

Vom Zählen zum Rechnen

VON SILVIA WESSOLOWSKI

Um sich vom zählenden Rechnen zu lösen, müssen die Schülerinnen und Schüler die Zerlegung der Zahlen bis 10 auswendig wissen. Dazu können strukturierte Zahl-darstellungen beitragen.

Lara ist seit vier Wochen Schülerin einer zweiten Klasse. In einem informellen Test stelle ich ihr Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 10 und bis 20. Bei der Frage: „Wie viele fehlen von 4 (8, 3, 7, 1) bis 10?“, die sie etwas zögernd, aber richtig beantwortet, sehe ich ihr an, dass sie die Finger benutzt, obwohl sie sich auf die linke Hand stützt und in der rechten Hand einen Bleistift hält. Als sie mir sagen soll, wie sie die Lösungen herausgefunden hat, will sie mir etwas an den Händen zeigen, zieht sie aber ganz schnell wieder zurück, denn in der Schule darf ihre Lehrerin nicht sehen, dass sie die Finger verwendet. Weiter erklärt sie: „Wir müssen selber wissen, was wir machen. Wir müssen selber raten, welche Zahl ... Wir müssen ganz schnell ...“. Und genau das habe ich auch beobachtet, als sie sehr schnell reagiert und sagt: „ $4 + 3 = 8$; $5 + 4 = 9$; $2 + 7 = 10$; ...; $8 - 4 = 10$; ...“.

So wie bei diesem Mädchen kommt es immer wieder vor, dass Kinder die Aufgaben im Zahlenraum bis 10 nicht automatisiert haben und dann auch im größeren Zahlenraum zählend rechnen müssen. Dafür brauchen sie die Finger oder Materialien mit abzählbaren Elementen. Lara nutzt für Additionsaufgaben wie $5 + 6$ und $3 + 8$ die Finger und für Subtraktionsaufgaben wie $14 - 5$ den Rechenrahmen, an dem sie sogar „sicherheitshalber“ die zehn Perlen auf der oberen Schiene einzeln abzählt.

Was kann man tun, damit Kinder wie Lara das Zählen überwinden oder es sich gar nicht erst ver-

festigt und sie sich bis zum Ende des ersten Schuljahres vom Zählen lösen?

ADDITIONSAUFGABEN LÖSEN

Um die Frage zu beantworten, soll zunächst einmal am Beispiel der Aufgabe $6 + 7$ gezeigt werden, wie diese mit Hilfe von Rechenschiffchen dargestellt und gelöst werden könnte und welche Voraussetzungen gebraucht werden, damit eine rechnerische Lösung gelingt (siehe Abb. 1). Dabei sollen die angegebenen Gleichungen nur den Lösungsweg beschreiben, es geht nicht darum, dass Kinder ihn in dieser Weise notieren.

Ganz gleich wie die Aufgabe gelegt und gelöst wird, immer müssen Beziehungen zwischen Zahlen oder Aufgaben erkannt und genutzt werden: In sechs und sieben

„steckt“ jeweils fünf. Sieben ist eins mehr als sechs. $6 + 7$ ist eins weniger als $7 + 7$. Von sechs bis zehn sind es vier und sieben lässt sich in vier und drei zerlegen. Damit Kinder beim Rechnen im Kopf solche Beziehungen nutzen können, müssen sie diese automatisiert haben. Fehlt ihnen dieses Wissen jedoch, bleibt ihnen nichts anderes übrig, als auf das zählende Rechnen zurückzugreifen.

ZERLEGUNGSAUFGABEN

Wie viele Aufgaben sind es, die die Kinder automatisiert haben müssen? Im Zahlenraum bis 10 gibt es 66 Additionsaufgaben, die auswendig gewusst werden müssen. Wenn man die Aufgaben mit Null nicht mit einbezieht, sind es noch 45 Aufgaben. Schon das Einprägen dieser 45 Zerlegungsaufgaben gelingt manchen Kindern nur für wenige Aufgabensätze, weil sie Aufgaben immer wieder aufs Neue an den Fingern abzählen und dabei weder Zahlbeziehungen noch Beziehungen zwischen Aufgaben entdecken. Aber gerade diese Aufgaben sind, wie die Beispiele zeigen, für das Rechnen im Zahlenraum bis 20 und darüber hinaus unverzichtbar.

Die Zerlegungsaufgabe $7 = 2 + 5$ zu wissen, kann helfen die Aufgaben $8 + 7$ oder $28 + 7$ oder $68 + 27$ schrittweise zu lösen. Für $6 + 7$ oder $35 + 7$ werden dagegen andere Zerlegungen von sieben gebraucht.



$$6 + 7 = 5 + 5 + 1 + 2 = 10 + 3 = 13$$

oder

$$6 + 7 = 6 + 6 + 1 = 12 + 1 = 13$$

oder

$$6 + 7 = 7 + 7 - 1 = 14 - 1 = 13$$



$$6 + 7 = 6 + 4 + 3 = 10 + 3 = 13$$

Abb. 1: Darstellung und Lösung einer Aufgabe an Rechenschiffchen.

Zu diesem Beitrag gehören folgende Materialien (im Heft [📄] / auf CD [📀]):

- M6: Mein Entdeckerheft [📄] [📀]
- M7: Zahlenhäuser ergänzen [📄] [📀]
- M8: Fehlersuche [📄] [📀]
- M9: Vorlagen [📄]
- M10: Zahlbilder und passende Plus- und Minusaufgaben [📄] [📀]

SCHWERPUNKT

Klassenstufe: 1-2

Lerngelegenheiten:

Die Schülerinnen und Schüler können

- Zahlen bis 10 in unterschiedlicher Form darstellen
- sich Zahlen mithilfe von Zahlbildern vorstellen
- Zahlen bis 10 strukturieren und zueinander in Beziehung setzen
- Zahlbildern Plus- und Minusaufgaben zuordnen

	Problem- lösen	Kommuni- zieren	Argumen- tieren	Modell- bilden	Dar- stellen
Zahlen & Operationen		X	X		X
Raum & Form					
Muster & Strukturen					
Größen & Messen					
Daten, Häufigkeit & Wahrscheinlichkeit					

STRUKTURIERTE MENGENBILDER ALS ANSCHAULICHE STÜTZE

Zahlen dürfen nicht nur durch ungeordnete Mengen von Bohnen, Muggelsteinen oder Steckwürfeln dargestellt werden, wenn es darum geht, Zahlzerlegungen in den Blick zu nehmen. Werden Wendeplättchen geworfen, kann eine Plättchenmenge zwar in eine „rote“ und eine „blaue“ Menge zerlegt werden, es entstehen aber keine Anordnungen, die eine anschauliche Stütze für die Zahlzerlegungen darstellen können.

Rechenschiffchen stellen dagegen ein Arbeitsmittel dar, das anbietet, beim Darstellen und Auffassen von Zahlen die Fünfer- und Zehnerstruktur des Materials und ggf. noch die blaue oder rote Seite der Plättchen zu nutzen. Fordert man Kinder auf, eine bestimmte Anzahl von Plättchen, z. B. sieben, so in die Rechenschiffchen zu legen, dass man schnell sehen kann, wie viele es sind, kommen auch immer die beiden Möglichkeiten aus Abb. 2 vor:

Die lineare Anordnung links betont die Zerlegung von Sieben in Fünf und Zwei sowie die Beziehung zu Zehn (Wie viele fehlen noch bis 10?). In die Blockdarstellung rechts können insbesondere Beziehungen zu vier und drei ($7 = 4 + 3$) oder zu sechs ($7 = 6 + 1$) „hineingesehen“ werden. Damit haben Kinder durch das Legen von Plättchen selbst strukturierte Mengenbilder „erfunden“, an denen Zahlzerlegungen und auch die Beziehung zu Zehn erkannt werden können. Verabredet werden sollte dabei, dass die Darstellungen immer von links nach rechts – entsprechend der sonstigen Schreibrichtung – gelesen werden, denn dann enthalten die Zahlbilder bereits bekannte Bilder anderer Zahlen. Um beispielsweise sieben als sechs plus eins sehen zu können, muss die Blockdarstellung für sechs in der Anordnung der sieben Plättchen erkannt werden.

Beide Plättchenanordnungen können leicht in zeichnerische Darstellungen im Zwanzigerfeld übertragen werden. Wenn nötig, kann aber auch immer wieder auf Handlungen in den Rechenschiffchen oder auch nur auf die Plättchen zurückgegriffen werden. Da das wiederholte Legen von Plättchen sehr zeitaufwändig ist und immer wieder zum Zählen verleitet, hat es sich bewährt, statt der Rechenschiffchen Karten mit den entsprechenden Zahlendarstellungen – Zahlbilder – zu verwenden. Damit wird gleichzeitig der Anteil des konkreten Handelns zugunsten eines Operierens in der Vorstellung reduziert.

Auf dem Weg vom Zählen zum Rechnen werden im Folgenden vier Schwerpunkte beschrieben, die den Anfang einer Förderung bilden sollten.

Strukturierte Mengenbilder und Zahlzerlegungen bis 10

Nachdem ein Kind gelernt hat, Zahlen im Rechenschiffchen darzustellen – bevorzugt auf die beiden Weisen wie in Abb. 2 –, werden ihm Plättchenanordnungen in den Rechenschiffchen oder Karten mit Zahlbildern im Sinne des „schnellen Sehens“ nur kurz gezeigt. Es wird aufgefordert, zu sagen, wie viele Plättchen/gefärbte Punkte es gesehen hat. Darüber hinaus soll es die wahrgenommene Anordnung auch verbal beschreiben: „Ein Schiffchen war ganz voll und noch zwei.“ oder: „Links fünf, daneben zwei.“ oder „Oben vier, unten drei.“ oder „Doppel-drei und noch eins.“ Dabei kommt es nicht darauf an, eine bestimmte Sprechweise zu verwenden oder schnell zu einer formalen Darstellung durch Gleichungen zu gelangen, sondern darauf, dass die Kinder das Zahlbild mental rekonstruieren und beschreiben können. Gelingt dies nicht, kann zur Unterstützung des „Sehens“ der Struktur auch ein Stift zwischen die Plättchen in den Rechenschiffchen oder auf die Zahlbilder gelegt werden. Beim „schnellen Sehen“ ist es auch möglich, die Aufmerksamkeit gezielt auf die Beziehung zu zehn zu richten: „Wie viele fehlen noch bis 10?“

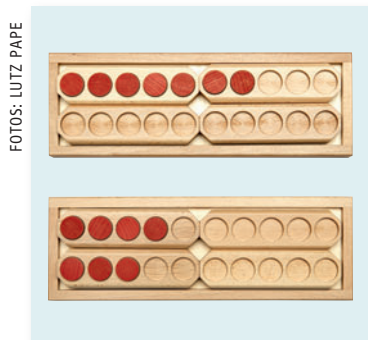


Abb. 2: Zwei Möglichkeiten, die 7 an Rechenschiffchen darzustellen.

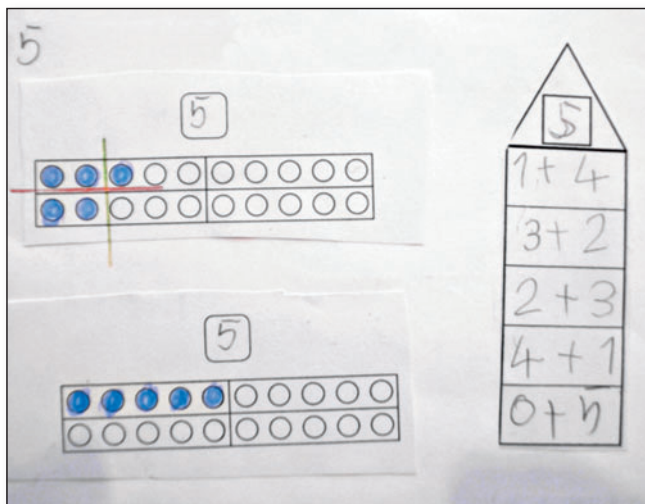


Abb. 3: Philipps Zahlzerlegungen für die Zahl 5.

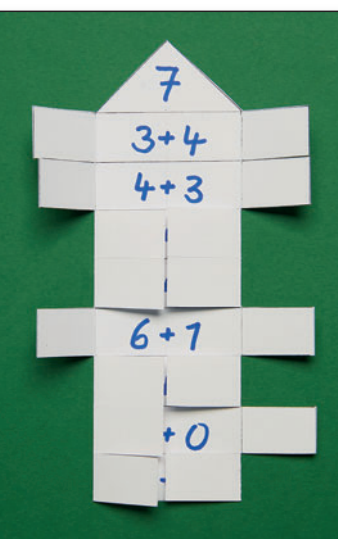


Abb. 4: Klappversion des Zahlenhauses für die 7.

Durch diese Übungen wird nicht nur das schnelle Erfassen von Anzahlen geschult, sondern durch das Beschreiben von Zahlzerlegungen das Addieren und Subtrahieren vorbereitet (vgl. Kaufmann/Wessolowski 2005).

Zahlzerlegungen bis 10

In Zahlenhäusern können die Zahlzerlegungen in systematischer Form zusammengefasst werden, z.B. gesammelt in einem Entdeckerheft (siehe M6). Systematisch meint zunächst einmal nicht, dass ein Kind die Zerlegungsaufgaben nach der Größe der Zahlen ordnen muss, sondern es soll einer Zahl möglichst alle Zerlegungen unter Verwendung der Zahlbilder zuordnen (siehe Abb. 3). Die Frage, ob es sicher sei, alle Zerlegungen gefunden zu haben, führt meist ganz von selbst dazu, dass ein Kind beginnt, die Aufgaben – am besten dann ausgeschnitten auf Zetteln – zu sortieren.

Mit Zahlenhäusern können darüber hinaus eine Reihe von Übungen zur Automatisierung der Aufgaben durchgeführt werden,

so z.B., wenn eine Klappversion in Partnerarbeit eingesetzt wird (siehe Abb. 4, Blanko-Vorlage M9) oder Kinder unvollständig ausgefüllte Häuser ergänzen (siehe S. 25, M7) und Häuser mit fehlerhaften Einträgen korrigieren sollen (siehe S. 26, M8; vgl. Batzel/Wessolowski 2006). Dabei sollten die passenden Karten mit Zahlbildern immer verdeckt bereitgelegt werden. Fallen einem Kind bei solchen Übungen einzelne Zahlzerlegungen nicht ein, darf es, bevor es anfängt zu zählen, immer wieder auf die Zahlbilder zurückgreifen, sie also kurz aufdecken und anschauen.

Zerlegungen der 10

Die Zerlegungen der Zahl 10 waren in den oben beschriebenen Übungen schon immanent enthalten, nämlich dann, wenn gefragt wurde: „Wie viele fehlen noch bis Zehn?“. Da gerade diese Zahlzerlegungen für das weitere Rechnen von besonderer Bedeutung sind, können sie auch gesondert oder zuerst in den Blick genommen werden.

Wie oben beschrieben, muss für das schrittweise Lösen der Aufgaben $8 + 7$ oder $28 + 7$ oder $68 + 27$ die Zerlegungsaufgabe $7 = 2 + 5$ auswendig gewusst werden. Um aber zu erkennen, dass gerade diese Zerlegung von Sieben gebraucht wird, muss ein Kind zuerst wissen, wie viele noch bis Zehn oder zum nächsten Zehner fehlen, also z.B.: $8 + \underline{\quad} = 10$. Daraus ergeben sich die folgenden Rechenschritte, die mit automatisierten Kenntnissen sehr schnell und ggf. sogar unbewusst ablaufen:

$$\begin{aligned} 8 + 7 &= \underline{\quad} \\ 8 + \underline{\quad} &= 10 \\ 7 &= 2 + \underline{\quad} \\ 10 + 5 &= \underline{\quad} \\ 8 + 7 &= 15 \end{aligned}$$

Wenn wir als Erwachsene die Aufgabe $8 + 7 = 15$ sogar auswendig wissen, verlieren wir gelegentlich die Komplexität dieses Lösungsweges aus dem Blick und auch, warum die Zahlzerlegungen insgesamt und speziell von Zehn so bedeutsam sind.

Da für die Zerlegungen der Zahl 10 auch gut die Finger – jedoch statisch – verwendet werden können, bietet es sich auch an, diese Zahlzerlegungen sogar als erste zu üben. Dazu legt das Kind die Finger beider Hände ausgebreitet auf den Tisch. Von einer zweiten Person wird ein Stift so zwischen die Finger gestellt, dass er diese berührt und vom Kind gespürt werden kann. Zunächst wird nur nach der Anzahl der Finger links und rechts vom Stift gefragt, später können einer bestimmten Stiftstellung auch Additions- und Subtraktionsaufgaben zugeordnet werden. Diese Übungen werden zunächst mit offenen, danach mit geschlossenen Augen oder unter einem Tuch durchgeführt, damit das Kind lernt, sich die jeweiligen Anzahlen an den Fingern vorzustellen (vgl. Lorenz/Radatz 1993; Kaufmann/Wessolowski 2006). Zur Festigung der Zerlegungsaufgaben für die Zahl 10, also nachdem Verständnis dafür aufgebaut wurde, kann die Idee der „verliebten Herzen“ genutzt werden, die auch in manchen Schulbüchern zu finden ist (vgl. Menne 1999, siehe Abb. 5; Blanko-Vorlage auf M9).

Einspluseins- und Einsminuseinsaufgaben

Wenn alle Zerlegungen aller Zahlen bis 10 automatisiert worden sind, können die Kinder den Zahlbildern Plusaufgaben zuordnen und auch die zugehörigen Tauschaufgaben angeben (siehe S. 27, M10), wobei zu einem Bild verschiedene Aufgaben passen können, weil in einem Zahlbild unterschiedliche Zerlegungen gesehen werden können. Auf die Frage, ob auch Minusaufgaben zu dem Zahlbild passen, bekommt man, wenn man vorher $4 + 3 = 7$ und $3 + 4 = 7$ zugeordnet hat, von Kindern oft als Antwort: „Ja, $4 - 3$.“ Dann muss geklärt werden, was mit passenden Minusaufgaben gemeint ist, am besten durch



Abb. 5: Verliebte Herzen als Zerlegungsübung.

Handlungen an den Rechenschiffchen. Es kann gezeigt werden, dass von den sieben Plättchen z.B. die oberen vier oder die unteren drei herausgenommen werden können. Diese Handlungen lassen sich durch $7 - 4 = 3$ und $7 - 3 = 4$ protokollieren. Später reicht es, die wachzunehmenden Plättchen nur noch mit Hilfe einer durchsichtigen Folie abzudecken (siehe Abb. 6) und letztlich sollen sich die Kinder die Handlungen anhand der Zahlbilder nur noch vorstellen. Auf diese Weise werden für die Minusaufgaben wieder dieselben strukturierten Mengenbilder und operative Zusammenhänge zwischen Tausch- und Umkehraufgaben genutzt.

ZUSAMMENFASSUNG

„Am Ende des ersten Schuljahres sollten möglichst alle Kinder alle Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 10 und möglichst alle Verdopplungsaufgaben und Halbierungsaufgaben im Zahlenraum bis 20 auswendig wissen“ (Schipper 2005, S. 32), denn ohne dieses Grundwissen ist eine Ablösung vom zählenden Rechnen nicht möglich. Wenn Kinder zählend rechnen, egal wie alt sie sind, muss dies demzufolge das erste und grundlegende Ziel in der Förderung im mathematischen Bereich sein.

Die Anzahl der damit gemeinten Aufgaben soll noch einmal bewusst gemacht werden:

45 Zerlegungsaufgaben, einschließlich der ersten 5 Verdopplungsaufgaben, 45 Minusaufgaben, einschließlich der ersten 5 Halbierungsaufgaben 10 Verdopplungs- und Halbierungsaufgaben ($6 + 6, \dots, 20 - 10$), Das ergibt 100 Aufgaben.

Es sind 100 Aufgaben, die auswendig gelernt werden müssen. Wenn man diese nur den Fingern „überlässt“, bleiben sie zusammenhanglose Fakten und müssen ohne Verständnis und ausreichende Vorstellungen durch Memorieren eingeprägt werden, was in der Regel nur für wenige Aufgabensätze gelingt. Beziehungen zwischen Zahlbildern und Aufgaben sowie auch zwischen den Aufgaben – im Beitrag wurden nur einige benannt – helfen, diese Menge von Fakten zu strukturieren und erst dadurch einprägsam zu machen. Nach einer Erarbeitung im oben beschriebenen Sinne sind spielerische Übungen wie z.B. mit Schüttelboxen geeignet – aber auch erst dann –, denn sonst geht es den Kindern bei solchen automatisierenden Übungen, die das zugrunde liegende Verständnis nicht ersetzen können, so wie Lara: „Wir müssen selber raten, welche Zahl ...“.

DIE AUTORIN

Dr. Silvia Wessolowski ist Professorin für Mathematik und ihre Didaktik und Leiterin der Beratungsstelle für Kinder mit Lernschwierigkeiten in Mathematik an der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg.

LITERATUR

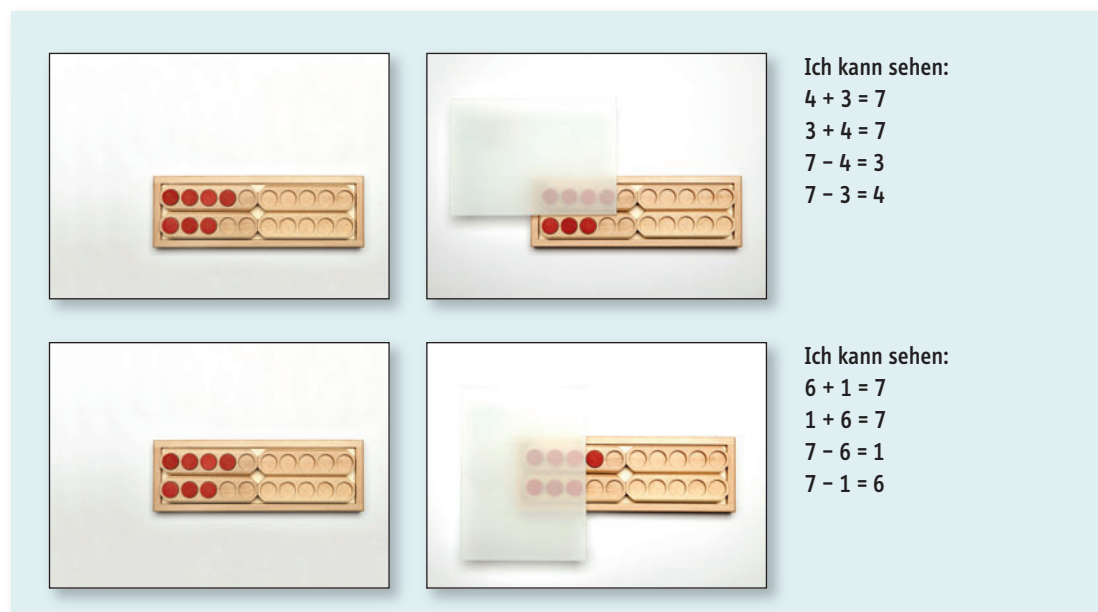
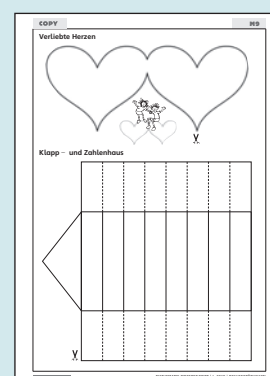
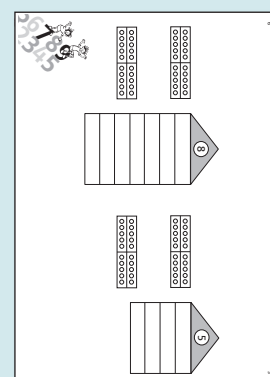
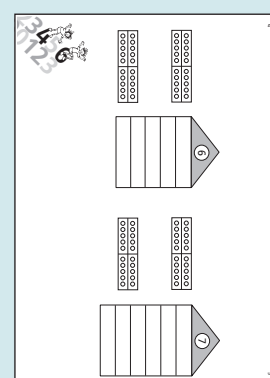
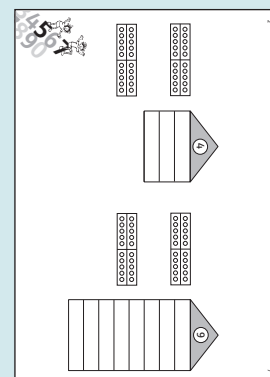
- Batzel, Andrea/Wessolowski, Silvia:** Und wenn ich kein Matheprofi bin? Offene Lernangebote und leistungsschwache Kinder. In: Rathgeb-Schnierer, Elisabeth/Reos, Udo (Hrsg.): Wie rechnen Matheprofis? Ideen und Erfahrungen zum offenen Mathematikunterricht. München/Düsseldorf/Stuttgart 2006, S. 187–196
- Kaufmann, Sabine/Wessolowski, Silvia:** Zählendes Rechnen. In: Grundschule Mathematik, Heft 7/2005, S. 18–23
- Kaufmann, Sabine/Wessolowski, Silvia:** Rechenstörungen. Diagnose und Förderbausteine. Seelze 2006
- Lorenz, Jens Holger/Radatz, Hendrik:** Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht. Hannover 1993
- Menne, Julie:** Effektiv üben mit rechen-schwachen Kindern. In: Die Grundschulzeitschrift, Heft 121/1999, S. 18–21
- Schipper, Wilhelm:** Modul G 4: Lern-schwierigkeiten erkennen – verständnisvolles Lernen fördern. SINUS-Transfer Grundschule. Kiel 2005

MATERIAL

Rechenschiffchen können beim Spectra-Verlag bestellt werden (Best.-Nr. 540) unter www.spectra-verlag.de

MEHR COPS AUF CD

M6b-d: Mein Entdeckerheft
M9: Vorlagen



Ich kann sehen:

$$\begin{aligned} 4 + 3 &= 7 \\ 3 + 4 &= 7 \\ 7 - 4 &= 3 \\ 7 - 3 &= 4 \end{aligned}$$

Ich kann sehen:

$$\begin{aligned} 6 + 1 &= 7 \\ 1 + 6 &= 7 \\ 7 - 6 &= 1 \\ 7 - 1 &= 6 \end{aligned}$$

Abb. 6: Durch den Einsatz einer durchsichtigen Folie werden die operativen Zusammenhänge zwischen Tausch- und Umkehraufgabe sichtbar.

○ ○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○ ○

○ ○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○ ○

10	

Mein Entdeckerheft
für Zahlen



○	○	○	○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○	○	○

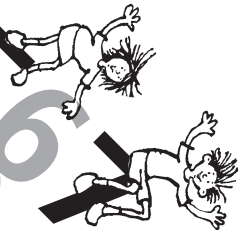
○	○	○	○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○	○	○

4		

○	○	○	○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○	○	○

○	○	○	○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○	○	○

9		



3
4
5
6
7
8
9
0

○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

6					

○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

7					



				5

○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

							8

○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○	○	○	○	○



Zahlenhäuser ergänzen

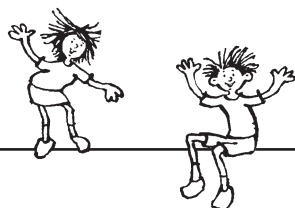
Ergänze.

Trage zuerst die Dachzahl ein.

$7+2$
$3+6$

$2+3$

$4+4$
$1+7$



$5+$
$+4$

$+2$
$6+$

$3+$
$+7$

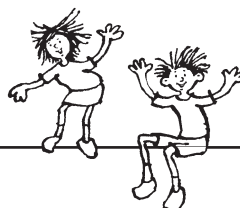
Fehlersuche

Finde die Fehler und ergänze.

6
$3+3$
$4+1$

8
$2+7$
$5+3$
$6+1$

10
$5+5$
$7+4$
$1+8$
$3+7$

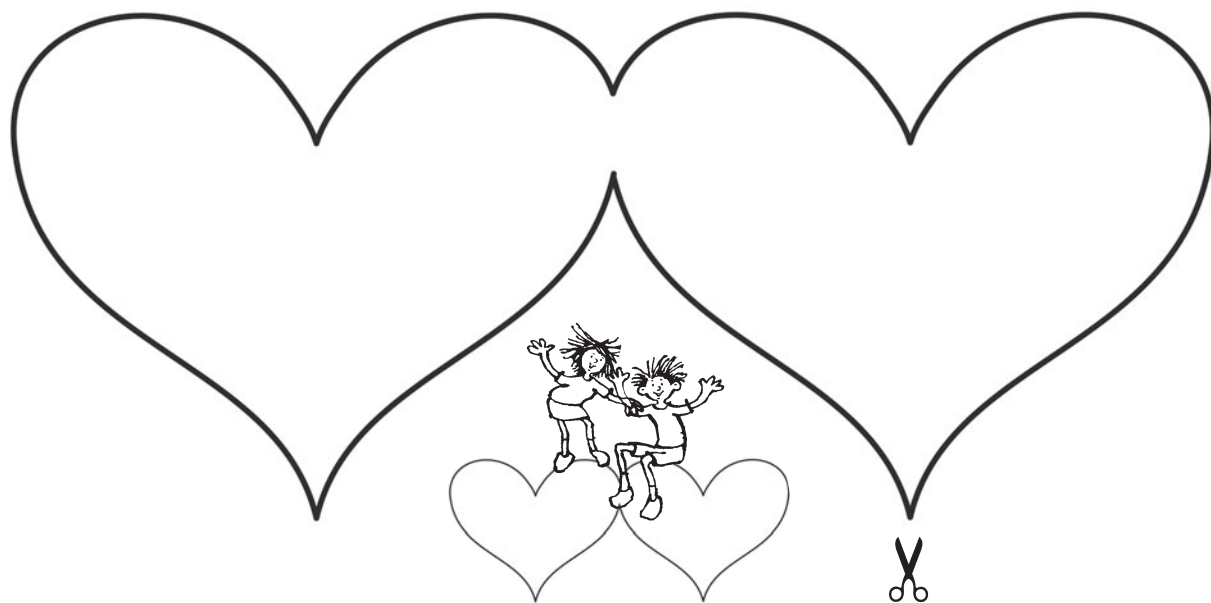


$3+4$
$2+5$
$6+3$

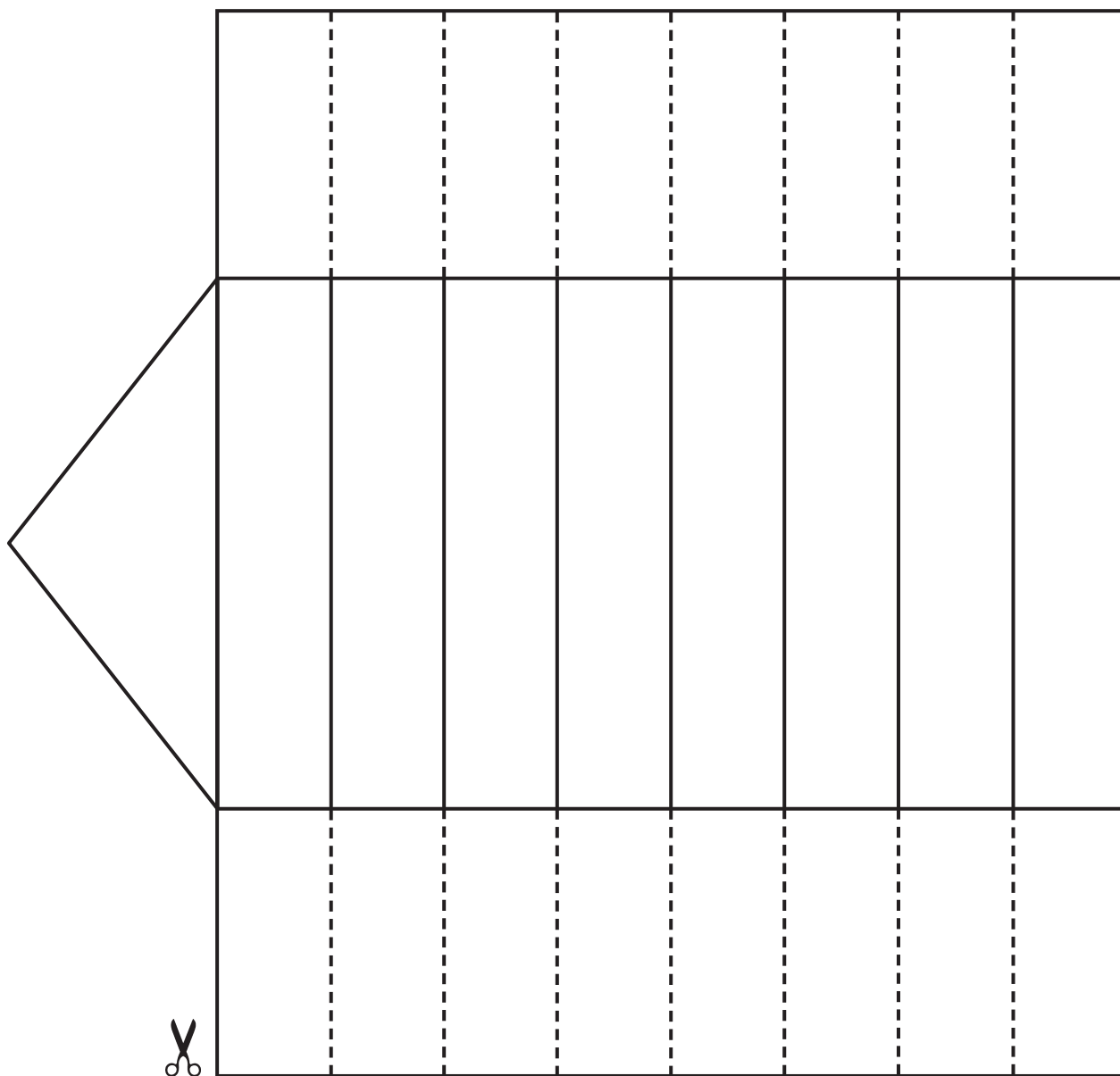
$6+2$
$3+4$
$1+3$

$7+2$
$4+5$
$2+5$

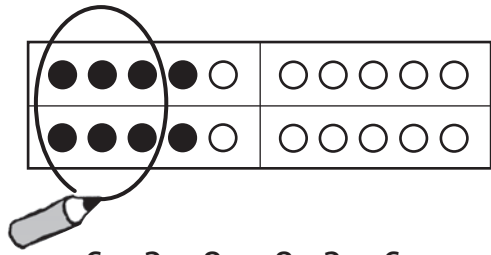
Verliebte Herzen



Klapp – und Zahlenhaus



Zahlbilder und passende Plus- und Minusaufgaben



$$\begin{array}{ll} 6 + 2 = 8 & 8 - 2 = 6 \\ 2 + 6 = 8 & 8 - 6 = 2 \end{array}$$

