechenwege. Die Möglichkeit zur Visualisierung von unterschiedlichen Vorgehensweisen an Punktefeldern kann sowohl beim verständnisorientierten Erlernen der halbschriftlichen Division helfen als auch zu tieferen Einsichten bei möglichen Zahlzerlegungen beitragen.



1 Kinder vergleichen verschiedene Rechenwege am Punktefeld.

VON SUSANNAH UNTEREGGE
UND TOBIAS WOLLENWEBER

Die Division – auch halbschriftlich?

Beim halbschriftlichen Rechnen geht es nicht um das Anwenden starrer, vorgegebener Lösungswege, sondern um individuelles und flexibles Vorgehen. Durch die verschiedenen Lösungsmöglichkeiten können leicht Gesprächsanlässe zwischen den Kindern entstehen und auch bewusst angeregt werden, in welchen sie sich z.B. über unterschiedliche Vorgehensweisen oder die Effizienz von Strategien austauschen können.

Mit Blick auf die halbschriftliche Addition und Subtraktion gibt es begleitend dazu bereits zahlreiche Angebote und Materialien, wie z.B. das Systemwürfel-Material Dienes (kardinal) oder den Rechenstrich (ordinal). Und auch für

die Multiplikation wurden bereits unterrichtspraktische Ideen und Materialien entwickelt, wie z.B. das Malkreuz in Verbindung mit einem 400-Punktefeld.

Die halbschriftliche Division scheint hingegen bisher seltener zum Gegenstand fachdidaktischer und vor allem unterrichtspraktischer Überlegungen gemacht worden zu sein. Dies ist womöglich darauf zurückzuführen, dass sie auf den ersten Blick nicht so viele verschiedene Strategien bereithält wie die anderen drei Grundrechenarten.

Strategien und Notationsweisen

Für die halbschriftliche Division lassen sich zwei Hauptstrategien (vgl. Padberg/Benz 2011) unterscheiden, zu denen es entsprechend verschiedene Möglichkeiten der Notation gibt, je nachdem, wie ausführlich man die Rechenschritte festhalten möchte.

Schrittweise

Der Dividend wird in geeignete Vielfache des Divisors zerlegt. Es gibt, je nach Zahlenwert, oft mehrere sinnvolle Möglichkeiten für Zerlegungsschritte.

Beispiel:

$$72 : 4 = 18$$

$$40 : 4 = 10$$

$$32 : 4 = 8$$

Mit Blick auf größere Zahlen kann diese Strategie einen späteren, verständnisorientierten Übergang zur schriftlichen Division vorbereiten, bei der dann die Anzahl der Zerlegungsschritte minimiert wird.

lizenziert für Tanja Niß am 15.04.2018

Hilfsaufgabe

Es wird – sofern vorhanden – zunächst eine einfacher zu lösende Hilfsaufgabe (z. B. eine Nachbar- oder Analogieaufgabe) berechnet, aus deren Ergebnis dann das Ergebnis der ursprünglichen Aufgabe abgeleitet werden kann.

Beispiel (Rückgriff auf eine Nachbaraufgabe):

$$72 : 4 = 18$$

$$80 : 4 = 20$$

$$8 : 4 = 2$$

Beispiel (Rückgriff auf eine Analogieaufgabe):

$$72 : 4 = 18$$

$$72 : 8 = 9$$

Im Rahmen dieser Hauptstrategien ist bezüglich der Notation auch der Rückgriff auf entsprechende Umkehraufgaben aus der Multiplikation möglich.

Unterrichtsidee

Punktefelder werden als (kardinales) Anschauungsmittel für die Visualisierung von Rechenwegen häufig im Kontext der Addition, Subtraktion und Multiplikation genutzt. Die hier vorgestellte Lernumgebung soll zeigen, dass auch bei der Einführung der halbschriftlichen Division alle Kinder davon profitieren können.

Mathematischer Hintergrund

Viele Rechenwege bei der halbschriftlichen Division (insbesondere die verschiedenen Möglichkeiten beim schrittweisen Rechnen) beruhen auf dem Distributivgesetz.

Das Distributivgesetz:

$$(a + b) : c = a : c + b : c$$

Beispiel: $72 : 4 = 40 : 4 + 32 : 4$

(Strategie „Schrittweise“)

Kinder müssen das Distributivgesetz auf formaler Ebene in der Grundschule natürlich weder kennen noch „bewusst“ nutzen. Gleichwohl können sie durch die Auseinandersetzung mit unterschiedlichen Zerlegungen (und deren Visualisierung am Punktefeld) schon eine Vorstellung dieser Gesetzmäßigkeit im Kontext konkreter Zahlen aufbauen.

Das 200-Punktefeld als Anschauungsmittel

Strukturierte Anschauungsmittel – wie z. B. Punktefelder – sind für das kindliche Erlernen und Verstehen arithmetischer Zusammenhänge unverzichtbar (vgl. Lorenz 1992). Punktefelder eignen sich als Anschauungsmittel hierbei in besonderer



Auf einen Blick

Klassenstufe: 3

Zeit: 3–4 Unterrichtsstunden

Lerngelegenheiten:

- Anbahnung eines flexiblen (vorteilhaften) Rechnens im Kontext schwieriger Divisionsaufgaben
- Erkundung und Ausnutzung von Beziehungen und Strukturen am Punktefeld
- Erklären und Begründen von eigenen Rechenwegen
- Verknüpfung von Division und Multiplikation

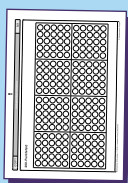
Lernvoraussetzungen:

- Kenntnisse im kleinen Einmaleins
- Grundvorstellungen im Bereich der Division (insbesondere zum Aufteilen)
- Erfahrungen im Umgang mit dem Material (Punktefeld)

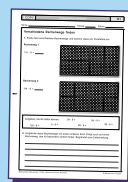
Materialien

M1: 200-Punktefeld

M2: Verschiedene Rechenwege finden



M1

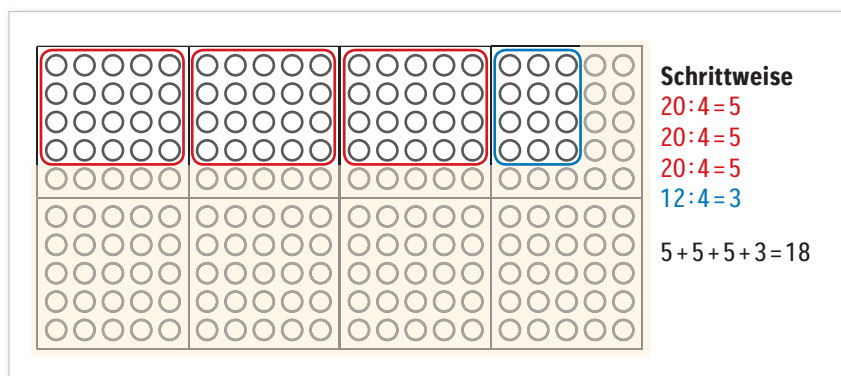


M2

Seite 46

Weise, um auch über mehrere Schuljahre hinweg immer wieder an bereits erlernte, dekadische Strukturen im Sinne einer kardinalen Vorstellung anzuknüpfen.

Der adäquate Umgang mit Anschauungsmitteln sowie das Wahrnehmen und Nutzen von Strukturen sind dabei immer auch Teil des Lernprozesses (vgl. Söbbeke 2007). Mit Blick auf die Verwendung des 200-Punktefeldes (siehe **M1**) im Kontext der halbschriftlichen Division ist es daher wichtig, mit den Kindern vor und auch während des Bearbeitungsprozesses Strukturen und mögliche Zerlegungen immer wieder an unterschiedlichen Beispielen gemeinsam zu thematisieren. Zentral ist, dass die Kinder lernen, den gesamten Ausschnitt auf dem Punktefeld (Dividend) flexibel in verschiedene rechteckige Zerlegungen mit glei-



2 Abgedecktes 200-Punktfeld zur Aufgabe $72:4$ mit möglicher schrittweiser Zerlegung der 72

cher Kantenlänge (Divisor) zu unterteilen. Dabei kann auch ein Bezug zu den Umkehroperationen aus der Multiplikation, die den Kindern häufig noch leichter fällt, hergestellt und produktiv genutzt werden.

Eine Aufgabe wie 72 geteilt durch 4, die über den Zahlenraum des „vertrauten“ kleinen Einmal-eins hinausgeht, bereitet vielen Kindern zunächst Schwierigkeiten. Ein passender Ausschnitt auf dem 200-Punktfeld kann dabei helfen, erste Zerlegungen in einfache Geteiltaufgaben zu finden (siehe Abb. 2).

Weitere mögliche, sichtbare Zerlegungen der 72 sind:

Schrittweise	Hilfsaufgabe	Hilfsaufgabe
$40 : 4 = 10$	$80 : 4 = 20$	$40 : 4 = 10$
$32 : 4 = 8$	$8 : 4 = 2$	$40 : 4 = 10$
$10 + 8 = 18$	$20 - 2 = 18$	$8 : 4 = 2$
		$10 + 10 - 2 = 18$

Ist der Umgang mit einem solchen passend abgedeckten Punktfeld einmal erlernt, bietet es den Kindern gerade zu Beginn der halbschriftlichen Division viele Vorzüge:

- die Möglichkeit einer verständnisorientierten Einsicht in die Richtigkeit und Sinnhaftigkeit einer Zerlegung im Sinne des Distributivgesetzes,
- die Visualisierung der Aufgabe als Ganzes sowie verschiedener Zerlegungsmöglichkeiten in ein und derselben Darstellung,
- Lernen auf zwei Wegen im Sinne eines Darstellungswechsels:
 1. symbolisch $\rightarrow$ kardinal: erst Zerlegung auf symbolischer Ebene, anschließend kardinale Rekonstruktion und Überprüfung am Punktfeld,
 2. kardinal $\rightarrow$ symbolisch: die kardinalen Strukturen des Punktfeldes als Ausgangspunkt für die Notation eines symbolischen Rechenwegs nutzen,
- Förderung des flexiblen Rechnens durch die Verwendung und den Vergleich von verschiedenen Rechenwegen.

Einführung und erste Arbeitsphase

In der Tafelmitte hängen verschiedene Divisionsaufgaben aus der 4er-Reihe. Die Kinder sollen die Aufgaben entweder als „einfach“ (linke Tafelseite) oder „schwierig“ (rechte Tafelseite) einordnen.

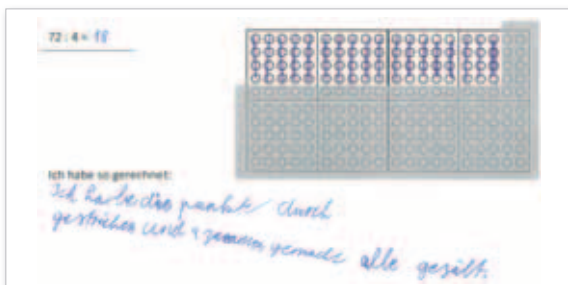
Anschließend erhalten die Kinder zu einer als „schwierig“ beurteilten Aufgabe (z.B. $72:4$) einen passenden Ausschnitt auf dem Punktfeld, verbunden mit der Aufforderung, einen eigenen Rechenweg zu finden. Zuvor sollten der Aufbau und die Strukturen des Punktfeldes (siehe M1) kurz gemeinsam wiederholt werden.

Die Schülderdokumente in den Abbildungen 4 bis 6 zeigen, wie heterogen die Herangehensweisen sein können. Speziell an den Abbildungen 4 und 5 wird deutlich, dass das Punktfeld die Anbahnung der halbschriftlichen Strategien *Schrittweise* und *Hilfsaufgabe* unterstützen kann.

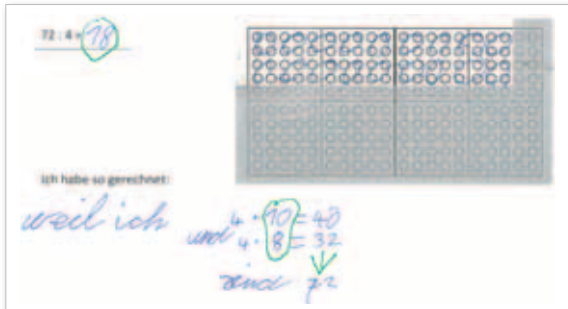
Verschiedene Lösungsstrategien der Kinder sollten in einer gemeinsamen Reflexionsphase an

3 Tafelbild zur Einführung mit möglichen Kinderbegründungen

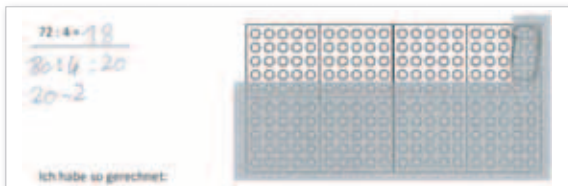




4 Irem orientiert sich noch stark an der Grundvorstellung des Aufteilens.



5 Taha wählt bereits ein schrittweises Vorgehen, indem er die Aufgabe in $4 \cdot 10$ und $4 \cdot 8$ multiplikativ zerlegt.



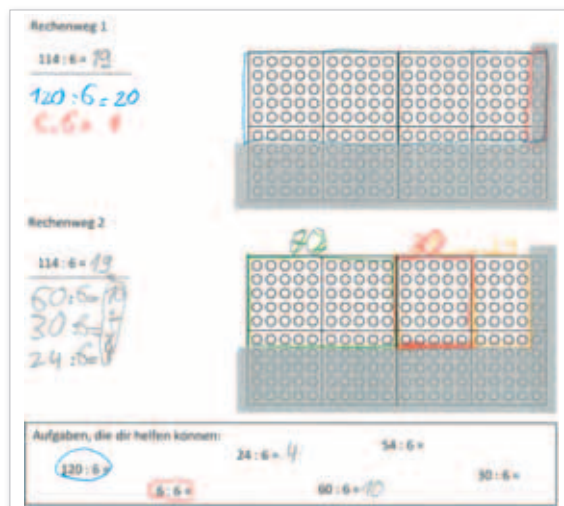
6 Leyla wählt eine passende Hilfsaufgabe, um sich die Aufgabe leichter zu machen.

der Tafel vorgestellt und im Hinblick auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede sowie ihre Effizienz miteinander verglichen werden. Gegebenenfalls kann die Lehrkraft anschließend Impulse für weitere Strategien geben.

Weiterführende Aufgabe

Im Anschluss an den vorgestellten Einstieg bieten sich weitere Aufgaben im Rahmen einer offenen Lernumgebung zum Erkunden und Üben am Punktefeld an. Methodisch ist dabei zu empfehlen, die Lernprozesse der Kinder stets kooperativ – z. B. nach dem Ich-Du-Wir-Prinzip – zu gestalten.

Den Kindern werden zum Beispiel im Rahmen einer Doppelstunde weitere „schwierige Geteilt-aufgaben“ mit passenden Punktefeld-Ausschnitten angeboten, von denen beliebig viele im Sinne einer offenen Lerntheke bearbeitet werden können (siehe z. B. M2). Ziel für die Kinder in der Ich-Phase ist es, nach Möglichkeit zwei verschiedene Rechenwege zu derselben Aufgabe zu finden und im Punktefeld einzuzeichnen (siehe Abb. 7). Dabei empfiehlt es sich mit Kindern zu besprechen, wie man seine Rechenwege besonders „schön“ darstellen kann (Pfeile, Farben, einkreisen, beschriften, markieren).



7 David nutzt für die Berechnung der Aufgabe $114:6$ einmal eine Hilfsaufgabe und einmal eine schrittweise Zerlegung.

Im Anschluss sollen immer zwei Kinder, die die gleiche Aufgabe bearbeitet haben, ihre Rechenwege in einer Du-Phase miteinander vergleichen und sich begründet für den einfachsten Rechenweg entscheiden.

Abschließend werden verschiedene, von den Kindern favorisierte Rechenwege in einer gemeinsamen Wir-Phase von einzelnen Kinderpaaren vorgestellt und gemeinsam reflektiert, denn: Der Austausch macht's!

Fazit

Die halbschriftliche Division bietet viel Potenzial für individuelle Rechenwege und sollte nicht als lästige Durchgangsstation auf dem Weg zur – verhältnismäßig schwer zu verstehenden – schriftlichen Division gesehen werden. Die vorgestellte Lernumgebung ermöglicht es, Kinder zur verständnisorientierten Entwicklung von und Auseinandersetzung mit verschiedenen Rechenstrategien anzuregen. Das passend abgedeckte Punktefeld kann in diesem Zuge einerseits dabei helfen, erste Zerlegungen zu schwierigen Aufgaben zu finden, andererseits aber auch vertiefende Einsichten in die den Rechenwegen zugrunde liegenden mathematischen Strukturen zu erlangen. Es bietet zudem die Chance, dass die Kinder mentale Vorstellungsbilder im Sinne verschiedener, flexibler Zerlegungsmöglichkeiten aufbauen, die langfristig eine rein symbolische Bearbeitung von schwierigen Geteiltaufgaben unterstützen – auch in höheren Zahlenräumen. ■

Die Autorin/der Autor

Susannah Unteregge ist wissenschaftliche Mitarbeiterin am Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts (IEEM) der Technischen Universität Dortmund.

Tobias Wollenweber ist wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts (IEEM) der Technischen Universität Dortmund.

Literatur

■ **Lorenz, Jens Holger:** Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht. Göttingen 1992

■ **Padberg, Friedhelm/Benz, Christiane:** Didaktik der Arithmetik. Für Lehrerbildung und Lehrerfortbildung. 4. erweiterte, stark überarbeitete Auflage. Heidelberg 2011

■ **Söbbeke, Elke:** „Strukturwandel“ im Umgang mit Anschauungsmitteln. Kinder erkunden mathematische Strukturen in Anschauungsmitteln. In: Die Grundschulzeitschrift, Heft 201-2007, S. 4-13

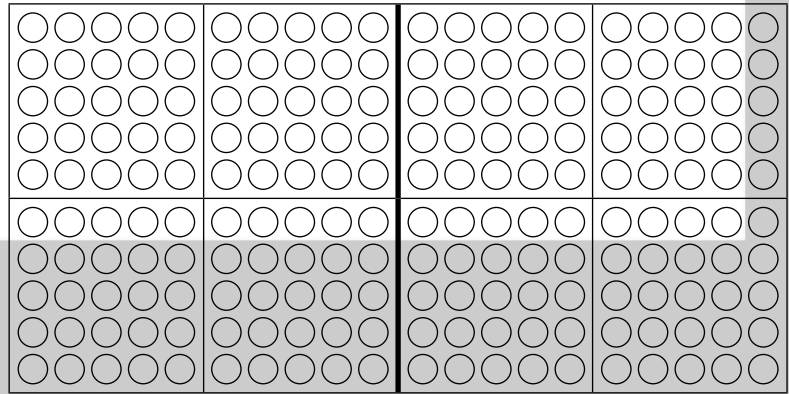
Name: _____ Klasse: _____ Datum: _____

Verschiedene Rechenwege finden

1. Finde zwei verschiedene Rechenwege und zeichne diese am Punktefeld ein.

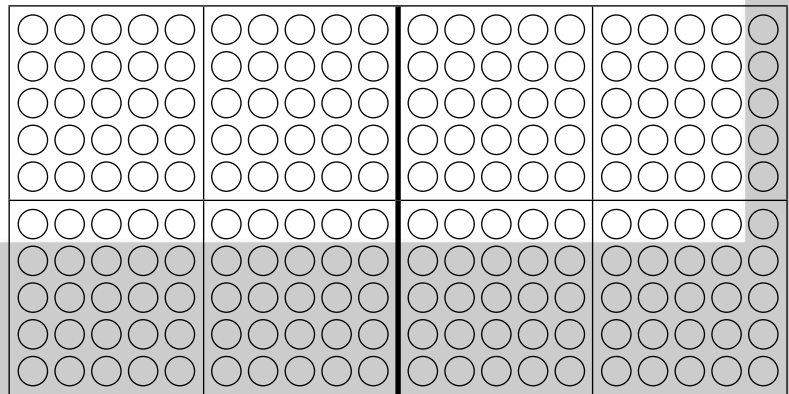
Rechenweg 1

$114 : 6 = \underline{\hspace{2cm}}$



Rechenweg 2

$114 : 6 = \underline{\hspace{2cm}}$



Aufgaben, die dir helfen können:

$24 : 6 =$

$54 : 6 =$

$120 : 6 =$

$6 : 6 =$

$60 : 6 =$

$30 : 6 =$

2. Vergleiche deine Rechenwege mit einem anderen Kind. Einigt euch auf einen Rechenweg, den ihr besonders einfach findet. Begründet eure Entscheidung.
