

Silke Ruwisch

Keine Zahl steht für sich allein

Von direkten zu relationalen Zahlvorstellungen

Die meisten Kinder bauen schon vor der Schule Vorstellungen zu der Reihenfolge von Zahlen und von Anzahlen auf: Was kommt nach 3? Wie viele Finger sind es? Im Mathematikunterricht müssen Zahldarstellungen und -vorstellungen dann bewusst thematisiert und systematisiert werden, um zum einen die ersten Vorstellungen anzureichern und zum anderen den Umbau von direkten, noch unverbundenen zu strukturierten und relationalen Vorstellungen anzuregen.

Kinder begegnen Zahlen zunächst verbal als Ordinalzahlen: Das Aufsagen der ersten Zahlwörter beim Verstecken-Spielen ist allerdings noch mit dem Aufsagen eines auswendig gelernten Gedichts zu vergleichen und lässt nicht auf eine Vorstellung von Zahlen schließen. Auch wenn Kinder die ersten kardinalen Aussagen machen, wenn sie zum Beispiel drei Finger hochhalten, um das eigene Alter anzugeben, vergeben sie im Prinzip nur eine Art Label, weisen sich also eine Eigenschaft zu und verbinden damit noch keine Vorstellung von Anzahlen.

Kardinale und ordinale Zahlvorstellungen

Auch wenn wir bei den oben beschriebenen frühen Begegnungen mit Zahlen noch nicht von Zahlvorstellungen der Kinder ausgehen können, werden doch schon zwei für die Zahldarstellung und Zahlvorstellung wichtige Zahlaspekte deutlich: der linear-ordinale und der kardinale Aspekt, die beide zum Ab- und Auszählen konstruktiv miteinander verbunden werden müssen. Beide Zahlaspekte spielen eine wesentliche Rolle beim Ausbau der ersten Zahlenräume: Nach 3 kommt 4 und vor 8 steht 7. Vorgänger und Nachfolger geben an, an welcher Position eine Zahl in der gesamten Zahlenreihe sich befindet. Während am Anfang noch die einzelne Zahl für die Kinder im Vordergrund steht, wird im Verlauf der Grundschulzeit die Position in Beziehung zu anderen Zahlen immer wichtiger: Ist 178 näher an 170 oder an 180? Ist sie näher an 100 oder 200? Auch für kardinale Vorstellungen gilt:

Je größer die Zahlen, umso mehr verliert die Einzelzahl an Bedeutung und umso wichtiger werden Strukturen und Beziehungen. Für Mengen bis zu einer Anzahl von 10 oder 20 kennen wir viele Repräsentanten. Aber haben Sie genauso reichhaltige kardinale Vorstellungen zu 283? Als Lehrkraft werden Sie vielleicht das Bild von zwei Hunderterplatten, acht Zehnerstangen und drei Einerwürfeln hervorrufen, aber damit haben Sie schon eine Strukturierung in die Stellenwerte vorgenommen. 283 Einerwürfel sind dagegen nicht vorstellbar, jedenfalls nicht in dem Sinne, dass diese Anzahl auch nur ansatzweise von anderen Anzahlen unterschieden werden kann.

Direkte und relationale Zahlvorstellungen

Es hat sich als hilfreich erwiesen, zwischen direkten und relationalen Zahlvorstellungen zu unterscheiden, weil so unterschiedliche Sichtweisen deutlich werden und weil sich direkte und relationale Zahlvorstellungen in ihrer Anwendbarkeit und Flexibilität unterscheiden. Dennoch sind die Übergänge fließend, wie die Beispiele verdeutlichen werden.

Direkte Zahlvorstellungen zu kleinen Zahlen

Direkte Zahlvorstellungen beziehen sich zunächst auf kleine Anzahlen: So fallen uns zur Zahl 6 viele verschiedene



1 Serins Ideen zur Sechs: Sie berücksichtigt verschiedene Zahlaspekte und stellt auch schon Beziehungen dar.

Bilder ein, die auch im Anfangsunterricht im Zahlenalbum (vgl. Geering 1994) die Seite zur „6“ schmücken können (Abb. 1). Wie die Beispiele auf Serins Doppelseite deutlich werden lassen, hat das Mädchen unterschiedliche Repräsentanten für 6 gefunden. (Indem sie 6 zerlegt, verdoppelt oder im Rechenpäckchen einsetzt, beschreibt sie auch bereits Beziehungen zu anderen Zahlen.)

Werden Zahlen der Reihe nach aufgeschrieben oder wird die Zahlwörterfolge aufgesagt und somit der ordinale Zahlaspekt betont, sind Zahlvorstellungen anfangs oft ebenfalls noch konkret und direkt: Auch wenn mehrere Zahlen aufgeführt werden – Serin schreibt die Zahlen von 0 bis 9 –, wird mit „sechs“ eher die konkrete, geschriebene „6“ an ihrem festen Platz assoziiert, als dass der Fokus auf den Zusammenhängen zwischen den Zahlen läge.

Zahlvorstellungen zu großen Zahlen

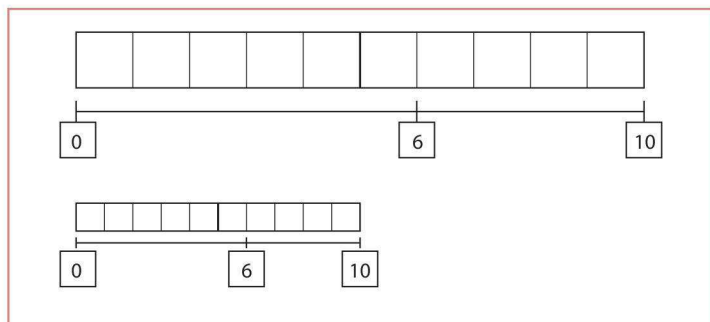
Auch zu ausgewählten größeren Zahlen bilden wir im Laufe der Zeit direkte Zahl- und Größenvorstellungen aus: 1000 Tage – ca. 3 Jahre; 1000 1-Cent-Münzen – ungefähr 2,5 Kilogramm, so viel wie ein Sack Kartoffeln. Zwar haben Kinder hier ganz unterschiedliche persönliche Vorlieben, doch sollten insbesondere die Zehnerpotenzen im Unterricht thematisiert werden. Durch entsprechende Anregungen lassen sich zu 100 oder 1000 direkte Zahl- und Größenvorstellungen entwickeln (s. **Kasten**), die dann – und dies zeichnet 100 und 1000 gegenüber anderen, individuell gewählten Zahlen aus – als rechnerisch einfach

handhabbare Stützpunkte und Vergleichswerte dienen können.

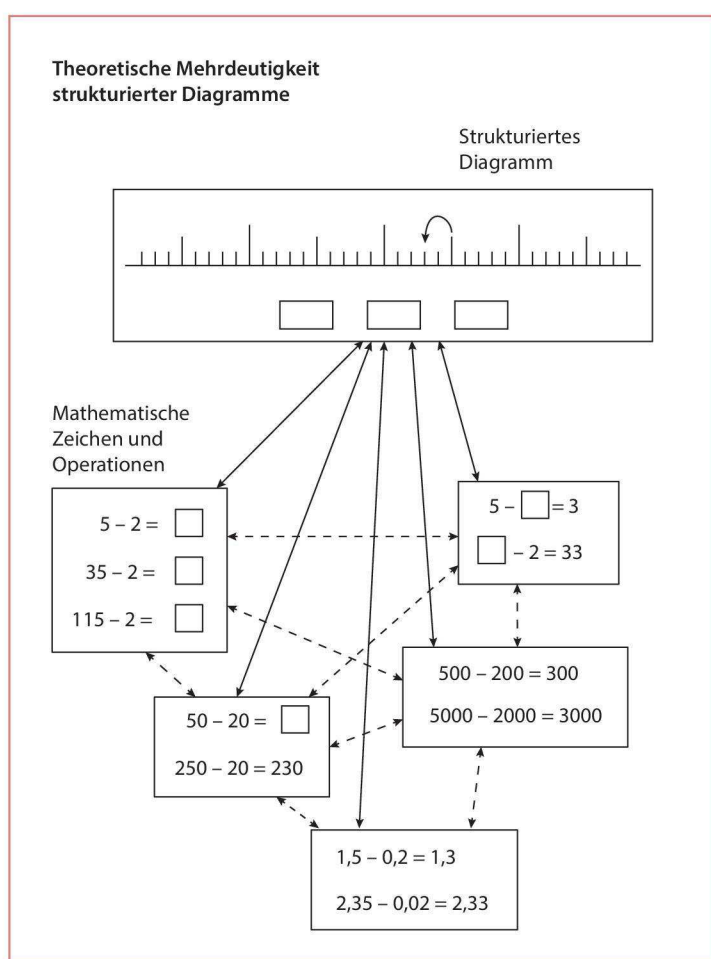
Weitaus häufiger stellen wir uns jedoch „unvorstellbar große“ Zahlen *indirekt* vor, indem wir sie aus vorstellbaren Zahlen und Größen zusammensetzen, sie uns quasi portionieren: Wie viel sind eigentlich 1000 Kinder? – 25 Kinder in einer Klasse, 100 Kinder in einem Jahrgang, 400 Kinder

Wie viel ist 1000?

- Wie hoch ist ein Turm aus 1000 1-Cent-Münzen?
- 1000 Autos stehen in einem Stau.
Wie lang ist der Stau?
- 1000 Kästchen im Rechenheft – wie viele Seiten?
- Über wie viele Seiten geht eine Geschichte mit 1000 Wörtern?
- 1000 Buchstaben in dem Buch, das du gerade liest: Wie viele Seiten sind das?
- Wie lange brauchst du für 1000 Schritte?
- Wie lang sind 1000 Sekunden, 1000 Minuten, 1000 Stunden, ...?
- Angenommen, du trinkst täglich einen halben Liter Milch. Wie lange brauchst du für 1000 Liter?
- Was kann man für 1000 Euro kaufen?
- Wie viel sind 1000 Kilogramm? Wie viele Kinder, wie viele Autos?
- 1000 Gummibärchen – wie viele Tüten?



2 Egal wie lang das Zahlenband insgesamt ist, beide Male liegt die 6 rechts von der Mitte.



3 Am Zahlenstrahl lassen sich viele Relationen erkennen, auch Analogien.

an einer Grundschule. 1000 Kinder also ungefähr die Kinder von zwei bis drei Grundschulen. Selbstverständlich sind die Schritte bei einem derartigen Hochhangeln abhängig von den eigenen Bezugsgrößen. Die Vorstellung wird eine andere sein, wenn man in einer einzügigen Dorfschule oder in Berlin an der sechsjährigen Grundschule unterrichtet.

Relationale Zahlvorstellungen

Das Zerlegen großer Zahlen in überschaubare und vorstellbare Mengen stellt bereits ein sehr elaboriertes Vorgehen zur Veranschaulichung von Zahlen dar. Dazu müssen multiplikative Zusammenhänge erkannt und genutzt werden. Überschlagendes Rechnen ist ebenso notwendig wie ein Gefühl für vorstellbare Mengen und deren Passfähigkeit zur Situation wie zur Ausgangszahl. Viele Beziehungen zwischen Zahlen und Größen, situative Bedingungen und die eigenen Vorstellungen sowie Rechenfähigkeiten müssen somit berücksichtigt werden.

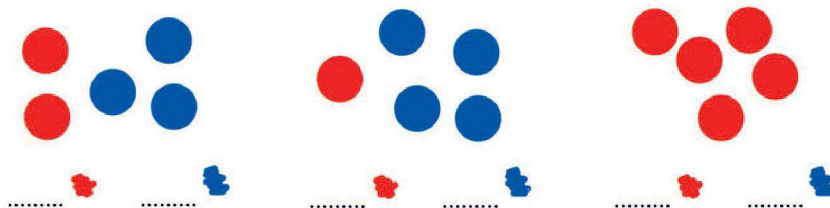
Doch Beziehungen zwischen Zahlen müssen nicht immer derart komplex sein. Weil relationale Zahlvorstellungen bei großen Zahlen unabdingbar werden, ist es sogar notwendig, sie bereits in kleinen Zahlenräumen zu thematisieren. Dabei sollten unterschiedliche Beziehungen fokussiert werden:

- Um *ordinale Relationen* zu betrachten, werden Zahlen und Positionen nicht einfach direkt zugeordnet. Wichtiger ist der (relative) Abstand der Zahlen zueinander. Je nach Skalierung kann die 6 das eine Mal doppelt so weit entfernt sein von der 0 wie das andere Mal, aber immer wird sie auf der Strecke von 0 bis 10 eine Position ein wenig rechts von der Mitte einnehmen (Abb. 2).

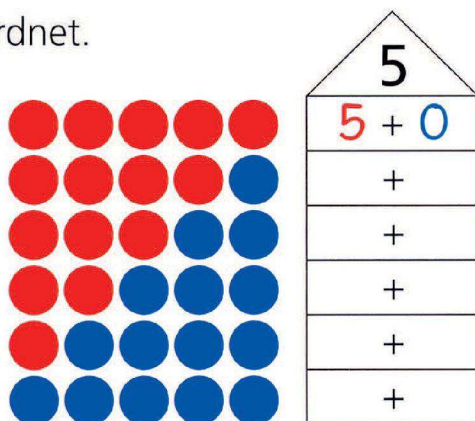
Wird diese Relativität bewusst und früh thematisiert, indem sie beispielsweise wie im Schulbuch „Mathematik“ (Lorenz 2000) in die Geschichte von Gulliver bei den Riesen und Zwergen eingebunden wird, können sich die Schülerinnen und Schüler allmählich von den direkten Vorstellungen lösen. Erst dann können der leere Rechenstrich sowie der Zahlenstrahl ihre Stärke als Denkwerkzeug entfalten und letztlich eine Vielzahl an Beziehungen und die strukturelle Ähnlichkeit der Zahlenräume verdeutlichen (Abb. 3). Wird der Zahlenstrahl dagegen in den ersten Schuljahren durchgehend mit allen Skalierungsstrichen und Zahlen verwendet, bleiben die Kinder einer direkten Vorstellung verhaftet und werden bei größeren Zahlen die Positionen lediglich zählend bestimmen.

- Bei der Untersuchung *kardinaler Beziehungen* geht es vor allem um Teil-Ganzes-Strukturen: Im kleinen Zahlenraum sollen alle Zerlegungen der Zahlen bekannt sein und genutzt werden, auch die Zusammenhänge zwischen den Zerlegungen. Während beim „Plättchen werfen“ Zerlegungen zufällig entstehen, können Beziehungen systematisiert und

Immer 5



Lege geordnet.



4 Teil-Ganzes-Beziehungen
zufällig und systematisch.

Vollständigkeit der Zerlegungen erreicht werden, indem man beispielsweise ausgehend von fünf roten Wendepfättchen ($5 + 0$) nach und nach immer ein Pfättchen umdreht und dadurch zu den Zerlegungen $4 + 1$, $3 + 2$, $2 + 3$, $1 + 4$ und $0 + 5$ kommt (Abb. 4).

Bei größeren Zahlen ist als kardinale Teil-Ganzes-Beziehung vor allem die Zerlegung in die Vielfachen der Zehnerpotenzen zu thematisieren. Insbesondere das Dienes-Material ist für die Erarbeitung dieser Zahlvorstellung hilfreich, da es die Strukturen hervorhebt (vgl. „Wenn Zahlen nicht begreifbar werden“ auf S. 20). Auf der enaktiven Ebene kann so das Verständnis für das dezimale Stellenwertprinzip aufgebaut werden. Zwar können zunächst beliebig viele Hunderterplatten, Zehnerstangen oder Einerwürfelchen gelegt werden, aber notieren lassen sich nur maximal neun gleichartige Objekte. Sobald es zehn oder mehr Stangen sind, werden diese zu einer neuen Hunderterplatte zusammengefasst – es wird gebündelt.

- Sowohl die fortgesetzte Bündelung als auch das *Stellenwertprinzip* – die Ziffer 2 bedeutet an der Zehnerstelle 20, an der Hunderterstelle 200 und an der Einerstelle 2, obwohl sie immer gleich aussieht – sind unabdingbar, um das Notationssystem unserer Zahlen zu verstehen. Erst wenn diese Prinzipien gesichert sind, ist es sinnvoll, auf der symbolischen Ebene Beziehungen zwischen Zahlen zu betrachten und beispielsweise Auswirkungen von

Veränderungen einzelner Ziffern zu untersuchen. Werden in einer Stellentafel Pfättchen verschoben, dann handelt es sich um ausgesprochen abstrakte Zahlmanipulationen: Ein und dasselbe Pfättchen bekommt durch das Verschieben einen anderen Wert. Hier wird also keineswegs eine handlungsgebundene Zahlvorstellung erzeugt, sondern eine ausgesprochen abstrakte, rein mentale Betrachtung vorgenommen. Als Vorbereitung für Vorstellungen auf symbolischer Ebene eignen sich Untersuchungen der Zahlen und ihrer Ziffern an der Hundertertafel. Über die Spalten und Zeilen kann der Blick auf die Zehner- und Einerstellen gelenkt werden, gleichzeitig sind an der Hundertertafel die Positionen der Zahlen erkennbar. Analogien werden noch einmal anders wahrgenommen. Die beiden Vorstellungen „3, 13, 23, 33, ... als Weg auf der Hundertertafel“ oder „3, 13, 23, 33, ... als drei Einer liegen da und es wird immer eine Zehnerstange mehr dazugelegt“ sind gleich wichtig. Zusammen ergeben sie ein runderes Bild.

Geering, P.: Erste Mathematik mit dem Zahlenalbum. In: Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe 11/1994, S. 511–517.

Lorenz, J. H. (Hrsg.): Mathematikus 1. Westermann, Braunschweig 2000.

Steinbring, H.: Die Verwendung strukturierter Diagramme im Arithmetikunterricht der Grundschule. In: Mathematische Unterrichtspraxis, IV. Quartal 1994, S. 7–19. Online im Internet: <http://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DocumentServlet?id=19600> (zuletzt aufgerufen am 2.3.2015).