

Grundvorstellungen und Strategien

Division – die vernachlässigte Operation?

Sebastian Wartha / Corinna Forcher Selbstredend werden in der Grundschule die Subtraktion, Addition und Multiplikation anschaulich an Arbeitsmitteln erarbeitet. Das unterstützt den Aufbau von Zahl- und Operationsvorstellungen zu diesen drei Grundrechenarten. Welche Arbeitsmittel und Modelle sind jedoch geeignet, um auch bei der Division tragfähige Strategien zu lernen? Oder ist die Division so trivial, dass hier auf anschauliches Arbeiten verzichtet werden kann?

Autoren

Prof. Dr. Sebastian Wartha
Institut für Mathematik
Pädagogische Hochschule
Karlsruhe

Corinna Forcher
Fachleiterin im Bereich
Mathematik, Sachunterricht
und Medienbildung in
Pforzheim

Grundvorstellungen zur Division

Verteilen oder Ausmessen?

Der Rechenausdruck $8 : \frac{1}{4} = 32$ wirkt verstörend auf viele Lernende, die noch nicht aufgegeben haben, sich über Zahlzusammenhänge Gedanken zu machen. Auch vielen Lehrenden fällt es schwer, spontan eine passende Rechengeschichte zu dieser Rechnung zu formulieren.

Ein Grund hierfür kann sein, dass die Division häufig mit Situationen des Verteilens assoziiert wird. Bei $8 : 2$ können 8 Äpfel an zwei Kinder verteilt werden, aber was tun, wenn der Divisor $\frac{1}{4}$ ist? Soll an ein (hoffentlich hypothetisches) Viertel-Kind verteilt werden und dann überlegt werden, wie viel ein ganzes Kind bekäme?

Der Ausweg ist eine andere Grundvorstellung zur Division, das Ausmessen. Hier gibt der Divisor vor, wie groß die herzustellende Teilmenge ist. Gesucht ist die Anzahl der Teilmengen: Wenn bei 8 Äpfeln auf jeden Teller ein Viertel Apfel kommt, dann ist eher einsichtig, dass insgesamt 32 Teller benötigt werden. Das Ausmessen von 8 Metern mit einem Stock der Länge $\frac{1}{4}$ m ergibt, dass das Stock 32-mal hineingelegt werden kann.

Die (konstruktiv nutzbare) Irritation, dass das Ergebnis einer Divisionsaufgabe größer als die Zahlen im Term vorkommen, löst sich hiermit auf: Wenn die „Maßeinheit“ kleiner als 1 ist, dann kommt sie häufiger vor als die Objekte, die es auszumessen gilt.

Im Zahlenraum bis 100 erweist sich die Grundvorstellung zur Division als Ausmessen ebenfalls als sehr geeignet für die Besprechung tragfähiger Rechenstrategien. Hiermit soll nicht angedeutet werden, dass „Verteilen“ („Wie viel bekommt jede?“) überflüssig ist. Im Hinblick auf Zahlbereichserweiterungen und

die Thematisierung von Divisionsstrategien ist das Ausmessen („Wie oft passt ... rein?“) jedoch besonders tragfähig.

Dynamisch oder statisch?

Die Multiplikation kann dynamisch („Gabi geht drei Mal auf den Dachboden und holt immer vier Bücher“) und statisch („auf dem Tisch liegen vier Teller mit drei Knödeln“) interpretiert werden. Bei der Division trägt diese Unterscheidung ebenfalls. Der Ausmess-Vorgang kann dynamisch („Astrid hat 36 Blumen und stellt immer 4 in eine Vase“) oder statisch („auf dem Tisch sind 36 Blumen, immer vier in einer Vase“) beschrieben werden (Schulz & Wartha, 2020). Zu Beginn des Lernprozesses erscheint es sinnvoll, Handlungen durchzuführen und diese mit der mathematischen Symbolik ($36 : 4$) zu verknüpfen, auf Dauer sind eher die statischen Kontexte und deren bildliche Darstellungen geeignet, um über den Zusammenhang zur symbolischen Schreib- und Sprechweise und mögliche Rechenstrategien zu sprechen.

Vorkenntnisse von Lernenden

In einer zweiten Klasse einer Karlsruher Grundschule wurde in Anlehnung an den Beitrag von Selter (1995) vor der systematischen Behandlung von Multiplikation und Division die statische Aufteil-Situation „In jeder Vase sind 4 Blumen, es sind 36 Blumen. Wie viele Vasen sind es?“ gestellt. Hierüber sollten Strategien zur Division erfasst werden, um den Lehrgang so gestalten zu können, dass er an die Vorkenntnisse der Lernenden anknüpft. Zur Lösung der Aufgabe durften die Lernenden Material nutzen, Skizzen anfertigen oder rechnen. Im Folgenden werden verschiedene Strategien betrachtet und hinsichtlich der Fortsetzbarkeit untersucht.

Die Materialien zu
diesem Beitrag

M1 – M4 Divisions-Materialien

M5 – M13 Divisions-Materialien **D**

D Alle Downloads dieser Ausgabe
finden Sie in der digitalen Ausgabe:
www.friedrich-verlag.de/digital/



Sackgassen-Strategien zur Division

Einzeln zählen

Insbesondere dynamisch formulierte Rechengeschichten (12 Plättchen, immer 4 auf einen Teller legen) fordern zum einzelnen oder höchstens gruppierten Zählen auf. Das Ergebnis kann auf diesem Weg zwar bestimmt werden (3 Teller werden benötigt), jedoch ist dies keine tragfähige und fortsetzbare Strategie. Es kann nicht erwartet werden, dass in der zweiten Jahrgangsstufe die passende Multiplikationsaufgabe für die Lösung von $36 : 4$ auswendig gewusst wird. Eine zählende Vorgehensweise, bei der 36 Plättchen in Vierergruppen gelegt werden, ist unökonomisch (dauert sehr lange) und kann nicht gedanklich in der Vorstellung durchgeführt werden.

Reihe aufsagen

Ein Ausweg vieler Lernender zur Bearbeitung der Aufgabe $36 : 4$ ist, dass die „Viererreihe“ aufgesagt und kontrolliert wird, das wie viele Zahlwort der 42 zugeordnet wird. Diese Strategie erweist sich jedoch bei Divisionsaufgaben im Zahlenraum über Hundert als nicht tragfähig ($270 : 15$ – wer kann schon die 15er-Reihe?). Abgesehen davon sind zählende Vorgehensweisen wie „Reihe aufsagen“ aus guten Gründen bereits bei der Multiplikation höchst problematisch (Padberg & Benz, 2020).

Wiederholte Subtraktion oder Addition

Wenn der dynamische Charakter der Aufgabenstellung im Vordergrund steht (36 Blumen werden in Vasen mit je 4 Blumen gesteckt), so liegt es nahe, dass von der 36 so oft die 4 subtrahiert wird, bis keine Blume mehr übrig ist. Die Anzahl an Subtrahenden gibt dann die Anzahl der Vasen, also das Ergebnis der Aufgabe $36 : 4$ an. Entsprechend kann aus Sicht der Vasen ebenfalls die 4 so oft addiert werden, bis 36 erreicht sind. Die Anzahl der Summanden ist das Ergebnis der Aufgabe.

$$\begin{aligned}
 4+4 &= 8 & 8+4 &= 12 & 12+4 &= 16 & 16+4 &= 20 & 20+4 &= 24 \\
 24+4 &= 28 & 28+4 &= 32 & 32+4 &= 36 \\
 9 \times 4 &= 36
 \end{aligned}$$

Abb. 1. Wiederholte Addition

Diese Strategien sind ebenfalls sehr aufwändig und spätestens im Zahlenraum über 100 nicht sinnvoll fortsetzbar. Außerdem entsprechen sie nicht den curricular geforderten Strategien bei der Multiplikation, bei der ein „Ableiten aus Kernaufgaben“ vorgesehen ist, wenn das Ergebnis einer Aufgabe wie $9 \cdot 4$ nicht auswendig gewusst wird.

Tragfähige-Strategien zur Division

Nutzung der Umkehraufgabe

Besonders effektiv können Divisionsaufgaben gelöst werden, wenn die Umkehraufgabe der Multiplikation auswendig gewusst wird. Wer aber das Ergebnis von $4 \cdot 9$ oder $13 \cdot 16$ nicht auswendig weiß, dem nützt diese Vorgehensweise bei der Lösung von $36 : 4$ oder $208 : 13$ nicht viel. Klar ist: Je mehr Malaufgaben auswendig abgerufen werden können, beispielsweise die Kernaufgaben oder die Aufgaben des kleinen Einmaleins, desto mehr Geteiltaufgaben können schnell gelöst werden.

Ableiten aus bekannten Aufgaben

Wenn das Ergebnis einer Geteilt-aufgabe nicht sofort über die Malaufgabe abgerufen werden kann, dann ist wünschenswert, dass die Lösung über bekannte Aufgaben (beispielsweise unter Nutzung des Distributivgesetzes) abgeleitet werden. So kann die Aufgabe $36 : 4$ beispielsweise gelöst werden:

- Subtraktiv über $40 : 4 - 4 : 4$
- Additiv über $20 : 4 + 16 : 4$
- Gleichsinnig verändert über $18 : 2$

Voraussetzung ist, dass die Kernaufgaben $4 \cdot 10$, $4 \cdot 1$ bzw. $4 \cdot 5$ und $4 \cdot 4$ oder $9 \cdot 2$ samt Umkehrung abgerufen werden können.

Erste Nutzungen des Distributivgesetzes können auch anders geschehen:

$$12 + 12 + 4 + 4 + 4 = 36$$

9 Vasen

Abb. 2: Distributivgesetz zur Division

Der Schüler bemerkt hierzu: „Ich kann hier drei Vierer auf einmal rechnen, ohne dass ich viel Platz verschwende. [...] Danach hab ich mit Vierern gerechnet, weil ich gemerkt hab, dass ich sehr nah an der 36 war. Hätte dann zwar nochmal 12 ergeben, das wusste ich erst nicht. Und dann hab ich gewusst, dass 6 [Vasen] plus 3 [Vasen] 9 ist, das war dann das Ergebnis.“

Offenkundig wäre es keine gute Idee gewesen, die Kinder aufzufordern, mit Plättchen oder anderen Materialien die Situation nachzuspielen.

Zu groß wäre die Gefahr, dass zählende Vorgehensweisen die trag- und ausbaufähige Strategie des Schülers nicht zugelassen hätten. Sein Zahlenblick und die Nutzung des Distributivgesetzes können in einer Rechenkonferenz aufgegriffen und weiterentwickelt werden.

Darstellungsmittel

Eine Erarbeitung der Strategien auf anschaulicher Darstellungsebene sollte bei der Division als besonders anspruchsvoller Rechenoperation selbstverständlich sein. Doch welche Modelle sind geeignet, die Operation nicht nur zu illustrieren, sondern sie tragfähig und gedanklich fortsetzbar für den Aufbau von Ableitungsstrategien einzusetzen?

Gruppierte Mengen

Zunächst ist nahe liegend, die Ergebnisse von Handlungen zu betrachten: Bei $36 : 9$ werden immer 4 Blumen in eine Vase gestellt, wie viele Vasen werden benötigt?



Abb. 3. Schöne Blumen, leider kein tragfähiges Modell

Hier kann zwar der Zusammenhang zur Multiplikation gezeigt werden, jedoch sind Bilder dieser Art weder gedanklich einsetzbar (in der Vorstellung können 72 Blumen wohl nicht in 8 Vasen gelegt werden) noch bei größeren Zahlen mit vertretbarem Aufwand fortgesetzt werden.

Rechteckdarstellungen

Selbstverständlich wird die Addition an gleichen Modellen wie die Subtraktion thematisiert – niemand käme auf die Idee, für Plusaufgaben ein anderes Arbeitsmittel als für Minusaufgaben einzusetzen. Der Zusammenhang zwischen den Operationen ist so zentral, dass sich das in der Verwendung des gleichen Modells widerspiegelt. Entsprechend liegt nahe, dass bei der Division das gleiche Modell einzusetzen wie bei der Multiplikation. Hier sind Rechteckmodelle wie Punktefelder oder Quadratgitter besonders tragfähig und fortsetzbar (vgl. Schulz, 2017).

Anschauliche Erarbeitung von Ableitungsstrategien

Soll die Aufgabe $36 : 4$ anschaulich am Punktefeld gelöst werden, so ist zunächst eine Übersetzung

in den Kontext nötig: Wie viele Vierer passen in 36? Es sollen also 36 Punkte mit „4er-Päckchen“ ausgemessen werden. Das Ergebnis ist die Anzahl der Päckchen.

Mit Hilfe von halbtransparenten Folien wird das Punktefeld so abgedeckt, dass zunächst 4er-Päckchen zu sehen sind.

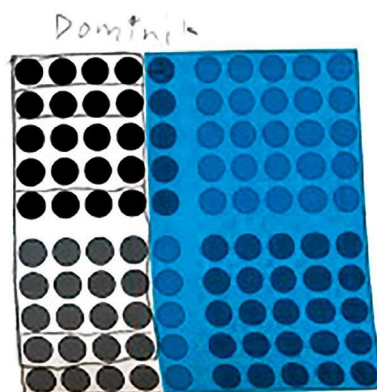


Abb. 4: Wie viele 4er sind 36?

Nun ist die Frage, bei wie vielen 4er-Päckchen bereits bekannt ist, wie viele Punkte das dann insgesamt sind?

Wenn klar ist, dass zehn 4er-Päckchen 40 sind, dann ist ein 4er-Päckchen weniger 36. Also werden neun 4er-Päckchen benötigt.

Weiß das Kind, dass fünf 4er-Päckchen 20 Punkte sind, dann können diese zunächst abgedeckt werden. Es fehlen 16 Punkte, und das sind vier 4er-Päckchen.

Lernhürde 1: Starten mit dem Divisor

Bei den Operationen Minus, Plus und Mal beginnt der anschauliche (und symbolische) Rechenweg in der Regel mit der ersten Zahl: Bei $42 - 7$ wird eine 42 am Rechenrahmen eingestellt und die 7 wird davon weggeschoben, bei der Addition $42 + 7$ werden die 7 Perlen entsprechend dazu geschoben. Bei der Multiplikation $42 \cdot 7$ können 42 Zeilen mit immer 7 Kästchen im Rechteck hergestellt werden.

Die anschauliche Erarbeitung von $42 : 7$ startet jedoch damit, dass der Divisor 7 am Arbeitsmittel eingestellt wird: Das Punktefeld wird so abgedeckt, dass lauter 7er-Zeilen zu sehen sind. Anschließend muss überlegt werden, wie viele dieser Zeilen für 42 Punkte insgesamt benötigt werden.

Lernhürde 2: Und wie ist das Ergebnis zu sehen?

Selbst wenn für $42 : 7$ nun die 7er-Zeilen eingestellt sind und die 42 beispielsweise in 35 und 7 Punkte zerlegt werden kann, so ist nicht trivial, wie das Ergebnis (die Anzahl der 7er-Zeilen) im Bild gesehen wird.

Einmaleins und Einspluseins ab 2

Literatur

- Padberg, F. & Benz, Ch. (2020). Didaktik der Arithmetik. Berlin: Springer Spektrum.
- Schulz, A. & Wartha, S. (2020). Arithmetik am Übergang Primar-Sekundarstufe. Berlin: Springer Spektrum.
- Selter, Ch. (1995). Eigene Wege zum Einmaleins. Grundschole, 75 (5), 10–13.
- Schulz, A. (2017). Multiplikation verstehen. Mathematik lehren, 201, S. 17–22.

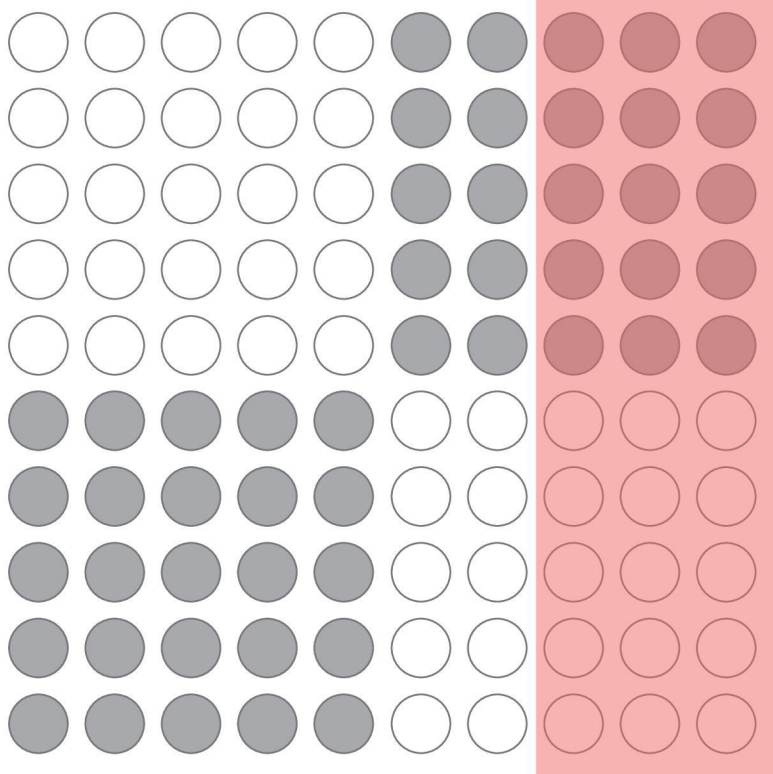
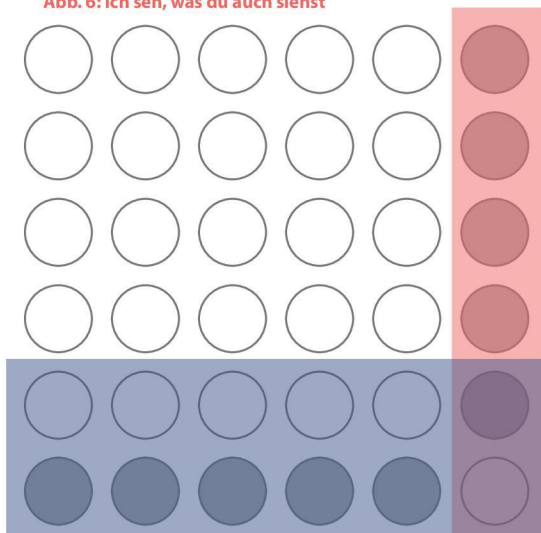


Abb. 5: Wie viele 7er werden für 42 Punkte benötigt?

Lernchance 1: Zusammenhang Multiplikation und Division anschaulich nutzen

- Können am Punktefeld Divisionsaufgaben „gesehen werden“, dann kann der Zusammenhang zwischen Mal- und Geteiltaufgaben am Punktefeld thematisiert werden. Das Ergebnis tritt in den Hintergrund, im Vordergrund steht die Aktivierung von Grundvorstellungen. Impulsfragen sind, wie auf das Feld geschaut werden muss, um
 - die Aufgabe $4 \cdot 5 = 20$ zu sehen,
 - die Aufgabe $5 \cdot 4 = 20$ zu sehen,
 - die Aufgabe $20 : 5 = 4$ zu sehen,
 - die Aufgabe $20 : 4 = 5$ zu sehen.

Abb. 6: Ich seh, was du auch siehst



Zentral ist hier, wie das Ergebnis im Modell bestimmt werden kann. Das ist insbesondere bei der Division anspruchsvoll: Die Anzahl an Viererreihen bzw. Fünferspalten.

Insbesondere können Textaufgaben auf das Punktefeld bezogen werden. Wenn am Tisch 5 Teller mit immer 4 Krapfen liegen – wie kann das am Punktefeld „gesehen werden“? Können die „Teller“ eingezeichnet werden? Wenn 20 Kartoffeln in 4er-Säcken verpackt sind – wie kann diese Situation am Punktefeld „gesehen“ werden? Wie müssten die Säcke eingezeichnet werden?

Während Kartoffeln zunächst wenig mit Krapfen zu tun haben, so wird über das Modell doch eine Verbindung geschaffen werden. Oder anders ausgedrückt: Wenn Geschichten mit Krapfen oder Kartoffeln am Rechteckmodell dargestellt werden können, dann handelt es sich um Mal- oder Geteiltaufgaben. Die Lösung kann am Punktefeld deutlich tragfähiger als mit den Lebensmitteln erfolgen. ■



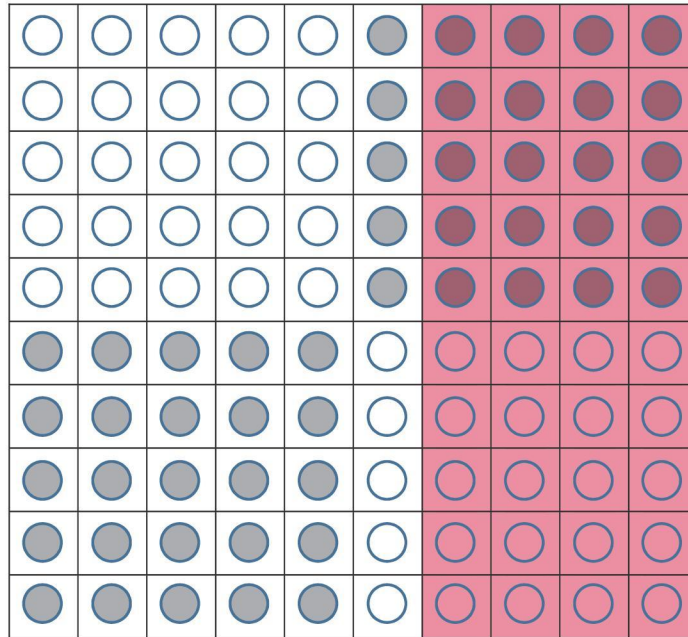
Datum:

Name:

Auf dem Tisch sind 30 Blumen.

Immer 6 Blumen sind in einer Vase. Wie viele Vasen sind es?

Zeichne am 100er-Punktfeld.



Wie siehst du die Blume?

Wie siehst du die Vasen?

Wie siehst du das Ergebnis?

Ergebnis:

Rechenaufgabe

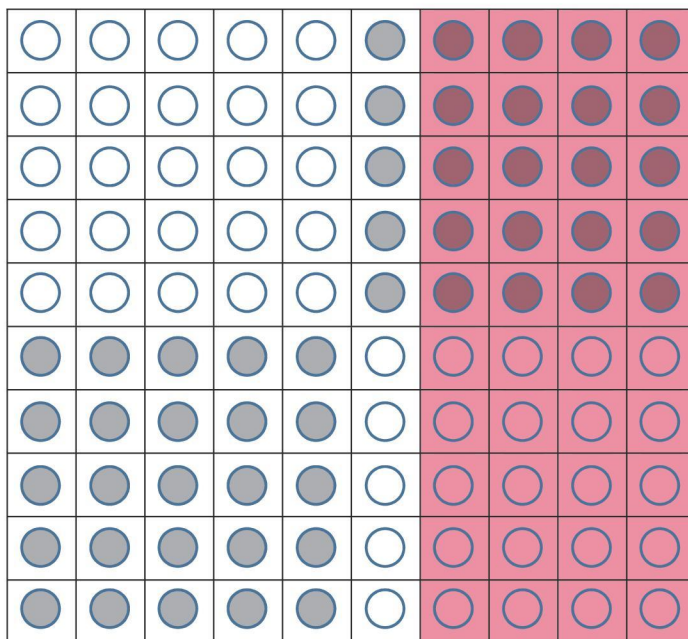


Datum:

Name:

Brigitte hat 35 Kartoffeln. In einer Packung sind 5 Kartoffeln.
Wie viele Packungen hat sie?

Zeichne am 100er-Punktfeld



Wie siehst du die Kartoffeln?

Die Kartoffeln werden _____ dargestellt.

Wie siehst du die Packungen?

Die Packungen werden _____ dargestellt.

Wie siehst du das Ergebnis?

Das Ergebnis sehe ich _____.

Ergebnis:

Regenaufgabe:

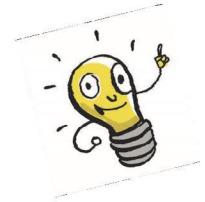
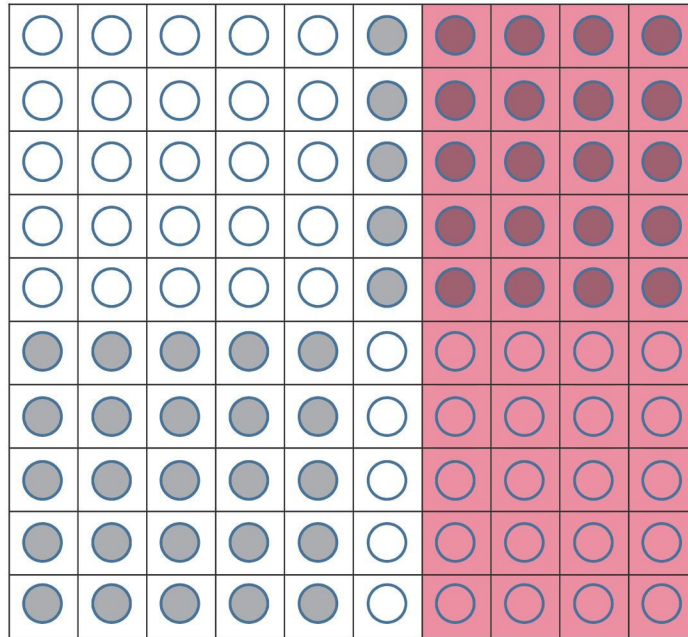
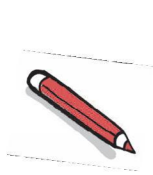


Datum:

Name:

Josef hat 24 Orangen. Er schenkt alle seinen drei Geschwistern.
Wie viele bekommt jedes?

Zeichne am 100er-Punktfeld.



Wie siehst du die Orangen?

Wie siehst du die Geschwister?

Wie siehst du das Ergebnis?

Ergebnis:

Rechenaufgabe:

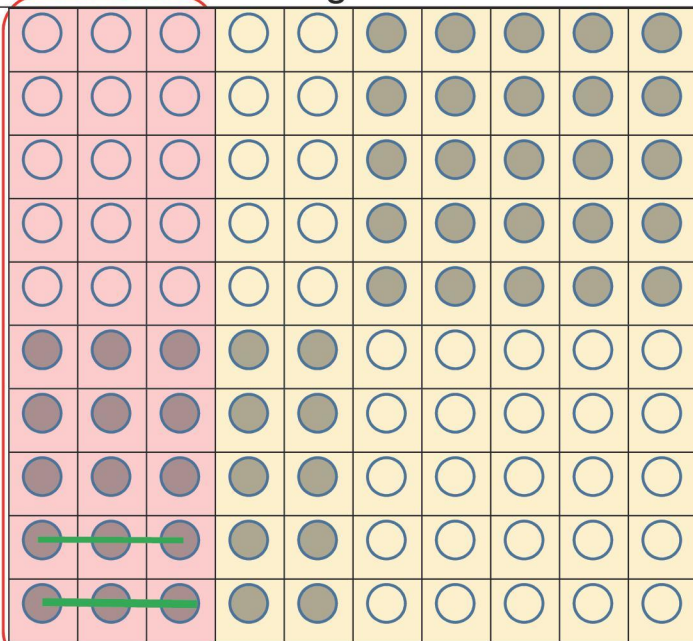


Name:

Datum:

Welche Zeichnung im 100er-Punktfeld und welche Aufgaben helfen dir bei der folgenden Rechnung $24 : 3$?

Kreuze an und begründe.



Ich weiß, dass

$$30 : 3 = 10 \text{ und}$$

$$6 : 3 = 2 \text{ ist und}$$

$$10 - 2 = 8.$$

Also ist

$$24 : 3 = 8.$$



Ich weiß, dass

$$15 : 3 = 15 \text{ und}$$

$$9 : 3 = 3 \text{ ist und}$$

$$5 + 3 = 8.$$

Also ist

$$24 : 3 = 8.$$



Begründe: