

AXEL SCHULZ

Multiplikation verstehen

Durch Anschauungsmaterial zu Grundvorstellungen

LERNGRUPPE: 5.–6. Schuljahr

IDEE: Rechteckdarstellungen niveaudifferenziert nutzen

MATERIAL: Vorlage Hunderterfeld

ZEITBEDARF: Unterrichtsideen verteilt auf das Jahr

Wir können nicht mehr davon ausgehen (schon gar nicht mit der Umsetzung des Inklusionsgedankens), dass alle Schülerinnen und Schüler, die in die Sekundarstufe kommen, das Einmaleins sicher beherrschen – manchmal noch nicht einmal, dass sie das Prinzip der Multiplikation verstanden haben. Dies beides – das Verständnis des Prinzips multiplikativer Zusammenhänge und Geläufigkeit bei den Aufgaben des Einmaleins – sind notwendige Grundlagen für ein erfolgreiches Weiterlernen (zum Beispiel bei Brüchen, Dezimalbrüchen und Prozentsen).

Am Beispiel der Multiplikation soll daher im Artikel geklärt werden, wie in inklusiven Lerngruppen die Bedürfnisse sowohl besonders leistungsschwacher aber auch leistungsstärkerer Schülerinnen und Schüler berücksichtigt werden können und zwar an einem gemeinsamen Lerninhalt.

Wenn wir möchten, dass Schülerinnen und Schüler den Zusammenhang zwischen den vier Rechenoperationen erkennen, erläutern und flexibel nutzen können (z. B. beim Rechnen, aber auch beim Umgang mit Termen und Gleichungen) (KMK 2004, S. 10), dann ist es selbstverständlich nötig, dass die Schülerinnen und Schüler das nötige Werkzeug dafür haben: unter anderem das Auswendigwissen relevanter Kernaufgaben (z. B. das kleine Einmaleins) und die Kenntnis relevanter mathematischer Gesetze und Zusammenhänge (z. B. das Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz).

Doch das Auswendiglernen dieses Werkzeugs ohne Verständnisgrundlage, kann gerade das Herstellen von Zu-

sammenhängen und das flexible Anwenden erheblich erschweren. Umgekehrt kann formuliert werden: Ein Merkmal des Verstehens mathematischer Sachverhalte ist es, Zusammenhänge herstellen und nutzen zu können. Das Verstehen des Prinzips der Multiplikation ist somit die Voraussetzung für erfolgreiches Weiterlernen (und nicht das unverstandene Auswendigwissen von Multiplikationsaufgaben). Es lohnt sich also, dieses Verständnis mit allen Schülerinnen und Schülern aufzubauen bzw. erneut zu aktivieren.

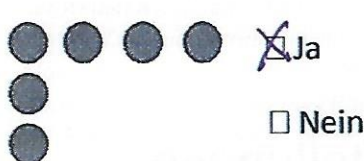
(Tragfähige) Grundvorstellungen zur Multiplikation

Die Multiplikation kann einerseits als wiederholte Addition verstanden und dargestellt werden – und zwar räumlich-simultan (also statisch) und auch zeitlich-sukzessiv (also dynamisch) (vgl. Abb. 1) – und andererseits als kartesisches Produkt. Dabei ist das kartesische Produkt für den ersten Zugang

Zeitlich-sukzessive Darstellungen von 3×4	Räumlich-simultane Darstellungen von 3×4
a) einmal zweimal dreimal  b) Eine Schülerin legt dreimal vier Plättchen, sodass am Ende das Muster f) entsteht.  c) „Petra geht dreimal in den Garten und bringt jedes Mal vier Blumen mit.“	d)  e)  f)  g) „Auf dem Tisch stehen drei Vasen mit jeweils vier Blumen.“

Abb. 1: Tragfähige Grundvorstellungen zur Multiplikation

Passt das folgende Bild zu der Aufgabe 3×4 ?



Begründung: Es gehen drei Kreise nach oben und vier nach rechts.

Abb. 2: Mögliche Fehldeutung einer unvollständigen Rechtecksdarstellung

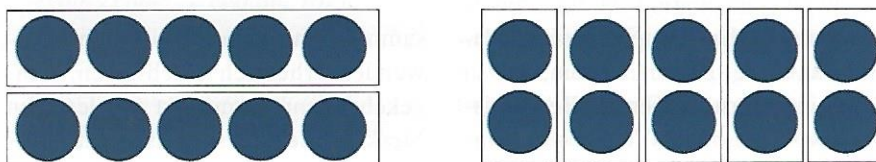


Abb. 3: Mögliche Deutung des rechteckigen Punktefeldes zur Thematisierung des Kommutativgesetzes

weniger geeignet, da es abstrakter ist als die wiederholte Addition (Schipper 2009, S. 147 f.). Durch geeignete Verknüpfung dieser Darstellungen können dabei auch die Zusammenhänge der verschiedenen Grundvorstellungen geklärt werden (Abb. 1a/1d, oder 1b/1f, oder 1c/1g). Eine sehr gute Möglichkeit, das Prinzip der Multiplikation zu veranschaulichen und auch die mit ihr zusammenhängenden Rechengesetze zu klären, bietet das statische Modell der wiederholten Addition als Rechtecksdarstellung (Abb. 1f).

Warum statisch und warum Rechteck?

Die Reduktion des Verständnisses der Multiplikation auf den zeitlich-sukzessiven, also den dynamischen Aspekt der wiederholten Addition, kann dazu

führen, dass vor allem der Aspekt der Wiederholung auch in Darstellungen und der Vorstellung besonders betont wird: Immer das Gleiche neben- bzw. nacheinander. Darstellungen zu dieser Vorstellung der Multiplikation sind jedoch nicht tragfähig. Denn mit ihnen werden vor allem abzählende Lösungsstrategien verstärkt und wichtige Eigenschaften der Multiplikation können mit ihnen nicht geklärt und verstanden werden – zum Beispiel das Distributiv- oder Kommutativgesetz. Sie können selbst versuchen, ob es Ihnen gelingt in der dynamischen Situation in Abb. 1a auch die Tauschaufgabe 4×3 (Sonnenblumen) zu sehen. Zudem ist dieses Modell nicht fortsetzbar, weil es in größeren Zahlenräumen (mit Zahlen weit über das kleine 1×1 hinaus) oder kleineren Zahlenräumen (mit Dezimalbrüchen kleiner 1) nicht mehr anschaulich ist. Sie können das selbst überprüfen,

indem Sie versuchen, die oben geschilderten Rechengeschichten oder Bilder zur Aufgabe 3×4 auch für die Darstellung der Aufgaben $0,3 \times 0,4$ oder 34×43 zu nutzen („Ella geht mal eben 0,3 mal in den Garten und bringt jedes Mal 0,4 Sonnenblumen mit.“).

Auch die statischen Darstellungen, bei der gleichmächtige Mengen eher unstrukturiert nebeneinander liegen (Abb. 1e), führen in diese Sackgassen, denn auch hier können Rechengesetze oder die Multiplikation großer Zahlen oder Zahlen kleiner eins nicht (gut) veranschaulicht und verstanden werden.

Ein tragfähiges und (mental) fortsetzbares Modell bietet daher vor allem die statische Rechtecksdarstellung. Wie dieses sowohl von leistungsschwachen als auch von leistungsstärkeren Schülerinnen und Schülern gedeutet und genutzt werden kann, soll im Folgenden geklärt werden.

Rechtecksdarstellungen lesen, nutzen und verstehen

Zwei der wichtigsten Lernziele beim Lesen und Verstehen von multiplikativen Rechtecksdarstellungen sind

- 1) die Einsicht, dass alle im Rechteck vorhandenen Punkte (oder Quadrate) den Wert des betreffenden Produkts darstellen – und nicht etwa nur die Anzahl der ersten Spalte und Zeile (Abb. 2, vgl. auch Selter u. a. 2014, S. 78) und
- 2) die Einsicht, dass die Faktoren jeweils als ganze Zeilen bzw. Spalten gedeutet werden müssen. Durch

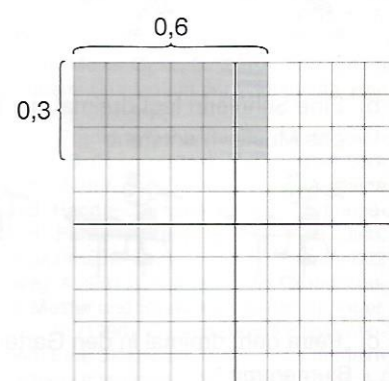
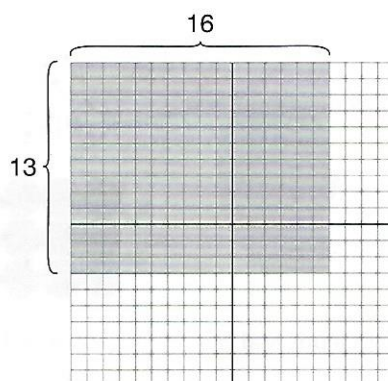
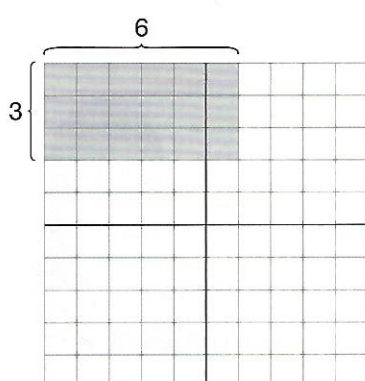


Abb. 4: Rechtecksdarstellung für Multiplikationsterme mit natürlichen und rationalen Zahlen

die Thematisierung der Kommutativität, können diese beiden eng verbundenen Einsichten besonders betont werden (Abb. 3, vgl. auch Selter u. a. 2014, S. 78) und möglichen Fehlvorstellungen kann entgegengewirkt werden.

Wenn Rechtecksdarstellungen in diesem Sinne verstanden werden, kann auch der Zusammenhang zwischen Multiplikation und Division veranschaulicht werden – weil in jeder Darstellung sowohl Multiplikations- als auch Divisionsaufgaben gesehen werden können (Abb. 3 und 6b, Unterrichts Anregung 1). Das Modell ist also nicht nur tragfähig, sondern auch fort-

setzbar auf große Zahlen und Zahlen kleiner 1 (Abb. 4, vgl. Unterrichts Anregungen 2 und 6).

Den Zusammenhang bei Division und Multiplikation sehen und verstehen

In vielen aktuellen Schulbüchern wird der Zusammenhang zwischen Multiplikation und Division häufig durch Pfeilgrafiken „veranschaulicht“. In diesen Grafiken wird bestenfalls deutlich, dass es sich bei diesen beiden Operationen um Umkehroperationen handelt, die sich gegenseitig rückgängig machen können. Wie und vor allem warum diese beiden Operationen zusammenhängen, können diese Dar-

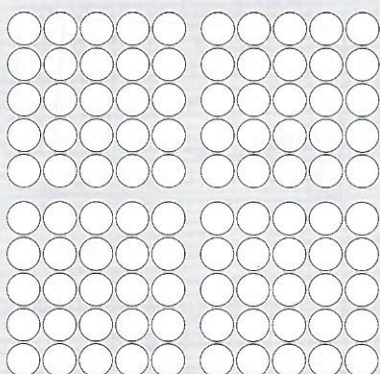
stellungen nicht veranschaulichen. Auch hier können Rechtecksanordnungen genutzt werden, um diesen Zusammenhang sichtbar zu machen (vgl. Abb. 6a und b). Und in diesem Zusammenhang ist es auch kein großer Schritt mehr zu Platzhalteraufgaben oder sogenannten Zahlenrätseln (Unterrichts Anregung 4 und 5).

Das Distributivgesetz sehen, verstehen und nutzen

Für das flexible Verstehen und Lösen von Multiplikationsaufgaben ist auch das Distributivgesetz von entscheidender Bedeutung – erst durch die verstandene Nutzung des Distributivgesetzes

Unterrichts Anregung 1

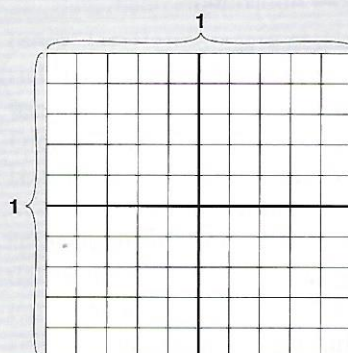
Färbe die Aufgabe 4×6 .



- Erkläre, wo du die 4 und wo du die 6 in deiner Darstellung erkennst.
- Kannst du in deiner Darstellung auch die Aufgabe 6×4 sehen?
- Kannst du ausgehend von deiner Darstellung auch die Aufgabe 5×6 darstellen? Erkläre, was du machen musstest.
- Was müsstest du machen, um dein Ergebnis zu verdoppeln? Gibt es dafür mehrere Möglichkeiten? Beschreibe.
- Kannst du dein Ergebnis halbieren? Was müsstest du dafür machen?
- Kannst du in deiner Darstellung auch eine Geteilt-Aufgabe sehen? Beschreibe.

Unterrichts Anregung 2

Färbe die Aufgabe $0,4 \times 0,6$.



- Erkläre, wo du die 0,4 und wo du die 0,6 in deiner Darstellung sehen kannst.
- Kannst du in deiner Darstellung auch die Aufgabe $0,6 \times 0,4$ sehen?
- Kannst du ausgehend von deiner Darstellung auch die Aufgabe $0,5 \times 0,6$ darstellen? Erkläre, was du machen musstest.
- Was musst du machen, um dein Ergebnis zu verdoppeln? Gibt es dafür mehrere Möglichkeiten? Beschreibe.
- Kannst du in deiner Darstellung auch eine Geteilt-Aufgabe sehen? Beschreibe.

Unterrichts Anregung 3

Finde verschiedene Rechtecke, die du aus 4, 6, 12, 13, 18, 19, 20 ... Quadraten legen kannst (zum Beispiel Bierdeckel)? Dabei ist die Kantenlänge 1 auch erlaubt.

- Erkläre wie du vorgehst.
- Notiere zu den Rechtecken die passenden Malaufgaben.
- Notiere auch passende Geteilt-Aufgaben.
- Bei welchen Zahlen findest du mehr als ein Rechteck? Erkennst du Zusammenhänge?
- Wie viele verschiedene Rechtecke findest du? Hast du alle? Begründe.
- Bei welchen Zahlen findest du nur ein Rechteck? Was kann das bedeuten?

können Aufgaben z. B. über Nachbaraufgaben und durch die Nutzung von Zahlbeziehungen und des Stellenwertprinzips gelöst werden.

Bereits beim kleinen Einmaleins sind diese Ableitungsstrategien bedeutsam: Wenn man die Lösung der Aufgabe 6×7 noch nicht auswendig weiß, kann man sein Wissen um die Aufgabe $5 \times 7 = 35$ nutzen, indem man zu diesem Produkt einfach noch die „fehlenden 1×7 “ addiert – besonders anschaulich wird dies gerade durch die Rechtecksdarstellung (**Unterrichtsanregung 1**). Auch die Aufgaben der „Neunerreihe“ lassen sich sehr einfach aus den jeweiligen Aufgaben mit Faktor 10 ableiten.

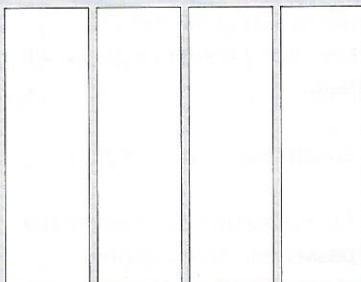
Vor allem jedoch beim Verstehen und Lösen der Aufgaben des „großen Einmaleins“ ist es notwendig, die gegebenen Aufgaben in leicht lösbare Teilaufgaben zerlegen zu können, um sie dann wieder zusammensetzen. Eine Möglichkeit der Notation ist dann das sogenannte Malkreuz, in dem die Zwischenergebnisse notiert werden können (Wittmann/Müller 1992, S. 134). Der große Vorteil des Malkreuzes ist seine strukturelle Übereinstimmung mit der Rechtecksdarstellung (**Abb. 5**). Hier wird neben der Zerlegbarkeit von Multiplikationsaufgaben in leichtere Teilaufgaben das Wissen um das Stellenwertprinzip genutzt (**Unterrichtsanregung 6**).

Primzahlen entdecken und verstehen

Eine weitere Möglichkeit die Rechtecksdarstellung für die Entwicklung von Grundvorstellungen zu nutzen, ist beispielsweise die handelnde Entdeckung der Primzahlen und ihrer Eigenschaften (Padberg 1999, S. 37 ff.). Durch diese multiplikative Darstellung von gegebenen Zahlen (zum Beispiel im Zahlenraum bis 20) können die Schülerinnen und Schüler im wahren Sinne des Wortes *sehen*, dass es Zahlen gibt, die sich als (verschiedene) Rechteck(e) darstellen, also als Multiplikationsaufgabe(n) ausdrücken lassen, und dass es Zahlen gibt, für die man nur eine einzige Darstellung fin-

Unterrichtsanregung 4

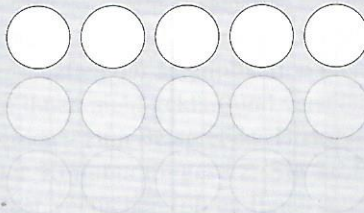
Löse das Zahlenrätsel.
Erkläre deine Lösung mit Hilfe einer Abbildung.



- Ich denke mir eine Zahl. Wenn ich diese Zahl mit vier multipliziere, erhalte ich 24.
- Hilfestellung: Stell dir vor in den Spalten wären insgesamt 24 Punkte (Vorlage). Wie viele Punkte wären dann in jeder Spalte? In jeder Spalte sollen gleich viele Punkte liegen.
- Kannst du die Aufgabe $24 : 4 = \underline{\quad}$ mit Hilfe des Bildes erklären?
- Kannst du die Aufgabe $\underline{\quad} \times 4 = 24$ mit Hilfe des Bildes erklären?
- Erfinde selbst ein Zahlenrätsel mit einem passenden Bild.

Unterrichtsanregung 5

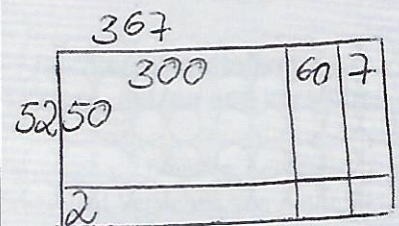
Löse das Zahlenrätsel.
Erkläre deine Lösung mit Hilfe einer Abbildung.



- Ich denke mir eine Zahl. Mit dieser Zahl multipliziere ich 5 und erhalte 45.
- Hilfestellung: Stell dir vor, hier wären insgesamt 45 Punkte (Vorlage). Wie viele Fünfer-Reihen brauchst du insgesamt?
- Kannst du die Aufgabe $45 : 5 = \underline{\quad}$ mit Hilfe des Bildes erklären?
- Kannst du die Aufgabe $\underline{\quad} \times 5 = 45$ mit Hilfe des Bildes erklären?
- Erfinde selbst ein Zahlenrätsel mit einem passenden Bild.

Unterrichtsanregung 6

Malaufgaben mit großen Zahlen



- Welche Teilaufgaben kannst du nutzen, um die Aufgabe 367×52 zu lösen? Mach dir eine Rechtecks-Skizze.
- Erkläre, wie die Aufgabe und deine Skizze zusammenpassen.
- Schau dir die Skizze an. Welche Multiplikationsaufgabe könnte hier dargestellt sein?
- Welche Teilaufgaben kannst du in der Skizze entdecken?
- Wenn du jetzt die Aufgabe 365×52 rechnen müsstest – was würde sich an der Skizze ändern?

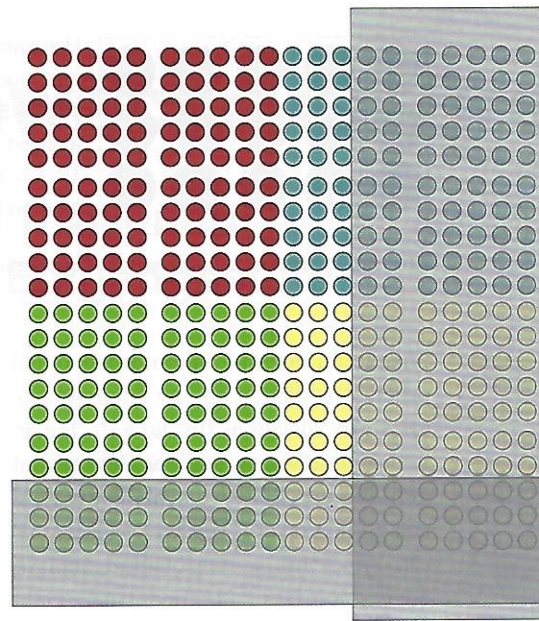
den kann – nämlich die Anordnung in einer Reihe (zum Beispiel bei 1×7) (vgl. z. B. Lack 2014; s. **Unterrichtsanregung 3**). Mit dieser Idee können gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern zum Beispiel auch erste Schritte in Richtung Primfaktorzerlegung gegangen werden.

Grundvorstellungen aufbauen und verinnerlichen

Von tragfähigen Grundvorstellungen der Schülerinnen und Schüler gehen wir aus, wenn diese in der Lage sind, zwischen verschiedenen Darstellungsformen mathematischer Sachverhalte flexibel und begründet übersetzen zu können (zum Beispiel zwischen Alltagssituationen, Bildern, Skizzen, Tabellen, Graphen, Termen ...). Es geht also nicht nur darum, dass ein Schüler, eine Schülerin sicher in einer Darstellungsform (zum Beispiel der symbolischen) operieren kann, sondern gerade um das (mentale) Verknüpfen der Darstellungen – diese Darstellungswechsel können als grundlegender Bestandteil mathematischen Handelns und Denken verstanden werden (vgl. Kuhnke 2013, S. 9 ff.).

Einigen Schülerinnen und Schülern gelingen diese Übersetzungen schnell, sicher und quasi selbstverständlich. Andere haben große Probleme bei dieser Verknüpfung, und diese Probleme können immer wieder zu Fehlern und Hürden im Lernprozess führen. Eine didaktische Möglichkeit zur Unterstützung dieser Übersetzungen kann das sogenannte Vier-Phasen-Modell sein (u. a. Schulz 2015). Ausgehend von der Überlegung, dass Verständnis sich vom konkreten Handeln hin zu mentalem Operieren entwickeln kann (z. B. Aebli 1976), bietet das Vier-Phasen-Modell der Lehrkraft einen didaktischen Fahrplan zur Strukturierung von Aufgaben(-folgen) und Lernumgebungen (**Tab. 1**). Wichtig sind dabei die folgenden Grundsätze (Schipper 2009, S. 301 ff.):

- Das Handeln im Sinne „bloßen Tuns“ kann die Entwicklung tragfähiger Grundvorstellungen behindern. Es geht nicht darum, dass die



.	10	3	
10	100	30	130
7	70	21	91
	170	51	221

Abb. 5: Mögliche Art der Notation von Zwischenschritten beim Lösen von Multiplikationsaufgaben: das Malkreuz

Schülerinnen und Schüler mit Material handeln, sondern es geht darum, dass die mathematischen Strukturen der Handlungen in Unterrichtsgesprächen herausgearbeitet werden.

- Dies ist der zweite Grundsatz: Handlungen und später auch Bilder, Skizzen, Abbildungen müssen versprachlicht, diskutiert und reflektiert werden – das kann dem Schüler, der Schülerin nicht in stiller Einzelarbeit gelingen. Dieser Grundsatz fordert einen steten und regen Austausch über mathemathaltige Handlungen und Situationen.
- Daraus leitet sich wiederum der dritte Grundsatz ab: Wichtig für diesen zielführenden Austausch ist, dass die zugrundeliegenden Handlungen und Abbildungen strukturell mit den angestrebten mentalen Modellen übereinstimmen, dass sie tragfähig und mental fortsetzbar sind – was dies für das Beispiel der Multiplikation bedeuten kann, wurde oben beschrieben.
- Der vierte Grundsatz – nämlich die Aufforderung, den Aufbau mentaler Vorstellungsbilder zu unterstützen, kann vor allem dann umgesetzt werden, wenn der Fokus des didaktischen Vorgehens nicht auf der ausschließlichen Verknüpfung

von Aufgabenstellung und Lösung liegt – sondern wenn vor allem der Blick auf die Lösungswege, die Denkprozesse der Schülerinnen und Schüler den Schwerpunkt der Unterrichtsgestaltung bildet. Dies bedeutet, dass der materialgestützte Austausch über Lösungsprozesse und die Verbindung von Aufgabenstellung und Lösungsweg mindestens ebenso wichtig ist wie das Erreichen eines (richtigen) Ergebnisses.

Die Ablösung vom Konkreten und der gleichzeitige Aufbau von Grundvorstellungen kann dann unterstützt werden, wenn der gemeinsame Austausch sich nicht ausschließlich auf konkretes vorliegendes Material oder wirklich ausgeführte Handlungen konzentriert, sondern wenn er Stück für Stück hypothetischer und abstrakter wird.

Wichtig bei dieser Aktivierung der Vorstellung einer eher konkreten Situation ist selbstverständlich, dass solche und ähnliche Situationen vorher intensiv mit Material und an konkreten Handlungen vorbereitet wurden. Zum Sehen und Verstehen der grundlegenden mathematischen Ideen und Prinzipien reicht häufig die Arbeit in einem relativ kleinen Zahlenraum aus – vor allem um einer Materialschlacht vorzubeugen.

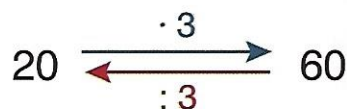
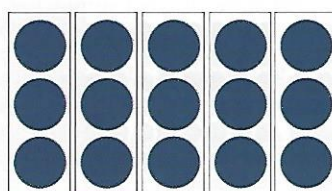


Abb. 6a: Pfeilbild zur „Veranschaulichung“ des Zusammenhangs zwischen Division und Multiplikation



Hier kann die Aufgabe $5 \times 3 = 15$ „gesehen“ werden, aber auch die entsprechenden Divisionsaufgaben: $15 : 3 = 5$ (wenn die Grundvorstellung des Aufteilens aktiviert wird) $15 : 5 = 3$ (wenn die Grundvorstellung des Verteilens aktiviert wird)

Abb. 6b: Zusammenhang zwischen Multiplikation und Division am rechteckigen Punktefeld

Leitfragen zur Unterstützung der Ablösung vom Material und für den Aufbau von Grundvorstellungen können die Folgenden sein:

- Was wäre, wenn ...
(eine der wichtigsten Fragen im Mathematikunterricht überhaupt)
- Was müsstest du machen, damit ...
- Beschreib mal: Was muss ich machen, damit ...
- Was hast du gemacht, um ...

Auch für einen inklusiven Unterricht, der sowohl die Bedürfnisse leistungsschwacher als auch leistungsstarker Schülerinnen und Schüler berücksichtigt, bieten die geschilderten didaktischen Möglichkeiten eine gute Chance, alle Kinder auf ihrem individuellen

Niveau an einem gemeinsamen Inhalt arbeiten zu lassen und zu unterstützen: Dies gilt vor allem für die verschiedenen Abstraktionsgrade der Bearbeitungen, die durch die verschiedenen Phasen gut angepasst werden können.

Schluss

Inklusiver Mathematikunterricht kann gelingen. Er kann dann gelingen, wenn sich alle direkt Beteiligten, also Lehrkräfte, Schülerinnen und Schüler, darauf einlassen, dass in der Lerngruppe sehr unterschiedliche Lernvoraussetzungen gegeben sind – und diese berücksichtigt und ernst genommen werden. Am Beispiel der Multiplikation wurde versucht zu klären, dass der Aufbau von Grundvorstellungen, eine sinn-

volle, wenn nicht notwendige Voraussetzung für erfolgreiches Weiterlernen darstellt. Für die Multiplikation eignet sich hierfür besonders das Modell der Rechtecksdarstellung – und zwar nicht nur für besonders leistungsschwache Schülerinnen und Schüler. Denn wäre es nicht wünschenswert, wenn *alle* Schülerinnen und Schüler beim Lesen des Ausdrucks „ a^2 “ an ein Quadrat denken würden?

Literatur

- Aebli, H. (1976): Grundformen des Lehrens (9., stark erweiterte und umgearbeitete Auflage). Stuttgart: Ernst Klett Verlag.
- KMK (2004). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. München: Wolters Kluwer.
- Kuhnke, K. (2013): Vorgehensweisen von Grundschulkindern beim Darstellungswechsel. Eine Untersuchung am Beispiel der Multiplikation im 2. Schuljahr. Wiesbaden: Springer.
- Lack, C. (2014): Was uns Rechtecke über Zahlen verraten. Zahlen, ihre Teiler und Primzahlen. – In: Mathematik differenziert. 2(2014), S. 20–26.
- Padberg, F. (1999): Zahlentheorie und Arithmetik. Heidelberg, Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.
- Schipper, W. (2009): Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Braunschweig, Schroedel.
- Schulz, A. (2015): Von der Handlung in den Kopf – Übungsformen zur Verinnerlichung von Handlungen. – In: Fördermagazin Grundschule, 37(4), S. 15–21.
- Selter, Ch./Prediger, S./Nührenbörger, M./Hußmann, St. (Hrsg.) (2014): Mathe sicher können. Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen. Natürliche Zahlen. Berlin: Cornelsen.
- Wittmann, E. C./Müller, G. N. (1992): Handbuch produktiver Rechenübungen Band 2. Vom halbschriftlichen und schriftlichen Rechnen.

Phase 1

Das Kind handelt am geeigneten Material. Der „mathematische Gehalt“ der Handlung wird gemeinsam herausgearbeitet, die Handlung wird mit Fokus auf den mathematischen Inhalt versprachlicht.

Phase 2

Das Kind beschreibt die Handlung mit Sicht auf das Material, handelt jedoch nicht mehr selbst, sondern diktiert einem Partner und kontrolliert dabei die Handlung durch Beobachtung.

Das Kind beschreibt mit Blick auf das Material Veränderungen am Material, ohne dass diese durchgeführt werden. Es beschreibt Zusammenhänge, ohne dass diese konkret hergestellt werden müssen.

Phase 3

Das Kind beschreibt dem Partner die Handlung wie zuvor, jedoch ohne die Materialhandlung zu sehen. Für die Beschreibung der Handlung ist das Kind darauf angewiesen, sich die Handlung am Material vorzustellen. Die Handlung wird (z. B. hinter einem Sichtschirm) vom Partner durchgeführt.

Phase 4

Bei einer symbolisch gestellten Aufgabe kann der Handlungszusammenhang aktiviert werden. Die verinnerlichten Handlungen können weiter abstrahiert, vernetzt und auf andere mathematische Inhalte übertragen werden.

Tab. 1: Eine Möglichkeit zur Unterstützung des Aufbaus von Grundvorstellungen – ein Vier-Phasen-Modell