

Entnommen aus:

Mathematik lernen und gesunder Menschenverstand : Festschrift für Gerhard Norbert Müller /
hrsg. von Christoph Selter ... - 1. Aufl.
Leipzig [u.a.] : Klett-Grundschulverl., 2001. - 255 S. : Ill., graph. Darst.
ISBN 3-12-200160-8

Bestand Universitätsbibliothek Dortmund:

Bereichsbibliothek Mathematik: e 40/MATH

„1/2 Busse heißt: ein halbvoller Bus!“ – Zu Vorgehensweisen von Grundschulern bei einer Textaufgabe zur Division mit Rest

Ich erinnere mich noch recht lebhaft an ein fachdidaktisches Seminar für Studierende des Lehramts an Grundschulen zum Thema „Eigenproduktionen“, das Gerhard Müller und ich im Sommer 1993 gemeinsam durchführten. Unter anderem hatten wir einige Aufgaben zusammengestellt, die die Studentinnen im Rahmen von Unterrichtsexperimenten oder von „klinischen“ Interviews Grundschüler(inne)n vorlegten. Über deren Vorgehensweisen berichteten sie anschließend im Rahmen des Seminars. Die folgende Aufgabe ist mir dabei nachhaltig in Erinnerung geblieben ...

1. Der Elternabend

Diese Aufgabe stammt ursprünglich aus den Niederlanden: *„Zu einem Elternabend kommen 81 Eltern. Es können immer 6 Eltern an einem Tisch sitzen. Wie viele Tische werden benötigt?“* Den Publikationen von Dolk & Uittenbogaard (1989) oder von van Galen & Feijs (1991) kann man die erstaunliche Kreativität und Lösungsvielfalt von Drittklässlern entnehmen, in deren Klassen zu diesem Zeitpunkt die Division noch gar nicht eingeführt worden war.

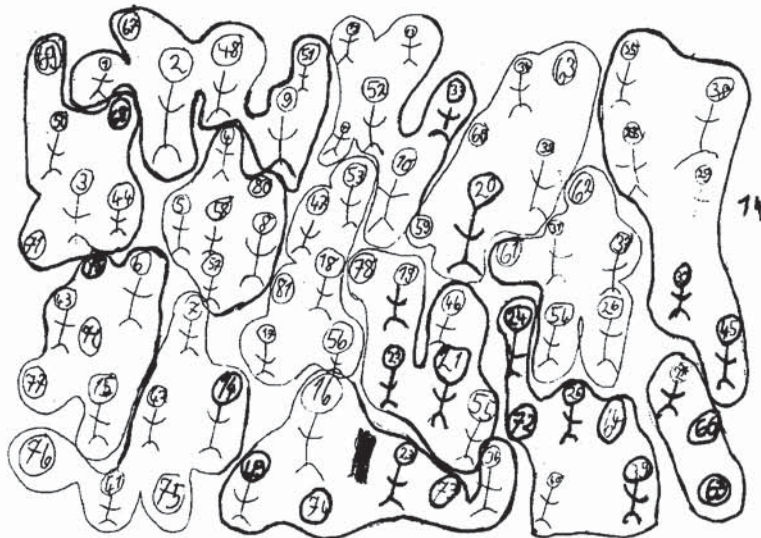
Uns reizte es, diese Aufgabe von noch jüngeren Kindern bearbeiten zu lassen. So ergab es sich, dass sich eine Gruppe von Studentinnen der Herausforderung stellte, die Elternabend-Aufgabe Schüler(inne)n gegen Ende des 1. Schuljahres vorzulegen. Für diese handelte es sich aus mehreren Gründen um eine „Überforderungsaufgabe“:

- Die Schüler(innen) bewegten sich zu diesem Zeitpunkt noch im Zahlenraum bis 20.
- Weder Multiplikation noch Division waren im Unterricht thematisiert worden.
- Selbst wenn dieses der Fall gewesen wäre: Es handelte sich um eine Aufgabe „jenseits“ des so genannten kleinen Einmaleins und
- um eine Geteiltaufgabe mit Rest.

In der überwiegenden Zahl der Fälle verstanden die Kinder diese „Überforderung“ als Herausforderung und entwickelten interessante und für uns lehrreiche Lösungsansätze.

Stefan beispielsweise zeichnete 81 Eltern, zunächst als Strichmännchen, später nur noch als Kreise, die deren Köpfe repräsentierten. Diese nummerierte er von 1 bis 81 durch, bevor er jeweils sechs von ihnen einkreiste. So erhielt er 13 Gruppen mit jeweils sechs Eltern sowie

eine Gruppe mit drei Personen. Das Ergebnis 14 notierte er schließlich rechts neben seiner Zeichnung.



Stefan

Max zeichnete Sechsertische und schrieb die Anzahl der jeweils berücksichtigten Eltern als Merkmahl oberhalb des Tisches auf. Nachdem er auf diese Weise 13 Tische gemalt hatte, bemerkte er, dass drei Eltern übrig blieben und diese – so sein Kommentar – stehen müssten. Patty fertigte keine Zeichnung an, sondern subtrahierte fortlaufend 6 und gelangte so zu dem Resultat „14 Tische“.



3 Eltern müssen stehen

Max

$$\begin{aligned}
 75 - 6 &= 69 \\
 69 - 6 &= 63 \\
 63 - 6 &= 57 \\
 57 - 6 &= 51 \\
 51 - 6 &= 45 \\
 45 - 6 &= 39 \\
 39 - 6 &= 33 \\
 33 - 6 &= 27 \\
 27 - 6 &= 21 \\
 21 - 6 &= 15 \\
 15 - 6 &= 9 \\
 9 - 6 &= 3
 \end{aligned}$$

Wir brauchen 14 Tische

Patty

Was diese wie auch die anderen, hier nicht abgedruckten Eigenproduktionen so bemerkenswert macht, ist sicherlich einerseits die Originalität und die Heterogenität des Vorgehens der Schüler(innen). Auffällig ist andererseits aber auch, dass die Schüler in den weitaus meisten Fällen den Rest 3 sachadäquat interpretierten. Entweder sie gaben die Antwort, 14 Tische würden benötigt, oder sie veränderten die Aufgabenbedingungen in konstruktiver Weise (wie z. B. Max). Ein vergleichbar sinnvolles Umgehen mit dem Rest von Geteiltaufgaben lässt sich offensichtlich bei älteren Schüler(innen) häufig nicht (mehr) beobachten ...

2. Die Busaufgabe

Eines der am häufigsten zitierten Beispiele für die Schülerschwierigkeiten bei Divisionsaufgaben mit Rest ist das so genannte „army bus problem“, über das erstmalig Carpenter et al. (1983) berichtet haben: *„Ein Armeebus kann 36 Soldaten transportieren. Wie viele Busse werden benötigt, wenn 1128 Soldaten ins Trainingscamp transportiert werden müssen?“* In einer landesweiten Untersuchung mit dreizehnjährigen US-amerikanischen Schüler(inne)n ergab sich ein mittleres Desaster: Lediglich 23% der Schüler(innen) gaben die als korrekt gewertete Antwort 32 Busse, 18 % sagten, 31 Busse würden benötigt, und nicht weniger als 29 % notierten 31 Rest 12 als richtige Antwort. Die restlichen Schüler(innen) begingen Rechenfehler.

Dieser Untersuchung wurde bisweilen entgegengehalten, dass die verwendeten Zahlenwerte die Aufgabenlösung erschwert hätten. Aus diesem Grund stellten Silver et al. (1993) 195 US-amerikanischen Schülern der Klassenstufen 6 bis 8 einige Aufgaben zur Division mit Rest, die aufgrund variiert Zahlenwerte Rechenanforderungen unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades enthielten. Die o. a. Busaufgabe beispielsweise tauchte mit leicht verändertem Text in den Versionen $532 : 40$, $540 : 40$ und $554 : 40$ auf.

Wie die Untersuchung von Carpenter et al. (1983) verwies auch diese Studie auf die großen Schwierigkeiten, die Schüler(innen) der Sekundarstufe 1 offensichtlich bei Aufgaben dieses Typs haben. Es ergab sich darüber hinaus, dass nicht fehlende rechnerische Kompetenz das Hauptproblem darstellte, sondern offensichtlich die nicht hinreichend entwickelten Kompetenzen der Schüler(innen), den sich jeweils ergebenden Rest aufgabenangemessen zu deuten, denn es fanden sich keine nennenswerten zahlenwertabhängigen Unterschiede bezüglich der Erfolgsquoten.

Die Schwierigkeiten, die viele Schüler(innen) bei Sachkontexten zur Division mit Rest aufweisen, sind im Übrigen keinesfalls spezifisch für US-amerikanische Kinder. So referieren Verschaffel et al. (2000, 8 ff.) eine Reihe von Studien etwa mit chinesischen, nordirischen oder belgischen Mittelstufenschüler(inne)n, die zu nahezu denselben Ergebnissen kamen (vgl. z. B. Greer 1993).

3. Auto-Mathismen

Die in Abschnitt 1 geschilderten Erfahrungen und die im zweiten Abschnitt beschriebenen Forschungsergebnisse können aufgrund unterschiedlicher wissenschaftlicher Solidität natür-

lich nicht direkt miteinander verglichen bzw. unmittelbar zueinander in Beziehung gesetzt werden. Aber sie verweisen gleichwohl auf ein grundsätzliches Problem ...

Denn empirische Untersuchungen wie schulische Alltagsbeobachtungen führen häufig zu dem Ergebnis, dass Schüler mit wachsender Schulerfahrung vermehrt dazu neigen, in der Schule gestellte Aufgaben schematisch zu lösen (vgl. z. B. Radatz 1983; Winter 1985). Insbesondere beim Sachrechnen und im Speziellen bei den häufig wenig beliebten Textaufgaben scheint es nicht selten so zu sein, dass die Schüler lernen, ihren gesunden Menschenverstand ausschalten, um unter Nicht-Beachtung desselben möglichst unverzüglich zur Lösung gelangen zu können.

Ist also Auto-Mathik – die Vorherrschaft des Lösungsalgorithmus über den Verstand, das Primat der Form über den Inhalt – ein wesentliches, wenngleich wohl auch ungewolltes Ergebnis des Mathematikunterrichts? Die Reaktionen der Schüler auf die so genannten Kapitänsaufgaben jedenfalls werden nicht selten als überzeugender Beleg für eine bejahende Antwort herangezogen. Schließlich gibt weltweit ein erstaunlich hoher Prozentsatz von Zweit- bzw. Drittklässlern die Lösung 36 zu folgender Aufgabe an: „*Auf einem Schiff sind 26 Schafe und 10 Ziegen. Wie alt ist der Kapitän?*“

Aber: So dumm sind sie nicht, warnt beispielsweise Andresen (1985). Auch wenn es überhaupt nicht so aussieht, machen sich Schüler(innen) häufig sehr wohl Gedanken über Aufgabenkontexte, Lösungswege und Ergebnisse (vgl. Selter & Spiegel 1997). Davon erfahren wir allerdings oft wenig, weil wir uns nicht die Mühe machen, nicht über die Zeit verfügen oder nicht die Notwendigkeit sehen, das mathematische Denken der Kinder aus deren Perspektive verstehen zu wollen.

So zeigt beispielsweise eine genauere Analyse des Kapitänsaufgaben-Phänomens mit den Augen der Kinder, dass der Verstand der Schüler nicht prinzipiell chlorophormiert wird, sondern dass sie in einer bestimmten Situation unter bestimmten Rahmenbedingungen ein bestimmtes Verhalten zeigen (vgl. Selter & Spiegel 1997, 30 ff.). Die Schüler(innen) lösen die Kapitänsaufgaben halt, weil in der Schule Textaufgaben (nahezu) immer eindeutig lösbar sind und weil sie gelernt haben, Lösungsschemata zum Lösen von Textaufgaben anzuwenden, ohne noch viel über die Inhalte nachdenken zu müssen (vgl. Müller 1995, 43). Die Schüler(innen) verhalten sich dann häufig so, wie sie es glauben, dass es von ihnen erwartet wird, und es ist in der Regel aus ihrer Perspektive durchaus nicht unvernünftig, dieses zu tun. Wenn man deren Vorgehen allerdings genau analysiert, kann man bei ihnen nicht selten auch ein gewisses Unbehagen feststellen, so zu verfahren.

Zu fragen ist daher bei anscheinend falschen oder gar unvernünftigen Schülerantworten stets, inwieweit man eher von einem *Fehlen* oder eher von einer *Nicht-Aktivierung* von Kompetenzen sprechen sollte. Denn in authentischeren Situationen oder sogar in authentischeren Versionen der oben beschriebenen Aufgaben lässt sich nicht selten ein (ganz) anderes Verhalten beobachten (vgl. Verschaffel et al. 2000, 44 ff.). Hier artikulieren die Schüler(innen) viel häufiger die Unlösbarkeit von Kapitänsaufgaben oder legen ihre Gründe dafür offen, warum sie deren Lösung berechnet haben, obwohl dieses eigentlich nicht möglich ist.

Zweifelsohne wird es immer Kinder geben, die schematisch zwei oder mehr Zahlen aus einem Aufgabentext herauspicken, diese algorithmisch miteinander verknüpfen und das Resultat schließlich mechanisch in einen Antwortsatz integrieren. Allerdings ist der Prozentsatz der so entstehenden Schülerlösungen vermutlich weit geringer als erwartet.

In diesem Sinne strebt die vorliegende Studie an, einen Beitrag zur weiteren Auseinandersetzung mit der Fragestellung zu liefern, ob die Kinder so genannte Textaufgaben automatisch verarbeiten oder ob sie mit diesen Aufgabenstellungen reflektierter umgehen, als es auf den ersten Blick den Anschein hat.

Hierzu wurde die Division mit Rest als Thema ausgewählt, weil hier eine schematische Bearbeitung schnell offenbar wird (vgl. Abschnitt 2). Im Gegensatz zu vielen anderen Textaufgaben ist hier nämlich mehr nötig als bloß die korrekte Ausführung der erforderlichen Rechnungen: Die eigentliche Schwierigkeit besteht häufig darin, den Rest situationsabhängig zu deuten bzw. überhaupt erst einmal die Notwendigkeit zu erkennen, dieses zu tun (vgl. Abschnitt 1). Da ein solches Hineinversetzen in den Kontext bei der größten Anzahl der in der Schule behandelten Textaufgaben – entgegen bester Absichten der Aufgabenkonstruktoren – häufig nicht erforderlich ist, besteht durchaus die Gefahr, dass sich die Schüler(innen) im Laufe der Schulzeit daran gewöhnen, dass die Sache in den Sachaufgaben nichts zur Sache tut, wie es Erichson (1991, 22) einmal formuliert hat.

Solche Gewöhnungsprozesse sind einerseits sicherlich gefährlich, andererseits aber auch erforderlich. Denn eine der Grundmaximen des schulischen Sachrechnens heißt: *Beachte die Wirklichkeit, aber nicht wirklich!* Oft ist es nämlich gar nicht sinnvoll, sich zu sehr in die Rahmenbedingungen eines Kontexts hineinzusetzen, und es ist des weiteren nicht immer offensichtlich, ob die „richtige“ Antwort auch die realistischste ist.

Bei der Busaufgabe beispielsweise kann mit Recht gefragt werden, ob die als korrekt bewertete Antwort (32 Busse) die vernünftigste ist: So ist es wahrscheinlich weniger sinnvoll, eigens einen lediglich zu einem Drittel besetzten Bus einzusetzen, als die 12 verbliebenen Soldaten mit Autos oder einem Kleinbus zu transportieren. Des weiteren wird stillschweigend das eher unrealistische Szenario entworfen, dass zunächst 31 Busse mit jeweils 36 Soldaten bis auf den letzten Platz besetzt werden, bevor sich dann die Frage stellt, was man mit den übrig bleibenden Personen anstellt. Nicht besonders realistisch erscheinen beispielsweise außerdem die recht geringe Zahl der Sitze pro Bus und die Tatsache, dass der Armee so viele Busse gleichen Typs zur Verfügung stehen. U. U. wäre es außerdem ökonomischer, eine geringere Anzahl von Bussen mehrfach fahren zu lassen.

Um diese Aufgabe – so wie erwartet – lösen zu können, muss man den Kontext zwar wahrnehmen, aber man darf nicht den Fehler machen, ihn zu ernst zu nehmen. Ein bisschen Automatismus muss offensichtlich schon sein.

4. Design der Studie

In der hier zu beschreibenden, kleinen Erkundung bekamen 24 Kinder am Ende des 4. Schuljahres, also nachdem sowohl die schriftliche Division als auch die Division mit Rest behandelt worden waren, fünf Textaufgaben im Rahmen eines Klassentests vorgelegt. An einem der darauf folgenden Tage lösten zwölf von ihnen in Einzelinterviews zunächst jede der Aufgaben nochmals, wurden dann mit ihren Lösungen aus den Tests konfrontiert, und außerdem gebeten, zu Unterschieden und Gemeinsamkeiten ihrer Bearbeitungen Stellung zu nehmen.

Bei den fünf ausgewählten Geteiltaufgaben ergibt sich jeweils ein Rest, der dem Bruch $\frac{1}{2}$ entspricht. Bewusst wurden relativ leichte Zahlenwerte verwendet, um den Beobachtungsfo-

cus primär auf die sachrechnerischen Überlegungen der Kinder legen zu können. Es wurden drei Verteilungsaufgaben und zwei Aufteilungsaufgaben verwendet. Bei den Aufteilungsaufgaben erfolgte die Aufgabenkonstruktion so, dass der entstehende Rest einmal so zu berücksichtigen, dass die nächst größere natürliche Zahl (Aufg. 1), und einmal die nächst kleinere natürliche Zahl als Ergebnis erzielt wird (Aufg. 3). Bei den Verteilungsaufgaben wurden die Aufgaben so ausgewählt, dass der Rest einmal vergleichsweise problemlos (Aufgabe 4), einmal nicht gleichmäßig (Aufg. 5) sowie einmal fair verteilt werden kann, wobei hierbei auch eine Lösung denkbar ist, bei der keine gerechte Verteilung erfolgt (Aufg. 2). Es handelte sich um folgende Aufgaben:

1. Zu einem Auswärtsspiel wollen 820 Fußballfans mit dem Bus anreisen. In jedem Bus können 40 Fans mitfahren. Wie viele Busse müssen fahren?
2. Bei einer Feier werden 450 Schokoriegel an 60 Kinder verteilt. Wie viele Schokoriegel bekommt jedes Kind?
3. Sebastian hat 7,60 DM gespart. Eine Packung Sticker kostet 0,80 DM. Wie viele Packungen kann Sebastian kaufen?
4. Acht Lottospieler haben zusammen 884 DM gewonnen. Wie viel Geld bekommt jeder?
5. An einem See wollen 140 Personen mit Booten fahren. Es stehen 40 Boote zur Verfügung. Wie viele Menschen sitzen in jedem Boot?

Es fehlt der Platz, um die Ergebnisse der Tests und der Interviews ausführlich darzustellen und zu diskutieren. Daher sollen anhand der Auswärtsspiel-Aufgabe (Aufg. 1, in Anlehnung an die Busaufgabe in Abschnitt 2) exemplarisch interessante Grundmuster des Denkens der Schüler(innen) beschrieben und analysiert werden.

5. Das Auswärtsspiel

Die nebenstehende Tabelle gibt die Häufigkeiten der von den Schülern gegebenen Antworten wider. Dabei ist festzuhalten, dass 7 von 24 Antworten im Test die „erwünschte“ Angabe 21 Busse enthielten, während das entsprechende Verhältnis bei den Interviewantworten 7 von 12 betrug. Des weiteren ist auffällig, dass neben den erwarteten Resultaten wie 21, 20 oder 20 1/2 eine Reihe von kaum oder nicht erklärbar erscheinenden Antworten wie 205, 11 oder 28 beobachtet werden konnte. Inwieweit diesen Zahlenangaben ein rationaler Kern zugrunde liegt, wird im Weiteren zu klären sein.

Aufgrund der höheren Aussagekraft soll in der folgenden Analyse eine Konzentration auf die zwölf Aufgabenbearbeitungen erfolgen, zu denen die Schüler(innen) während der Interviews befragt werden konnten. Zunächst sollen diejenigen Lösungen diskutiert werden, bei denen auf Anhieb das erwünschte Resultat produziert wurde.

Antwort	Test	Interv.
21 Busse	7	7
20 Busse	8	1
2 Rest 20 Busse	2	0
205 Busse	1	1
40 Busse	0	1
20 1/2 Busse	1	0
10 Busse	1	0
20 Rest 2 Busse	2	0
2,20 Busse	1	0
11 Busse	0	1
28 Busse	0	1

$$\begin{array}{r} 8207 : 407 = 20 \\ 80 \\ \hline 20 \\ 0 \\ \hline 20 \end{array}$$

Es müssen 21 Busse fahren.

Fabian

$$820 : 40 = 20 \text{ R: } 20$$

$$20 + 1 = 21$$

Es müssen 21 Busse fahren.

Marcel

$$820 : 40 = 20$$

Es müssen 21 Busse fahren

Anna

Alle drei Schüler berechneten das Resultat der Geteiltaufgabe mit 20 Rest 20 und zeigten sich in der Lage, den Rest in der intendierten Weise zu interpretieren: Schließlich mussten die 20 übrig bleibenden Personen auch noch mitfahren, sie hätten sich – wie Marcel mutmaßte – wahrscheinlich schon eine Eintrittskarte gekauft. Während Fabian schriftlich rechnete, lösten Marcel und Anna die Aufgabe, indem sie im Kopf nicht $820:40$, sondern $82:4$ rechneten, was sie durch das Durchstreichen der Nullen auch optisch dokumentierten. Im Gegensatz zu anderen Schülern, die diese „Vereinfachung“ ebenfalls wählten (s. u.), waren sie in der Lage, den bei dieser Rechnung verbleibenden Rest 2 als 20 zu interpretieren.

Die nächsten vier Schüler gaben nicht unmittelbar die Antwort 21. Nachdem sie jedoch gebeten worden waren, ihr Vorgehen zu erläutern, änderten sie ihre Auffassung und gaben – wenngleich einmal lediglich mündlich – das „erwünschte“ Resultat 21 an. Boris rechnete die Geteiltaufgabe zunächst korrekt aus und notierte 20 als Ergebnis. Nach einiger Zeit des Nachdenkens änderte er es in $20 \frac{1}{2}$. Auf Rückfrage des Interviewers, was er jetzt notiert habe, sagte Boris: „20 Busse, dazu $\frac{1}{2}$... also nicht $\frac{1}{2}$, schon ein ganzer, aber dass da die Hälfte der Leute hineingeht. ... Also noch ein Bus, also 21.“

$$\begin{array}{r} 8207 : 40 = 20 \\ 80 \\ \hline 20 \end{array}$$

Es müssen 20¹/₂ Busse fahren.

Boris

$$\text{R: } 8207 : 407 = 21$$

Es müssen ²¹~~20~~ Busse fahren.

Paula

$$\begin{array}{r} 820 : 40 = 20 \text{ Rest } 20 \\ \underline{80} \\ 20 \\ \underline{0} \\ 20 \end{array}$$

Es müssen 20¹ Busse fahren.

Dominik

$$\begin{array}{r} 820 : 40 = 20 \\ \underline{80} \\ 20 \end{array} \quad \begin{array}{r} 40 \\ 80 \\ 120 \\ 160 \\ 200 \\ 240 \\ 280 \\ 320 \\ 360 \\ 400 \\ 440 \\ 480 \end{array}$$

Es müssen 21 Busse

Jörg

Boris ursprüngliche Antwort 20 1/2 ist ein typisches Beispiel dafür, dass man das Denken von Kindern bisweilen nicht nur falsch einschätzt, sondern häufig auch unterschätzt. Die Interpretation liegt zunächst nahe, dass er eine unangemessene Deutung des Sachverhaltes lieferte bzw. überhaupt nicht im Kontext dachte. Er meinte jedoch gar nicht einen halben (in der Mitte durchgeschnittenen) Bus, sondern einen halbvollen! So gesehen, ist seine ursprüngliche Art der Interpretation des Restes (1/2 heißt halbvoll) eigentlich viel informativer als die als korrekt angesehene Antwort 21.

Paula gab zunächst das Ergebnis 81 an. Sie hatte eine Zahl gesucht, die mit 4 multipliziert möglichst nahe an 82 heranreichen sollte – hier konnte wie bei Anna und Marcel das Wegdenken der Nullen beobachtet werden: „Zuerst habe ich es mit 9 probiert, das ging nicht. Dann habe ich es mit ziemlich mehr versucht, damit nicht zu wenig rauskam. Dann habe ich mit 20 probiert, dann ging's.“ In dem Moment, in dem sie ihre Erklärung beendete, wurde ihr klar, dass sie den Fehler gemacht hatte, das *Ergebnis* der Aufgabe $4 \cdot 20 = 80$, und nicht deren zweiten *Faktor* zu berücksichtigen. Ihr war klar, dass 20 Personen übrig blieben, für die ein weiterer Bus benötigt wurde, so dass sie zunächst 81, dann aber, als sie ihres Merkfehlers gewahr wurde, 21 als Antwort angab. Paulas Lösung steht repräsentativ für diejenigen Lösungen, bei denen die Kinder durchaus im Sinne der Aufgabenkonstrukteure sinnvoll mit dem Rest umgegangen sind, dieses aber in den vorliegenden Untersuchungen nicht berücksichtigt wurde, weil nur diejenigen Schülerlösungen analysiert wurden, bei denen kein Rechenfehler vorlag (vgl. Abschnitt 2).

Dominik berechnete die Aufgabe korrekt mit 20 Rest 20 und schrieb, 20 Busse müssten fahren. Er ergänzte dann: „Es können 20 Busse fahren und nicht 21, weil in den einen Bus können ja nur 20 Personen rein.“ Erneut begegnen wir hier einer durchaus vernünftigen Erklärung für ein als „falsch“ angesehenes Resultat: Ein Bus dürfe halt nur dann fahren, wenn er komplett besetzt sei. Kurz darauf ergänzte er: „Ich könnte jetzt hier auch schreiben 21 Busse, aber der wird dann nur halb voll.“ Interviewer: „Hier steht: Wie viele Busse müssen fahren?“ Dominik entgegnete noch hin- und hergerissen: „20, eigentlich 21, aber in einen Bus können ja nur 20 Personen rein ... Also 21, aber der eine Bus ist nur halbvoll.“ Darauf änderte er seine Antwortzahl.

$$\begin{array}{r} \cancel{820} : \cancel{40} = 20 \\ \cancel{820} \cdot 40 \quad - \quad \begin{array}{r} \cancel{820} \\ 328 \\ 11 \\ \hline 492 \end{array} \\ \hline 328 \end{array}$$

$\S 20:40 = 20 \text{ Busse}$

Joana

$$\begin{array}{r} 820:40=20 \\ \underline{80} \\ 20 \\ \underline{20} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 20 \\ +20 \\ \hline 40 \end{array}$$

Steffen

Steffen notiert zunächst die Antwort 20. Auf die Rückfrage des Interviewers, was denn mit dem von ihm ebenfalls genannten Rest 20 passieren müsse, entgegnete dieser: „Was übrig bleibt, muss ich noch dazurechnen.“ Daraufhin addierte er den Quotienten 20 und den Rest 20 und veränderte die Antwort in 40. Wenn auch nicht bei dieser, so ließ sich dieses Umgehen mit dem Rest vereinzelt auch bei anderen Aufgaben beobachten. Spekuliert man über mögliche Gründe, dann könnte einer darin liegen, dass man bei der Probe einer Geteiltaufgabe mit Rest ja zunächst den Quotienten mit dem Divisor multipliziert und dann den Rest addiert. Es könnte u. U. sein, dass dieses von den Kindern „Prüfaufgabe“ genanntes Verfahren mit dazu beigetragen hat, dass Quotient und Rest von Steffen addiert wurden.

$$820:40=11 \quad \underline{\text{Es müssen 11 Busse anreisen.}}$$

Elvira

$$\begin{array}{r} 820:40=205 \\ 80 \\ \underline{02} \\ 0 \\ \underline{20} \\ 20 \\ \underline{0} \end{array}$$

Es müssen 205 Busse fahren.

Larissa

$$\begin{array}{l} 820:40=20 \text{ R: } 2 \\ \underline{200} \\ 20 \\ 2 \cdot 4 = 8 \\ 20 + 8 = 28 \end{array}$$

Es müssen 28 Busse fahren.

Verena

Die letzten drei Lösungen sind dadurch gekennzeichnet, dass sich bei der Berechnung und ggf. darüber hinaus auch bei der Deutung des Ergebnisses „Probleme“ auftauchten, die in deutlichen Abweichungen vom Ergebnis 21 resultierten. Elvira berechnete $820:40$, indem sie zunächst $400:40$ teilte. Dann rechnete sie nochmals $400:40$, kam zum Resultat 10 und addierte hierzu eine 1, weil für die 20 verbliebenen Personen noch ein Bus benötigt würde. Sie vergaß also die erste 10, ging ansonsten aber sachgerecht mit dem Rest um (s. o.). Larissa berechnete $820:40$ über $82:4$, wobei sie zunächst den Fehler beging, nach dem abgeschlossenen ersten Rechenschritt nicht die 0 von der 820 nach unten zu übertragen. Außerdem vergaß sie beim Zwischenresultat 20 ebenfalls die 0 zu streichen, also $2:4$ zu rechnen. Da sie hier $20:4$ rechnete, erhielt sie das Endresultat 205. Hier werden erneut die Schwierigkeiten deutlich, die entstehen können, wenn die durchaus hilfreiche Kopfrechenstrategie, eine Aufgabe ($820:40$) auf eine einfachere Analogie-Aufgabe ($82:4$) zurückzuführen, mit dem schriftlichen Algorithmus vermischt wird.

Verena schließlich kam auf dem selben Weg wie Joana zum Resultat 20 Rest 2. Anders als Joana sieht sie jedoch die Notwendigkeit, den Rest noch zu verarbeiten. Es wird nicht deutlich, warum sie den Rest 2 zunächst mit 40, dann mit 4 multiplizierte und die sich so ergebende 8 dann zur bereits erhaltenen 20 hinzuzählte. Schaut man sich die anderen Aufgaben an, so wird deutlich, dass es ein Grundmuster ihres Vorgehens war, den entstehenden Rest stets mit dem Divisor zu multiplizieren und dieses Ergebnis dann auf unterschiedliche Weise zu dem ganzzahligen Anteil des Quotienten additiv in Beziehung zu setzen. Über mögliche Gründe kann bestenfalls spekuliert werden.

Zusammenfassend gesagt ergab die Analyse der jeweils *zuerst genannten* Antworten der 12 beteiligten Schüler(innen) ...

- drei „im erwarteten Sinne“ korrekte Lösungen (21),
- zwei Lösungen, bei denen eine vernünftige Erklärung für eine nicht erwartungskonforme Interpretation des Rests gegeben wurde (20 bzw. 20 1/2).
- zwei Lösungen, bei denen zwar aufgrund von Rechenfehlern ein falsches Resultat angegeben wurde (11 bzw. 81), doch der Rest sachgerecht berücksichtigt wurde,
- eine Lösung (22), bei der der Rest 20 : 40 durch den leichter zu berechnenden Quotienten 40 : 20 ersetzt wurde.
- zwei Lösungen (40 bzw. 28), bei denen der Rest (nach einer Multiplikation) zum Resultat hinzugezählt wurde,
- eine Lösung, bei der die falsche Anwendung der „Nullen-streich-Regel“ zu einem fehlerhaften Resultat (205) führte,
- sowie eine Antwort (20), bei der die Schülerin den Rest 2 weggelassen ließ, das „20 R 2“ keinen Sinn mache.

Im Verlauf des Interviews veränderten vier weitere Schüler(innen) während des Erklärens ihres Lösungswegs ihr Resultat in 21, so dass sich die aus der Tabelle am Beginn dieses Abschnitts ersichtlichen Werte ergaben.

6. Verstehen wollen

Die vorliegende Untersuchung zeigt erneut – wie eine Reihe von ähnlich angelegten Forschungsvorhaben und wie die Alltagserfahrung vieler Lehrer(innen) – auf, dass die Division mit Rest ein schwieriges Thema darstellt und die Schüler(innen) bisweilen Lösungen produzieren, die kaum nachzuvollziehen sind. Es wird aber andererseits auch deutlich, dass einer ganzen Reihe von Antworten, die man als „falsch“ zu klassifizieren geneigt ist, überraschend vernünftiges Denken zugrunde liegt (vgl. auch Silver et al. 1993, 120 ff.). Diese unerwarteten Denkweisen der Kinder (1) beim Ausrechnen bzw. (2) bei der Deutung des Restes zu verstehen, ist bisweilen nicht einfach.

Sowohl die Schwierigkeiten der Kinder mit den Aufgaben als auch diejenigen der Erwachsenen bei der Interpretation von deren Denkweisen sprechen dafür, den Schüler(inne)n ausreichend Gelegenheiten zu bieten, zu geeigneten Zeitpunkten Textaufgaben zur Division mit Rest bearbeiten zu lassen. Von zentraler Bedeutung ist es dabei, die Kinder zum Nachdenken über die Aufgabeninhalte, über ihre Vorgehensweisen und über die Ergebnisse anzuregen, wie dieses beispielsweise im Zahlenbuch 3, S. 96 vorgeschlagen wird.

Das „kostet“ natürlich Zeit. Aber es geht ja nicht nur um die Division mit Rest, sondern im Kern um etwas Grundsätzliches: den kontinuierlich-dosierten Umgang mit Nicht-Standard-Anforderungen, der der übermäßigen Verbreitung von Auto-Mathismen Einhalt gebieten und im Gegenzug das Verstehen-Wollen lebendig halten bzw. werden lassen kann. Dabei meint „Verstehen“ das nicht-schematische Verstehen sowohl der Mathematik durch die Schüler als auch der Schüler(innen) durch die Lehrpersonen. Die Antwort „1/2 Busse“ beispielsweise deutet eben nicht notwendigerweise auf fehlerhaftes Vorgehen hin, sondern kann durchaus ein ela-

boriertes Aufgabenverständnis signalisieren: „1/2 Busse heißt: ein halbvoller Bus“. Für Lehrer wie für Didaktiker gilt es in diesem Sinne, die Forderung nach der Kultivierung des gesunden Menschenverstands stets auch auf sich selbst anzuwenden.

Literatur

1. Andresen, U.: So dumm sind sie nicht! Von der Würde der Kinder in der Schule. Weinheim: Beltz Quadriga 1985.
2. Carpenter, Th. P.; Lindquist, M.; Mathews, W. und Silver E. A.: Results of the third NAEP mathematics assessment: Secondary school. In: Mathematics Teacher 76 (1983), 652–659.
3. Dolk, M.; Uittenbogaard, W.: De ouderavond. Een context voor deelproblemen. In: Willem Bartjens 9 (1989) 1, 14–19.
4. Erichson, Ch.: Sachtexte lesen, mit denen man rechnen kann. In: Die Grundschulzeitschrift (1991) 48, 22–25.
5. Galen, F. van; Feijs, E.: A mathematics lesson on video disc. In: Streefland, L. (Ed.): Realistic Mathematics Education in Primary School. Utrecht: CD-β Press 1991, 183–208.
6. Greer, B.: The modeling perspective on wor(l)d problems. In: Journal of Mathematical Behavior 12 (1993), 239–250.
7. Müller, G. N.: Kinder rechnen mit der Umwelt. In: Müller, G. N., Wittmann, E. Ch. (Hg.): Mit Kindern rechnen. Frankfurt: Arbeitskreis Grundschule 1995, 42–64.
8. Radatz, H.: Untersuchungen zum Lösen von eingekleideten Aufgaben. In: Journal für Mathematik-Didaktik (1983) 3, 205–217.
9. Selter, Ch.; Spiegel, H.: Wie Kinder rechnen. Leipzig: Ernst Klett Grundschulverlag 1997.
10. Silver, E. A.; Shapiro, L. J. und Deutsch, A.: Sense making and the solution of division problems involving remainder: An examination of middle school students' solution processes and their interpretations of solutions. In: Journal for Research in Mathematics Education 24 (1993), 117–135.
11. Verschaffel, L.; Greer, B. und Corte, E. de: Making Sense of Word Problems. Lisse: Swets & Zeitlinger 2000.
12. Winter, H.: Sachrechnen in der Grundschule. Bielefeld: CVK 1985.
13. Treffers, A.; Moor, E. de: Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 2: Basisvaardigheden en cijferen. Tilburg: Zwijsen 1990.

Anmerkung: Meinen Mitarbeitern Sonja Lauth und Marc Wysk sei für ihre Mithilfe ebenso gedankt wie den beteiligten Schüler(inne)n und ihrem Mathematiklehrer für ihre Unterstützung.