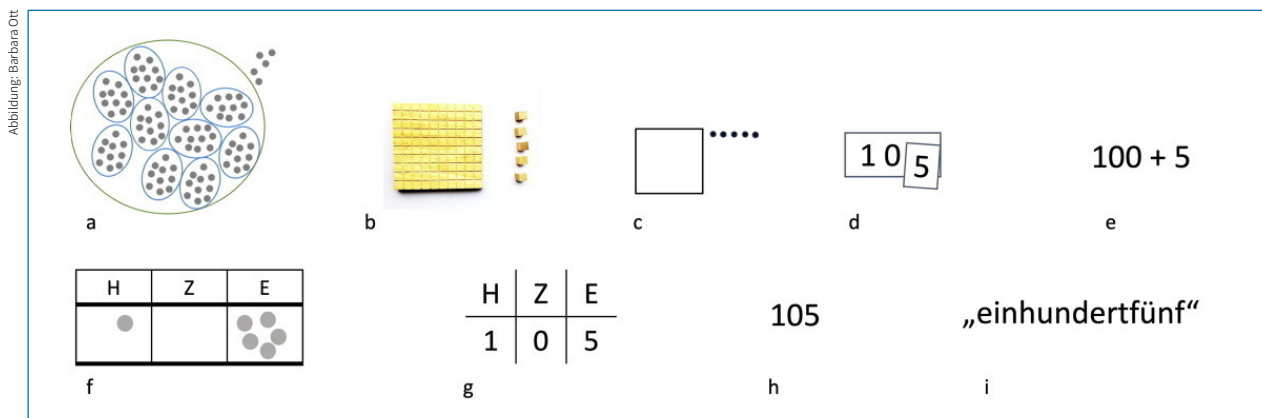


Erstellen, manipulieren, kommunizieren

Tätig sein an und mit mathematischen Darstellungen

Mathematisches Darstellen ist ein wesentliches Element des Mathematikunterrichts. Es umfasst Darstellungsaktivitäten ebenso wie die Kommunikation darüber. Die Aktivitäten hängen von den jeweiligen Darstellungen ab und müssen von den Kindern gelernt werden. Das geschieht in einer Praxis des Umgangs mit Darstellungen und der Reflexion darüber.



•• Abb.1: Verschiedene mathematische Darstellungen zur Zahl 105: Jede folgt anderen Regeln

von Barbara Ott und Christof Schreiber

Darstellungen und Mathematik sind untrennbar miteinander verbunden. Schon in der Altsteinzeit wurden Anzahlen in Form von Einkerbungen auf Knochen oder Hölzern festgehalten. Die Menschen schufen auf diese Weise Zeichen und begannen, mathematische Überlegungen anzustellen. Von unterschiedlichsten Darstellungen für Mengen kam es zu den Ziffern und zu unserem Dezimalsystem.

Heute führen die Bildungsstandards und Lehrpläne für Mathematik in verschiedenen Ländern das Darstellen als eine prozessbezogene Kompetenz des Mathematiklernens an. In den deutschen Bildungsstandards heißt es dazu: „Diese Kompetenz umfasst das Erzeugen und Vernetzen von sowie das Umgehen mit mathematischen Darstellungen“ (vgl. KMK 2022, S. 12).

Mathematische Darstellungen

Mathematische Darstellungen sind wahrnehmbar – sei es als Arbeitsmittel, als Grafik, als Term, auf dem Papier oder auf einem Bildschirm. Auch gesprochen oder gestisch können Darstellungen verwendet werden. Wesentlich für mathematische Darstellungen ist, dass

ihre einzelnen Elemente in Beziehung zueinander stehen und es Regeln für den Gebrauch gibt. Diese Regeln bestimmen, wie eine mathematische Darstellung erstellt wird, wie mit ihr gearbeitet werden kann und wie sie zu lesen ist – die Regeln bilden sozusagen eine Art Bedienungsanleitung oder Lesart (vgl. Ott 2023). Das gilt für alle mathematischen Darstellungen, also z. B. für Terme wie „ $100 + 5$ “ oder auch für didaktisches Material wie z. B. das Dienes-Material.

Damit Lernende eine mathematische Darstellung als solche deuten, mit ihr arbeiten oder sie erstellen können, müssen sie die Regeln der jeweiligen Darstellung kennen und anwenden. Abbildung 1 zeigt verschiedene mathematische Darstellungen zur Zahl 105.

Mathematisches Tätigsein

Die Regeln für den Gebrauch sind für die verschiedenen mathematischen Darstellungen unterschiedlich. Damit unterscheidet sich auch das mathematische Tätigsein der Lernenden. In Termen, wie beispielsweise dem Term „ $100 + 5$ “, wird die additive Beziehung durch das Plus-Zeichen explizit deutlich. Die Regeln für den Gebrauch dieses Zeichens müssen erlernt werden, damit die Darstellung als mathematische Darstellung

gelesen und gebraucht werden kann. Gleichzeitig ist regelhaft festgelegt, dass diese Darstellung der Reihe nach notiert und von links nach rechts gelesen wird.

Im Gegensatz dazu werden bei mathematischen Darstellungen mit grafischen Anteilen oder bei didaktischen Materialien die Beziehungen nicht notwendig durch zusätzliche Zeichen wie z. B. dem Pluszeichen explizit deutlich, sondern implizit durch Anordnungen von einzelnen Elementen der Darstellung. So sind beim Dienes-Material (siehe Abb. 1b) beispielsweise 100 Klötzchen als 10x10-Platte angeordnet oder zehn Klötzchen als Stab. Bei der Mengendarstellung in Abbildung 1a werden Einkreisungen verwendet, um die Anordnung deutlich zu machen. Das könnte auch durch räumliche Gruppierungen oder gestisch dargestellt werden.

Diese grafischen Darstellungen oder Materialdarstellungen sind nicht auf ein Notieren oder Lesen von links nach rechts angewiesen. Es kann jedoch, wie beispielsweise beim Dienes-Material, didaktisch durchaus Sinn ergeben und als Konvention festgelegt werden. In der Anordnung des Materials nutzt man dann zusätzlich zu der materialeigenen Struktur Regeln einer anderen Darstellung, nämlich der Notation als Zahl 105.

Unsere Ziffernotation von Zahlen nutzt auch Anordnungen, um Beziehungen deutlich zu machen. So enthält die Stellung der Ziffer innerhalb der Zahl eine wesentliche Information über ihren Wert. Dabei berücksichtigt sie weitgehend das Prinzip, von links nach rechts der Reihe nach gelesen zu werden. Allerdings ist im Deutschen das Lesen von Zehnern und Einern invers, wir sprechen also zuerst die Einer und dann die Zehner, z. B. „vierundfünfzig“ bzw. 54.

Die Lernenden müssen die Regeln für den Gebrauch jeder mathematischen Darstellung erlernen und zwar im Umgang mit diesen Darstellungen. Indem sie selbst mathematisch tätig sind, Darstellungen erstellen und manipulieren und immer wieder beobachten, was durch die Manipulationen passiert, setzen sie sich mit den Regeln für den Gebrauch auseinander und werden damit vertraut. Auch in den Bildungsstandards werden diese mathematischen Tätigkeiten benannt: „Das Spektrum reicht von Anwenden, Interpretieren und Unterscheiden ... bis hin zum Erstellen eigener Darstellungen“ (vgl. KMK 2022, S. 12).

Manipulationen an Darstellungen können unterschiedliche Auswirkungen haben. Bei Materialdarstellungen und manchen grafischen Darstellungen verändert sich die Ausgangssituation durch die Manipulation. Das, was manipuliert wurde, ist nicht mehr in derselben Form vorhanden, sondern nach der Manipulation ist ein anderes Ergebnis zu sehen. Wird z. B. beim Dienes-Material in Abb. 1b ein Zehner entfernt (und dazu der Hunderter entbündelt), ist die jetzige Darstellung nicht mehr zu sehen.

Auch durch Gesten – wie beispielsweise Einkreisungen mit dem Finger – kann dargestellt werden (Huth 2023). Gesten sind sehr flexibel, aber eher nur flüchtig verfügbar. Werden sie in vergleichbarer Form als Darstellung wiederholt verwendet, also beispielsweise immer dieselbe Einkreisung mit dem Finger, erhalten

auch sie eine gewisse Beständigkeit. Manchmal bereiten Gesten auch andere Darstellungen vor, z. B. eine schriftliche Darstellung. Solche Bilder oder Notizen auf Papier wiederum sind stärker fixiert und beständig. Mit Gesten können dann die Regeln der jeweiligen Darstellung angezeigt werden.

Kommunikation über Darstellungen

Für eine Praxis des Umgangs mit mathematischen Darstellungen ist neben dem mathematischen Tätigsein beim Erstellen, Manipulieren und Beobachten von Darstellungen auch die Kommunikation über die mathematischen Darstellungen, deren Gebrauch und das mathematische Tätigsein wesentlich (Ott 2023). Die Beobachtungen werden so für alle zugänglich. Die Lernenden können ihre Interpretationen mit den Interpretationen und den Regeln anderer abgleichen und so nach und nach zu konventionalisierten Interpretationen kommen, d. h. die Regeln der mathematischen Darstellung und der möglichen Manipulationen verstehen. Gleichzeitig können sie sich so ihre Überlegungen selbst bewusst machen und sie strukturieren. Im Beispiel von Tabelle 1 arbeiten Samira, eine Schülerin am Anfang der zweiten Klasse, und Herr Wehrle mit Wendeplättchen am Zwanzigerfeld. Samira soll die Anzahl der gelegten Plättchen bestimmen.

Samira kommuniziert über die mathematische Darstellung am Zwanzigerfeld und begleitet ihr Tätigsein mit gesprochener Sprache und Gesten. Gleichzeitig ist sie mathematisch tätig, indem sie die Anzahl bestimmt und sich damit auseinandersetzt, wie sie die Anzahl bestimmen kann, ohne dabei zu zählen. Dabei nutzt sie durch das Material vorgegebene Strukturen. In ihrem mathematischen Tätigsein und der Kommunikation darüber kann Samira sich selbst verbessern, mit dem Material experimentieren und so unterschiedliche Möglichkeiten, wie das Material mathematisch gedeutet werden kann, erproben. Sie kann dabei ihr Vorgehen reflektieren und neue Möglichkeiten erproben.

Samira bezieht hier zwei mathematische Darstellungen aufeinander. Mündlich bewegt sie sich in den natürlichen Zahlen und bringt diese in ihrem mathematischen Tätigsein und der Kommunikation darüber mit dem Zwanzigerfeld in Verbindung. Das macht sie, indem sie ihre Lesart der Darstellung durch Gesten anzeigt. Das Herstellen von Zusammenhängen zwischen mathematischen Darstellungen ist eine in den Bildungsstandards Mathematik aufgeführte Kompetenz des mathematischen Darstellens (vgl. KMK 2022, S. 12). In jeder Darstellung werden mathematische Beziehungen deutlich.

Damit verschiedene Darstellungen nicht unverbunden bleiben, sondern Zusammenhänge zwischen ihnen hergestellt werden, müssen die Lernenden die innerhalb der jeweiligen Darstellungen bestehenden Beziehungen wahrnehmen und verstehen und diese wiederum aufeinander beziehen. In der Kommunikation müssen dabei auch Unterschiede zwischen den mathematischen Darstellungen besprochen werden. So wird beispielsweise für die unbesetzte Zehnerstel-

Herr Wehrle	(Herr Wehrle legt zu den bereits liegenden 13 Plättchen zwei dazu, während Samira die Augen geschlossen hat.) Und wie viele sind es jetzt?	
Samira	(Samira schaut einige Sekunden aufs Zwanzigerfeld und macht leichte Nickbewegungen mit dem Kopf.) Acht? Äh sechzehn?	
Herr Wehrle	Wieso sechzehn?	
Samira	(Samira zeigt von links nach rechts über die obere Plättchenreihe.) Ich habe hier gezählt, dass es acht ist. (Anschließend zeigt sie von links nach rechts über die untere Plättchenreihe.) Aber da kann es nicht acht sein, weil da müsste noch eins dazu. (Sie zeigt auf das Feld rechts neben den unteren sieben Plättchen.) Also ist es nicht sechzehn.	
Herr Wehrle	Sondern?	
Samira	(Samira schaut einige Sekunden aufs Zwanzigerfeld und macht leichte Nickbewegungen mit dem Kopf.) Fünfzehn?	
Herr Wehrle	Mhm. Hast du jetzt nachgezählt?	
Samira	Ja.	
Herr Wehrle	Wie könnte man das jetzt auch sehen, wie viele es sind, ohne dass man nachzählen muss?	
Samira	(Samira schiebt das rechts in der oberen Reihe liegende Plättchen neben das Zwanzigerfeld.) Zum Beispiel jetzt sind es sieben plus sieben gleich vierzehn. (Dabei macht sie eine kreisende Handbewegung über den auf dem Zwanzigerfeld liegenden Plättchen. Anschließend schiebt sie das vorher weggeschobene Plättchen wieder zurück an seinen ursprünglichen Platz.) Und eins dazu gleich fünfzehn.	

•• **Tabelle 1:**
Samira arbeitet am
Zwanzigerfeld und
soll die Anzahl der
Plättchen erkennen.

le bei der Zahl 105 in der Materialdarstellung kein Material verwendet (siehe Abb. 1a, b, c und f), in der Notation mit Ziffern muss explizit eine Null notiert werden (siehe Abb. 1d, g und h).

Fazit

Mathematische Darstellungen sind das, was während des mathematischen Tätigseins auf Papier, Bildschirmen, durch Gesten oder auch materiell fixiert werden kann. Sie können beständig oder auch nur vorübergehend verfügbar sein. Um mit mathematischen Darstellungen mathematisch tätig sein zu können, muss diese Praxis in der Schule eng mit der Kommunikation über die Darstellungen verbunden sein. Die Kommunikation kann Teil des Darstellens sein, kann aber auch Kommunikation über das Darstellen sein und Reflexion ermöglichen.

Mathematisches Darstellen ist für die Lernenden anspruchsvoll und sollte somit als eigener Lerngegenstand im Mathematikunterricht angemessen berücksichtigt werden. Ebenso ist das mathematische Darstellen hinsichtlich seiner Leistungsfähigkeit für das Mathematiklernen und -treiben eine nicht zu unterschätzende Kompetenz. Durch die Verwendung von Darstellungen können mathematische Einsichten gewonnen und Erkenntnisse festgehalten werden. ■

Literatur

Huth, M.: *Diagramme im Handumdrehen – der Gebrauch von Gesten beim Mathematiklernen*. DOI <https://doi.org/10.21248/gups.72106>, 2023

Kultusministerkonferenz: *Bildungsstandards für das Fach Mathematik. Primarbereich*. https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-Primarbereich-Mathe.pdf, 2022

Ott, B.: *Die Einbindung von Arbeitsmitteln im Support-Job Entwicklungsfortschritt bei der Ablösung vom zählenden Rechnen. Eine Analyse der Interaktion aus soziologischer und semiotischer Perspektive*. In: Brandt, B./Gerlach, K. (Hrsg.), *Mathematiklernen aus interpretativer Perspektive II*, New York 2023, S. 203–236

Die Autorin/der Autor



Foto: PHSG

Prof. Dr. Barbara Ott lehrt und forscht in der Didaktik der Mathematik am Institut Mathematische, Naturwissenschaftliche und Technische Bildan der Pädagogischen Hochschule St. Gallen.



Foto: Privat

Prof. Dr. Christof Schreiber lehrt und forscht an der Justus-Liebig-Universität in Gießen am Institut für Didaktik der Mathematik im Bereich Primarstufe.

• Anzeige





westermann
AKADEMIE

Seminare
die mich
weiterbringen!

▶ Aktuell

▶ Interaktiv

▶ Praxisorientiert

Neues
Seminar-
angebot

Finden Sie hier das passende Angebot:

www.westermann.de/akademie



westermann
Immer auf den Punkt

