

Grundvorstellungen zur Division – auch mit Rest

Divisionstypen und -situationen

VON SILKE RUWISCH

Es gibt viele Wege, mit Kindern in die Division einzusteigen. Dazu ist es hilfreich, die verschiedenen Aspekte der Operation Division zu kennen.

FOTO: FREDERHAT/FOTOLIA



Erst wird zerlegt, danach verteilt.

Bereits zu Schulbeginn können die meisten Kinder auf Handlungen zurückgreifen, in denen „gerechtes Teilen“ eine Rolle spielt. Dieses alltägliche Handlungswissen lässt sich wie bei den anderen Operationen bereits im ersten Schuljahr spielerisch nutzen und bewusst thematisieren, allerdings ohne die unterrichtliche Behandlung der Division vorzuziehen. Denn Schülerinnen und Schüler benötigen sicheres Zahlen- und Operationswissen zu Addition und Subtraktion, aber auch bereits das grundlegende Verständnis der Multiplikation, bevor die Division in symbolischer Form sinnvoll und nachhaltig im Unterricht thematisiert werden sollte. Mit diesen Vorkenntnissen gelingt es den Schüle-

rinnen und Schülern gut, sich mit verschiedenen Aspekten der Division auseinandersetzen zu können:

- Aufteilen und Verteilen als Umkehroperation der Multiplikation
- Modellieren von dynamischen und statischen Divisionssituationen
- Dividieren mit Rest

Die Zusammenhänge zu den anderen Operationen und die entsprechenden Notationen zur Division werden nachvollziehbar.

AUFTEILEN UND VERTEILEN Gerecht teilen

In die Division steigen Kinder meist über das Thema „gerechtes Teilen“

konkreter Gegenstände ein: Lisa, Paul und Ole möchten fünfzehn Smarties unter sich aufteilen, die 32 Spielkarten werden an die fünf mitspielenden Kinder verteilt, für den Staffellauf müssen die Kinder Vierergruppen bilden usw.

Zerlegen in gleichmächtige Teilmengen

Mathematisch wird dieses Teilen konkreter Gegenstände als das Zerlegen einer gegebenen Menge in Teilmengen beschrieben. Allerdings handelt es sich nicht bei jeder Mengenzerlegung um Divisionshandlungen. Werden beispielsweise alle Zerlegungen der Zahl 6 gesucht, so wird die Menge ebenfalls in Teilmengen zerlegt.

Für Divisionssituationen wesentlich ist also das „gerechte Vorgehen“ beim Teilen, das mathematisch als Zerlegen in gleichmächtige Teilmengen – also Mengen mit derselben Anzahl an Elementen – bezeichnet wird. Die Division ist somit auch auf der Handlungsebene die Umkehroperation zur Multiplikation, bei der ja gerade gleichmächtige Mengen zu einer Gesamtmenge zusammengefasst werden.

Dass Aufteilen und Verteilen nicht nur zwei unterschiedliche Namen für die Division sind – verteilen Sie eigentlich Spielkarten an die Mitspieler oder teilen Sie die Karten auf die Mitspieler auf? –, sondern tatsächlich inhaltlich eine unterschiedliche Bedeutung haben, ist auf die unterschiedliche Rolle der Faktoren bei der Multiplikation in Kontexten zurückzuführen.

lizenzieren für Tanja Niß am 22.11.2015

Multiplikationsaufgabe

Beim Dosenwerfen treten sechs Gruppen mit je drei Kindern gegeneinander an. Wie viele Kinder nehmen insgesamt am Dosenwerfen teil?

Während der Multiplikand angibt, wie viele Elemente jede Teilmenge aufweist, im Beispiel also die Anzahl der Kinder in einer Gruppe, bezeichnet der Multiplikator die Anzahl dieser Teilmengen, also die Anzahl der Gruppen im Beispiel. Je nachdem, ob bei der Umkehrhandlung nach dem Multiplikator oder dem Multiplikanden gefragt wird, handelt es sich um eine Aufteil- oder Verteilsituation.

Aufteilungsaufgabe

Beim Dosenwerfen nehmen 18 Kinder teil. In jeder Gruppe sind drei Kinder. Wie viele Gruppen treten gegeneinander an?

Verteilungsaufgabe

Beim Dosenwerfen nehmen 18 Kinder teil. Sechs Gruppen treten gegeneinander an. Wie viele Kinder sind in einer Gruppe?

Die Zusammenhänge der beteiligten Mengen und des Gegebenen und Gesuchten lassen sich gut Tabelle 1 entnehmen.

Dynamische und statische Divisionssituationen

Häufig wird ferner zwischen dynamischen Situationen – dem zeitlich-sukzessiven Aspekt – und eher statischen Situationen – dem räumlich-simultanen Aspekt – unterschieden. Beispiele verdeutlicht die Tabelle 2.

Beide Aspekte sind wiederum sehr eng miteinander verknüpft, da das Ergebnis einer zeitlich-sukzessiven Handlung häufig eine räumlich-simultane Situation ist und sich fast alle räumlich-simultanen Situationen aus zeitlich-sukzessiven Handlungen entstanden vorstellen lassen. So könnte statt des Ergebnisses „Eier sind verpackt“ eher die Handlung „Eier sollen verpackt werden“ thematisiert werden und schon ist aus der räumlich-

	Anzahl der Teilmengen	Anzahl der Elemente jeder Teilmenge	Gesamtanzahl der Elemente
Multiplikationsaufgabe	bekannt	bekannt	gesucht
Verteilungsaufgabe	bekannt	gesucht	bekannt
Aufteilungsaufgabe	gesucht	bekannt	bekannt

Tab. 1: Zusammenhänge von Aufteilen, Verteilen und Multiplizieren

	zeitlich-sukzessiv	räumlich-simultan
aufteilen	Paul will 16 Tassen auf den Tisch stellen, kann aber nur vier Tassen tragen. Wie oft muss Paul gehen?	16 Eier sind in 4er-Kartons verpackt. Wie viele Kartons sind es?
verteilen	Vater verteilt 24 Bonbons an seine vier Kinder. Wie viele Bonbons bekommt jedes Kind?	24 Eier sind in sechs Kartons abgepackt. Wie viele Eier sind in einem Karton?

Tab. 2: Dynamische und statische Divisions-situationen

simultanen eine zeitlich-sukzessive Situation entstanden.

Didaktisches Hintergrundwissen

Die Unterscheidungen zwischen „aufteilen“ und „verteilen“ oder „dynamischen“ und „statischen“ Situationen sind für Lehrpersonen wichtiges Hintergrundwissen. Die Abgrenzung ermöglicht, systematisch eine Vielfalt an Erfahrungen anbieten zu können oder der Frage nachzugehen, wie Kinder ihr Vorgehen zeichnerisch oder symbolisch festhalten könnten.

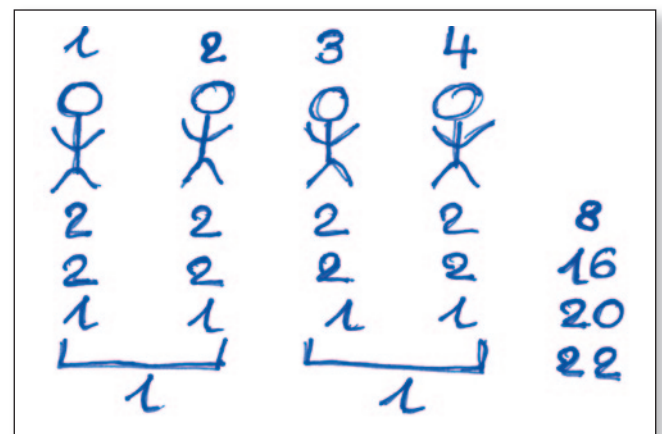
Allerdings finden sich in der Literatur widersprüchliche Aussagen darüber, welche Situationen für die Kinder einfacher sind. Während im Alltag häufiger Verteil- als Aufteil-situationen entstehen – die Kinder somit mit ihnen mehr Erfahrungen haben sollten –, ermöglichen Aufteilhandlungen den Kindern Dokumentationsmöglichkeiten, die ihren Handlungen sehr nahe kommen und ihnen das Gefühl geben, den Überblick zu behalten.

Handelnd werden beim Aufteilen vom gegebenen „Haufen“ immer x in einem Grüppchen zur Seite geschoben. Dies wird so lange wiederholt, bis vom „Haufen“ keine Objekte mehr vorhanden sind. Das Ergebnis, die Anzahl an Grüppchen, ist hinterher leicht zählend

festzustellen. Auch zeichnerisch lässt sich das Gruppieren beim Aufteilen leicht durch Einkreisen, Verbinden oder ähnliche Markierungen bewerkstelligen.

Auch das Verteilen ist eine handelnde Aktion. Beispielsweise werden so lange aus einer Gesamtmenge Objekte reihum ausgegeben, bis alle verteilt sind. Dieses einzelne Vorgehen unterfordert jedoch viele Kinder auf der Handlungsebene (vgl. Bönig 1995), während sie gleichzeitig über die Gesamtsituation nicht immer den Überblick behalten: So muss häufig überprüft werden, ob in jeder einzelnen Menge letztendlich genauso viele Objekte sind wie in den anderen Mengen. Zeichnerisch gestaltet sich das Verteilen noch schwieriger –

Abb. 1: Serin verteilt zeichnerisch.



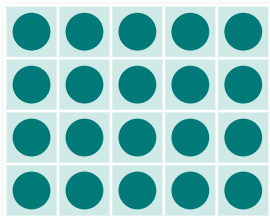


Abb. 2: Ein Punktefeld illustriert sowohl Multiplikations- wie Divisionsaufgaben.

wenngleich es nicht unmöglich ist und die Kinder sich häufig erfindend zeigen (siehe Abb. 1).

Ebenso wird im Allgemeinen davon ausgegangen, dass dynamische Prozesse für Kinder leichter seien als statische Strukturierungen. Meine Beobachtungen zeigen dagegen, dass die Kinder eher spezifische Vorlieben haben: Während die einen gut visuell strukturieren können und deshalb räumlich-simultane Anordnungen bevorzugen, favorisieren andere das Sequenzielle der zeitlich-sukzessiv nachvollziehbaren Handlungen – möglicherweise passt es gut zu ihrer Dokumentation mittels mehrfacher Subtraktion.

Jenseits aller Vorzüge muss das Ziel für alle Schülerinnen und Schüler sein, flexibel zu werden und viele verschiedene Situationen als Divisionssituationen deuten zu können, insbesondere im Hinblick auf den Zusammenhang von Multiplikation und Division. Gerade in räumlich-simultanen Anordnungen handelt es sich oft um unterschiedliche Sichtweisen auf dieselben gegebenen Bedingungen. So können im Punktefeld (siehe Abb. 2) neben Additions- sowohl Multiplikations- als auch Divisionsaufgaben „gesehen“ werden: $4 \cdot 5$, $5 \cdot 4$, $2 \cdot 10$, $20 : 4$, $20 : 2$, $20 : 5$, ...

Durch die Verbalisierung wird der Fokus auf die Operation gelegt und damit die dazu passende Strukturierung erleichtert. Solche Beispiele eignen sich in besonderem Maße, um den Zusammenhang von Multiplikation und Division zu verdeutlichen.

Beim zeitlich-sukzessiven Aspekt wird ein ebenso wichtiger Fokus deutlich: Der Zusammenhang zur Multiplikation zeigt sich in der Umkehrhandlung. Eine Menge wird in gleichmächtige Teilmengen zerlegt – Division –, die entstandenen gleichmächtigen Teilmengen werden wieder vereinigt – Multiplikation. Erst durch diese enge Verzahnung von Division und Multiplikation wird für die Schülerinnen und Schüler deutlich, dass nicht viele neue einzelne Aufgaben gelernt werden müssen. Wenn $4 \cdot 5 = 20$ bekannt ist, dann sind es auch die Ergebnisse der Divisionsaufgaben $20 : 4$ und $20 : 5$.

Wegen dieser Bedeutung der Division als Umkehroperation zur Multiplikation sollten Divisionsaufgaben nicht zu früh thematisiert werden. Zwar sind frühe Handlungserfahrungen zum Aufteilen und Verteilen wichtig, doch eine intensive Behandlung der Division sollte erst beginnen, wenn die Kinder eine gut ausgeprägte Sicherheit im Lösen von Multiplikationsaufgaben haben. Erst wenn sie die Kernaufgaben des Einmaleins beherrschen und die meisten anderen Aufgaben mittels Strategien ableiten können, sollten sie dieses Wissen gezielt nutzen, um Divisionsaufgaben zu lösen. Wird die Division dagegen bereits bei der Erarbeitung der Multiplikation direkt als Umkehrhandlung mit aufgenommen, so müssen die Kinder zwei neue Operationen gleichzeitig kennen und beherrschen lernen.

In jedem Fall sollte dieses didaktische Hintergrundwissen nicht verwechselt werden mit vermeintlich notwendigem Begriffswissen für die Schülerinnen und Schüler. Auf- und Verteilen werden nicht mehr – wie es noch in den 1970er-Jahren üblich war – durch verschiedene Operationszeichen unterschieden (vgl. Padberg/Benz 2011). Sie sollten auch sprachlich für die Kinder nicht unterschieden werden.

DIVISION MIT REST

Beim Dividieren, auch beim Auf- und Verteilen, bleibt häufig ein Rest. Nur durch ganz bestimmte Zahlenvorgaben der Lehrerinnen und Lehrer lässt sich sicherstellen, dass gestellte Aufgaben keinen Rest aufweisen.

Von den Schülerinnen und Schülern geschilderte Alltagssituationen oder erfundene eigene Rechengeschichten werden vermutlich eher einen Rest lassen. In der konkreten Handlung stellt dieser Rest für die Kinder meist kein Problem dar (vgl. den Beitrag von Silke Ruwisch auf S. 14–17). Die Spielkarten werden einfach reihum bis zum Schluss verteilt oder die Kinder nehmen sich so lange neue Eierkartons, bis alle 26 Eier verpackt sind.

Schwieriger gestalten sich dagegen andere Aspekte der Division

mit Rest: die formale Schreibweise, die Rückinterpretation des Restes im Situationskontext und die Dokumentation des eigenen Vorgehens, des Rechenwegs und der Antwort.

Die Restschreibweise

Vor Einführung der Bruchrechnung ist es schwierig, Divisionsaufgaben mit Rest formal korrekt zu dokumentieren. Es können grundsätzlich die Restschreibweise, die Zerlegungsschreibweise und die Divisionsschreibweise unterschieden werden:

Restschreibweise:

$$13 : 5 = 2 \text{ Rest } 3$$

Zerlegungsschreibweise:

$$13 = 2 \cdot 5 + 3$$

Divisionsschreibweise:

$$13 : 5 = 2 + 3 : 5$$

Bei der Frage der formalen Notation wird inzwischen wieder durchgängig die Restschreibweise verwendet. Erfahrungsgemäß bereitet sie auch eher den Mathematikern als den Kindern Schwierigkeiten. Sie ist mathematisch nämlich nicht korrekt, weil sie gegen die Transitivität der Gleichheitsrelation verstößt: Wenn gilt: $20 : 4 = 5$ und gleichzeitig $30 : 6 = 5$, dann gilt: $20 : 4 = 30 : 6$. Bei Aufgaben in Restschreibweise gilt dies aber nicht. Zwar gilt $13 : 5 = 2 \text{ Rest } 3$ und $15 : 6 = 2 \text{ Rest } 3$, aber $13 : 5 \neq 15 : 6$.

Zerlegungs- und Divisionschreibweise dagegen sind mathematisch korrekt. Die Kinder sehen in ihnen jedoch nicht das „Ergebnis“ der Divisionsaufgabe. Bei der Divisionsschreibweise meinen sie, noch weiter rechnen zu müssen. Bei der Zerlegungsschreibweise erkennen sie die Divisionsaufgabe nicht mehr und schreiben nicht selten wieder 13 als Ergebnis auf. Somit sollte die Restschreibweise mit dem Wissen um ihre begrenzte Reichweite für die Grundschulzeit als adäquate Dokumentation gesehen und eingesetzt werden.

Interpretation des Restes im Situationskontext

Die angemessene Interpretation des Rests ist schwieriger: Je nach Fragestellung können drei Fälle unterschieden werden: Es entsteht kein Rest, der entstehende Rest ist bei der Antwort zu vernachlässigen oder aber er erfordert die Er-

höhung der Antwort um eins (vgl. Tabelle 3).

In der mündlichen Bearbeitung derartiger Aufgabenstellungen unterscheiden die meisten Kinder gut zwischen diesen Situationen und erkennen z. B. alle, dass Snoopy vier Mal laufen muss. Die Frage, wie viele Knochen er dann jeweils trägt, wird hingegen häufig ausgiebig diskutiert, ist es sachlich doch nicht unbedingt sinnvoll, beim vorletzten Weg drei Knochen zu tragen, wenn für den letzten nur noch einer übrig bleibt.

Unabhängig von solchen inhaltlichen Einzeldiskussionen erweist es sich als fruchtbar, den Unterschied zwischen vernachlässigbarem und nicht vernachlässigbarem Rest an ein und derselben Situation mit der jeweils anderen Frage zu thematisieren. Wenn 26 Eier in Sechserkartons verpackt werden, so kann einmal nach der Anzahl voller Packungen, das andere Mal nach der Anzahl notwendiger Kartons gefragt werden. Ende der zweiten oder Anfang der dritten Klasse gelingt es den Kindern überwiegend gut, die Unterschiede zu erfassen und sie den anderen Kindern verständlich zu machen (vgl. Ruwisch 2007).

Dokumentation von Lösungsweg und Rechnung

Eine besondere Herausforderung bei Aufgaben zur Division mit Rest liegt im Herstellen des Zusammenhangs zwischen notierter Gleichung, gedanklicher oder realer Handlung und inhaltlicher Deutung. Gerade die stärkeren Schüle-

rinnen und Schüler mehrerer dritter Erprobungsklassen zeigten sich häufig verunsichert: Sie empfanden die Fragen „Wie viele Eier bleiben übrig?“ oder „Wie viele Eierkartons werden voll?“ als auf einzelne Teile der Gleichung $26 : 6 = 4 \text{ R } 2$ gerichtet und deklarierten sie als passend. Auch auf die Frage, wie viele Eierkartons für alle Eier nötig seien, antworteten sie sofort richtig mit 5. Probleme entstanden, als sie eine Rechnung aufschreiben wollten, in der diese Lösung zum Ausdruck kommt. Die Kinder waren immer wieder der Ansicht, dass in der schriftlichen Dokumentation entweder ihre Rechnung oder aber die Antwort nicht richtig sei.

Werden im Unterricht Divisionsaufgaben mit Rest immer in der Form verwendet, dass der Rest vernachlässigbar ist, bzw. werden Restaufgaben überhaupt nicht kontextgebunden gestellt, hat dies zur Folge, dass fast alle Kinder bei Kontextaufgaben den Rest einfach nicht beachten. Diejenigen Kinder aber, die nicht rein schematisch vorgehen, sondern sich tatsächlich inhaltlich Gedanken machen, befinden sich in einer Zwickmühle: Sie wissen nicht, wie sie die oben geschilderte Diskrepanz bewältigen können und zu einer korrekten mathematischen Darstellung gelangen.

Es hilft, das Problem explizit zu thematisieren und gemeinsame Verabredungen für eine übersichtliche Notation zu treffen. So kann man vorübergehend zusätzliche Klammern und Beschriftungen aufnehmen (siehe Abb. 3).

volle Kartons restliche Eier

$$26 : 6 = 4 \text{ R } 2$$

5 Kartons nötig

Abb. 3: Divisionsaufgaben, die nicht glatt aufgehen, sollten mit der Restschreibweise notiert werden.

FAZIT

Damit die Schülerinnen und Schüler genauso souverän und vertraut mit der Division umgehen können wie mit den anderen Operationen, bedarf es sowohl der frühen Handlungserfahrungen als auch einer intensiven Auseinandersetzung mit dem Modellieren von Alltagssituationen und deren Dokumentation. Am besten gelingt dies in einem auf Diskurs und Austausch fokussierten Unterricht, der auf sicheren Grundlagen aufbaut. ●

DIE AUTORIN

Dr. Silke Ruwisch ist Professorin für Mathematik und ihre Didaktik an der Leuphana Universität Lüneburg.

LITERATUR

- Bönig, Dagmar:** Multiplikation und Division. Empirische Untersuchungen zum Operationsverständnis bei Grundschulern. Münster/New York 1995
- Padberg, Friedhelm/Benz, Christiane:** Didaktik der Arithmetik. Heidelberg 2011
- Ruwisch, Silke:** Division mit Rest. In: Grundschole Mathematik, Heft 12-2007, S. 36-39

Divisionstyp Rest	Aufteilen	Verteilen
kein Rest	18 Kinder sind in der Klasse. In der Sportstunde bilden sie 3er-Gruppen. Wie viele Gruppen entstehen?	Vier Kinder teilen sich eine Rolle mit 36 Smarties. Wie viele Smarties bekommt jedes Kind?
vernachlässigbarer Rest	26 Eier werden in 6er-Kartons verpackt. Wie viele Kartons werden voll?	Herr Schnüttgen hat für den Tag der offenen Tür 50 Luftballons gekauft und damit die acht Klassenräume geschmückt. In jedem Raum hängen gleich viele Ballons. Wie viele?
nicht vernachlässigbarer Rest	Snoopy will zehn Knochen in seine Hütte bringen. Er kann nur drei Knochen auf einmal tragen. Wie oft muss Snoopy laufen, bis alle Knochen in der Hütte sind?	Vier Kinder wollen Schwarzer Peter spielen. Ein Kartenspiel hat 33 Karten. Wie viele Karten bekommen die Kinder?

Tab. 3: Reste und ihre Interpretation