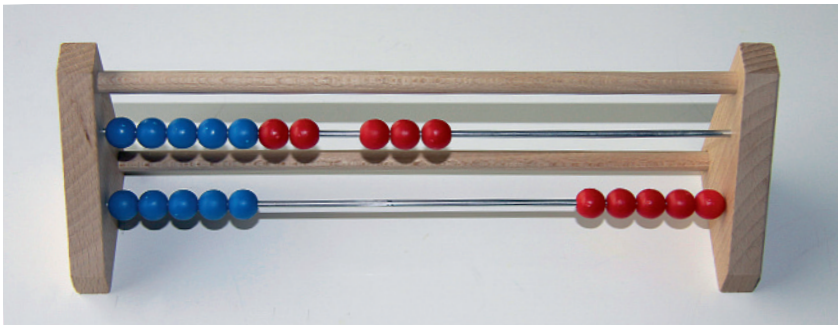


Prävention von Rechenschwierigkeiten

Vorläuferfähigkeiten als unverzichtbare Voraussetzung

→ Zählkompetenz, Rechenstrategien, Zahlzerlegung

Viele Schwierigkeiten beim Rechnen sind Folge des Unterrichts oder besser dessen, was im Unterricht nicht ausreichend geschieht. Rechenschwierigkeiten haben ihre Ursache häufig in mangelnden Voraussetzungen für das Rechnen, weil Vorläuferkompetenzen im Anfangsunterricht nicht hinreichend thematisiert und entwickelt wurden.



1 Darstellung der Aufgabe $7 + 8$ am Rechenrahmen mit der Strategie „Schrittweise“:

$$7 + 3 = 10$$

$$10 + 5 = 15$$

VON ANDREA PETER-KOOP

Den betroffenen Kindern gelingt es oft nicht, diese Kompetenzen nachträglich eigenständig zu entwickeln. Mit gezielten Förderprogrammen kann vielen von ihnen zwar geholfen werden, doch es gilt: Prävention ist besser als Therapie!

In diesem Beitrag werden daher zum einen die Vorläuferkompetenzen für das Rechnen herausgearbeitet und zum anderen diesbezügliche Übungsbeispiele vorgestellt.

Entwicklung von Rechenstrategien

Bevor Sie weiterlesen, denken Sie bitte einen Moment über die drei folgenden Fragen nach:

- Wann beginnt in dem von Ihnen im Mathematikunterricht verwendeten Lehrwerk das eigentliche Rechnen?
- Anhand welcher Aufgaben und Aktivitäten wird es vorbereitet?
- Folgen Sie diesbezüglich dem Schulbuch oder setzen Sie andere Schwerpunkte, und falls ja, warum?

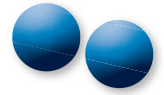
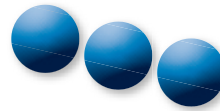
Eine Rechenstrategie, die alle Kinder können sollten

Wenn Kinder im ersten Schuljahr Aufgaben wie $7 + 8$ nicht zählend lösen sollen, benötigen sie heuristische Strategien (siehe Kasten, Seite 8). Eine solche Strategie könnte bei dieser speziellen Aufgabe das *Vereinfachen* im Sinne des Fast-Verdoppeln sein, d.h., die Verdopplungsaufgabe $7 + 7$ und/oder $8 + 8$ ist bekannt und das Ergebnis der Aufgabe $7 + 8$ wird entweder über $7 + 7 + 1$ oder $8 + 8 - 1$ ermittelt. Bei Aufgaben wie $8 + 3$ bietet sich diese Strategie allerdings nicht an.

Daher sollte eine Strategie eingeführt und geübt werden, die unabhängig vom jeweiligen Zahlenmaterial funktioniert. Diese Strategie ist das *schrittweise Rechnen*, bei der der zweite Summand zerlegt wird – erst bis zur 10 und dann weiter. Auf unsere Beispiele bezogen heißt das $7 + 3 + 5$ bzw. $8 + 2 + 5$ für die Tauschaufgabe. Diese Strategie ist auch im größer werdenden Zahlenraum entsprechend ausbaufähig. Aufgaben wie $28 + 37$ lassen sich ebenfalls leicht schrittweise rechnen ($28 + 30 + 7$), wenn ein entsprechendes Stellenwertverständnis aufgebaut wurde und erkannt wird, dass sich bei der Addition von Vielfachen von Zehn nur die Zehnerstelle verändert, während die Einerstelle unberührt bleibt. Anschließend wird über die Zerlegung $2 + 5$ der verbleibende Einer addiert oder die bereits automatisierte Aufgabe $8 + 7 = 15$ genutzt.

Vorteile des schrittweisen Rechnens

Der Charme des schrittweisen Rechnens liegt darin, dass es unabhängig vom Zahlenmaterial der jeweiligen Aufgabe anwendbar ist. Hilfsauf-



gaben wie etwa bei $4+9$ der Vor- und Zurücksprung am Rechenstrich „erst plus 10, dann minus 1“ führen zwar schnell zum Ziel, wenn das grundlegende Verständnis vorhanden ist. Bei Aufgaben wie $4+7$ bieten sie hingegen ebenso wie die Strategie *Vereinfachen* keinen Rechenvorteil, weil diese Strategien abhängig vom Zahlenmaterial der jeweiligen Aufgabe sind.

Die Strategie *schrittweise Rechnen* ist unabhängig vom jeweiligen Zahlenmaterial und sollte daher als grundlegende Strategie von allen Kindern im Anfangsunterricht erworben werden. Dies schließt ausdrücklich Kinder mit besonderen Schwierigkeiten beim Rechnenlernen ein. Für diese Kinder ist es eine Entlastung, eine Strategie zu kennen, die bei jeder Aufgabe anwendbar ist und sicher zum Ziel führt.

Auch im erweiterten Zahlenraum ist das schrittweise Rechnen eine geeignete Strategie, die alle Kinder lernen sollten, denn sie ist leicht fortsetzbar und auch weniger fehleranfällig als die Strategie „Stellenwerte extra“ bzw. „stellenweise“, wie u. a. die Studie von Benz (2005) belegt.

Der Weg vom Zählen zum Rechnen: Unterschieden in Lerngruppen begegnen

Das Rechnenlernen ist prinzipiell für alle Kinder strukturell gleich. Erhebliche individuelle Unterschiede ergeben sich jedoch in Bezug auf den Grad der Anstrengung und die Zeit, die dazu benötigt wird. Ein Teil der Kinder nimmt die fachlichen Hürden kaum wahr, ein anderer Teil kann sie mit etwas Unterstützung und Übung überwinden, und für eine weitere Gruppe von Kindern stellen die fachlichen Ansprüche eher Mauern dar, für deren Überwindung diese Kinder sehr viel Unterstützung, Übung und Zeit benötigen.

Auch der Startpunkt ist für alle Kinder im Wesentlichen gleich. Jedes Kind ist zunächst ein zählender Rechner. „Das zählende Rechnen ist ein wichtiger Lernschritt bzw. eine zielführende Strategie, mit der Additions- und Subtraktionsaufgaben gelöst werden können, und trotzdem kann diese Strategie weitere Entwicklungen behindern“ (vgl. Wartha/Schulz 2012, S. 43).

Erhebliche individuelle Unterschiede ergeben sich in Bezug auf den Zeitpunkt, zu dem Kinder von sich aus Zählstrategien einsetzen, um kontextgebundene Aufgaben wie $3+5$ zu lösen, und wie schnell und mit welchem Unterstützungsgrad sie dafür welche Zählstrategie verwenden (vgl. dazu Benz u. a. 2015, S. 126 ff.).

Mit größer werdendem Zahlenraum wird das zählende Rechnen jedoch ab dem zweiten Schuljahr zunehmend problematisch, weil es aufgrund des Umfangs, in dem nun (weiter-)gezählt werden muss, zunehmend fehleranfällig und zeitraubend ist. Daher sollten bereits im ersten Schuljahr

heuristische Strategien als tragfähige Alternative angebahnt werden.

Auch die universelle Strategie *schrittweise Rechnen* erfordert Vorläuferfähigkeiten. So muss der Abstand vom ersten Summanden bis 10 gesehen werden, die Kinder müssen also bis 10 ergänzen können. Außerdem muss die Ergänzung in Zusammenhang mit der Zerlegung des zweiten Summanden gesehen werden. Dieser muss so zerlegt werden, dass eine der Zerlegungszahlen gerade die Ergänzung bis zur 10 in Bezug auf den ersten Summanden darstellt. Man merkt schon an der Beschreibung, dass dies nicht trivial ist und gut vorbereitet sein will. Die gute, weil grundsätzlich immer zielführende Strategie *schrittweise* kann nur nicht zählend angewandt werden, wenn die Zerlegungen der Zahlen bis 10 automatisiert sind.

Voraussetzungen für das Rechnenlernen

Um Rechenkompetenzen aufzubauen und verschiedene heuristische Strategien entwickeln und einsetzen zu können, brauchen Kinder Vorläuferfähigkeiten. Dies sind vor allem solide Zählkompetenzen, die Fähigkeit zur strukturierten Zahauffassung sowie Einsicht in die Zerlegbarkeit von Zahlen im Sinne des Teil-Ganzes-Verständnis. Diese drei Aspekte werden im Folgenden im Hinblick auf das (schrittweise) Rechnen genauer betrachtet.

Zählkompetenzen

Das sichere Zählen im Zahlenraum bis mindestens 20 ist für die weitere Entwicklung von Zahlverständnis und für das erste Rechnen unverzichtbar. Diesbezüglich zeigen Kinder am Schulanfang sehr heterogene Kompetenzen. Das Leistungsspektrum reicht vom sicheren Zählen z. T. weit über 100 hinaus bis hin zu Unsicherheiten oder Schwierigkeiten bei der Eins-zu-eins-Zuordnung, der Kenntnis der Zahlwörter und/oder der Einhaltung der Zahlwortfolge selbst im Zahlenraum bis 10.

Regelmäßige Zählübungen im Anfangsunterricht unterstützen Kinder dabei, ihre Zählkompetenzen auf- und auszubauen bzw. diese zu konsolidieren. Eine natürliche Differenzierung ist über die Begrenzung oder Ausweitung des Zahlenraums, abhängig von den jeweiligen individuellen Ausgangsvoraussetzungen, leicht zu realisieren.

Die Bedeutung des sicheren Zählens für die Entwicklung des Rechnens legen im deutschsprachigen Raum Untersuchungen von Moser Opitz nahe, die bei rechenschwachen Fünft- und Achtklässlern und -klässlerinnen massive Probleme beim Vor- und Rückwärtszählen sowie beim Zählen in Schritten im Zahlenraum bis 1000 festgestellt hat (vgl. Moser Opitz 2007, S. 186 ff.). Um

Rechenstrategien im Anfangsunterricht

Rechenstrategien sind immer abhängig von der Rechenoperation, ihren Gesetzmäßigkeiten und deren Kenntnis sowie vom Zahlenmaterial der Aufgabe. Sie sind immer subjektiv gefärbt im Sinne von „eher leicht/eher schwer für mich“. Folgende Rechenstrategien bieten sich im Anfangsunterricht für Addition und Subtraktion an.

Die Lehrkraft sollte alle Strategien kennen, die Kinder mindestens eine, nämlich das schrittweise Rechnen, das – unabhängig vom Zahlenmaterial der jeweiligen Aufgabe – immer zielführend ist.

Schrittweise rechnen

bedeutet aus Sicht der Kinder: *Zerlege die zweite Zahl. Erst bis zur 10 und dann weiter.*

$$7 + 9 = 7 + 3 + 6$$

$$14 - 6 = 14 - 4 - 2$$

Voraussetzungen:

- 10 als „Anker-Zahl“ erkennen
- Ergänzen bis 10 bzw. den Abstand zur 10 „sehen“
- Zerlegen aller Zahlen bis 10 auswendig wissen

Vereinfachen

bedeutet aus der Sicht der Kinder: *Nutze die Kenntnis einer bereits auswendig gewussten Aufgabe oder leicht zu rechnenden Aufgabe mit dem gleichen Ergebnis.*

$$7 + 9 = (7 + 1) + (9 - 1) = 8 + 8 \text{ oder } 14 - 9 = (14 + 1) - (9 + 1) = 15 - 10$$

$$7 + 9 = (7 - 1) + (9 + 1) = 6 + 10$$

Die beiden Summanden werden **gegensinnig** verändert. Minuend und Subtrahend werden **gleichsinnig** verändert.

Voraussetzungen:

- Zahlbeziehung erkennen, d. h. die mögliche Vereinfachung der Aufgabe „sehen“
- die vereinfachte Aufgabe ist bereits automatisiert

Hilfsaufgabe nutzen

bedeutet aus der Sicht der Kinder: *Nutze eine einfachere Hilfs- bzw. Nachbaraufgabe und korrigiere entsprechend.*

$$7 + 9 = 7 + 10 - 1 \text{ oder}$$

$$14 - 9 = 14 - 10 + 1$$

$$7 + 9 = 7 + 7 + 2$$

Der sog. „Tipp für die 9“ verweist auf diese Strategie. Statt der 9 wird ein Zehner addiert bzw. subtrahiert und dann jeweils ein Einer subtrahiert bzw. addiert.

Voraussetzungen:

- die besondere Rolle der 10 im Stellenwertsystem erkennen
- passend ausgleichen können

Ergänzen (bei Subtraktionsaufgaben)

bedeutet aus Sicht der Kinder: *Eine Subtraktionsaufgabe als Umkehraufgabe mit Addieren lösen.*

$$16 - 14 = 2, \text{ denn } 14 + 2 = 16$$

Voraussetzungen:

- die Nähe von Minuend und Subtrahend erkennen
- Addition als Umkehrung der Subtraktion deuten
- über die Grundvorstellung „Subtraktion als Ergänzen“ verfügen

Analogieaufgabe nutzen

bedeutet aus Sicht der Kinder: *Im zweiten Zehner wie im ersten Zehner rechnen.*

$$14 + 2 = 16,$$

$$\text{denn } 4 + 2 = 6$$

und noch 1 Zehner

$$17 - 3 = 14,$$

$$\text{denn } 7 - 3 = 4$$

und noch 1 Zehner

Voraussetzungen:

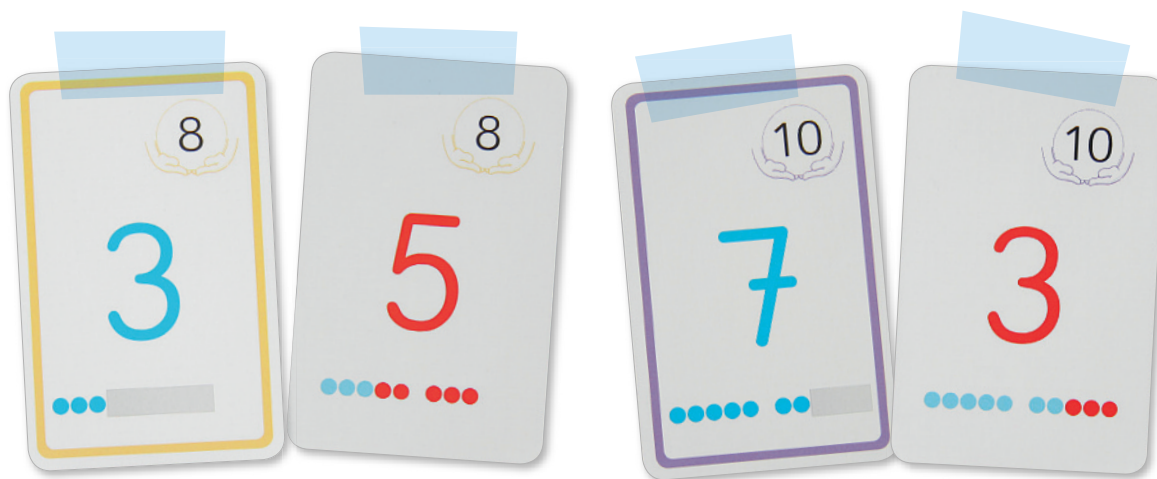
- Analogien erkennen
- Stellenwertverständnis

nicht zählende Rechner zu bleiben, brauchen Kinder offenbar solide Zählkompetenzen. Im deutschen Mathematikunterricht wird das Zählen im Vergleich zum anglo-amerikanischen Sprachraum oder den skandinavischen Ländern ab Klasse 2 und 3 kaum oder nur wenig geübt.

Strukturierte Zahlauffassung

Ohne Kompetenzen zur simultanen und strukturierten Zahlauffassung ist eine Ablösung vom zählenden Rechnen gerade auch in Bezug auf den Umgang mit Veranschaulichungsmaterialien fast unmöglich (siehe dazu auch den Beitrag auf S. 10–13). Soll zum Beispiel die Aufgabe $7 + 8$ am Zwanzigerrahmen gerechnet werden

(siehe Abb. 1), so soll der Lernende in der Lage sein, sieben Kugeln mit einer Handbewegung, d. h. nicht zählend, unter Nutzung der Fünferstruktur des Materials nach links zu verschieben, um dann weiterhin nicht zählend drei weitere Kugeln bis zu 10 zu ergänzen und dann die restlichen 5 Kugeln mit einer dritten Handbewegung ebenfalls gleichzeitig nach links zu verschieben. Die volle Zehnerreihe und die 5 Einer werden dann quasisimultan als 15 wahrgenommen. Grundlegend für dieses Vorgehen ist die Fähigkeit, in einer Gesamtmenge Strukturen zu erkennen (oder zu bilden), mit deren Hilfe die Gesamtanzahl in kleinere Teilmengen zerlegt bzw. einzelne Objekte zu neuen Einheiten zusammengesetzt werden.



2 Die „Zehnerfreunde“ 7 und 3 sowie die „Achterfreunde“ 3 und 5: Mit den Karten lassen sich Zahlzerlegungen spielerisch üben.

Einsicht in die Zerlegbarkeit von Zahlen

Die Fähigkeit, Zahlen aus anderen Zahlen zusammensetzen zu können, ist nach Resnick (1983) eine zentrale gedankliche Leistung, die als Teil-Ganzes-Verständnis bezeichnet wird. Zahlzerlegungen sollten im Unterricht intensiv erarbeitet und geübt werden. Nach der grundsätzlichen Einsicht in die Zerlegung von Zahlen – z. B. durch das Werfen von Wendeplättchen – gilt es, die entsprechenden Zerlegungen so gut wie individuell möglich zu automatisieren. Ein geeignetes Material dafür sind die Zerlegungskarten (Peter-Koop/Rottmann 2013, siehe Abb. 2), die auf das spielerische Einüben der Zahlzerlegungen in Form von „Zahlenfreunden“ zielen. Die Karten können als Einzel- oder Partnerübung eingesetzt werden.

Kinder mit geringem Arbeitsgedächtnis, die erhebliche Schwierigkeiten beim Memorieren zeigen, profitieren hinsichtlich der Entwicklung ihrer Rechenfertigkeiten davon, wenn sie auf die päckchenweise Darstellung der Zahlenfreunde zu den Zahlen bis 10 zurückgreifen können. Dazu können diese z. B. unter einer durchsichtigen Folie auf den Tisch geklebt werden, so dass sie für das Kind immer zugänglich sind.

Prävention ist besser als Therapie

Das zählende Rechnen ist neben mangelndem Stellenwert- und Operationsverständnis eines der Hauptsymptome für Rechenschwierigkeiten. Häufig ist es Kindern im Unterricht nicht gelungen, die entsprechenden Voraussetzungen aufzubauen. Hilft man ihnen diese Fähigkeiten zu entwickeln, gelingt es ihnen meist erstaunlich schnell, nicht zählende Rechenfertigkeiten anzuwenden.

Besser jedoch als spezielle (außer-)schulische Förderprogramme ist die Prävention im Unterricht. Hier spielt auch das Lehrwerk eine erhebliche Rolle. Gute Mathematikschulbücher bauen die oben beschriebenen Voraussetzungen systematisch auf und entwickeln sie. Sie schaffen so die mathematischen Voraussetzungen, bevor das eigentliche Rechnen beginnt.

In einem guten mathematischen Anfangsunterricht werden Kinder neben dem Auf- und Ausbau von Zählfertigkeiten gemäß ihrem individuellen Entwicklungsstand herausgefordert, nicht zählende Strategien unter Nutzung struktureller Anzahlerfassung und -darstellung und bereits auswendig beherrschter Zahlzerlegungen und Grundaufgaben einzusetzen. Ein empirischer Vergleich der rechnerischen Entwicklungsverläufe von Kindern zeigt, „dass ein Wechsel vom Ableiten einer Aufgabe Mitte des ersten Schuljahrs zum Auswendigwissen signifikant öfter erfolgt als ein Wechsel von einer Zählstrategie zum Auswendigwissen“ (Gaidoschik 2010, S. 511). ■

Die Autorin

Dr. Andrea Peter-Koop ist Professorin am Institut für Didaktik der Mathematik an der Universität Bielefeld.

Literatur

- **Benz, Christiane:** Erfolgsquoten, Rechenmethoden, Lösungswege und Fehler von Schülerinnen und Schülern bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 100. Hildesheim 2005
- **Benz, Christiane/Peter-Koop, Andrea/Grüßing, Meike:** Frühe mathematische Bildung. Berlin 2015
- **Gaidoschik, Michael:** Wie Kinder rechnen lernen oder auch nicht. Eine empirische Studie zur Entwicklung von Rechenstrategien im ersten Schuljahr. Frankfurt/Main 2010
- **Moser Opitz, Elisabeth:** Rechenschwäche/Dyskalkulie. Bern 2007
- **Peter-Koop, Andrea/Rottmann, Thomas:** Zahlenwerkstatt 1, Zerlegungskarten. Braunschweig 2013
- **Resnik, Lauren:** A Developmental Theory of Number Understanding. In: Herbert Ginsburg (Hg.): The Development of Mathematical Thinking, New York 1983, S. 109–151
- **Wartha, Sebastian/Schulz, Axel:** Rechenproblemen vorbeugen. Berlin 2012