

## Drinnen ist nicht Drumherum

Eine Gruppenexploration zum Zusammenhang zwischen Flächeninhalt und Umfang

Timo Leuders, Andrea Reischmann und Stefanie Zachmann

Flächeninhalt und Umfang sind Konzepte, die oft verwechselt werden. Dem kann man vorbeugen, indem man sie von Anfang an in Beziehung zueinander betrachtet und gemeinsam als Thema aufgreift. Von der 4. bis zur 10. Jahrgangsstufe gibt es dabei immer wieder etwas zu entdecken.

### Flächeninhalt und Umfang begreifen

Umfänge und Flächeninhalte gehören zu den ersten komplexeren geometrischen Größen, mit denen sich Schülerinnen und Schüler ab der dritten oder vierten Klasse befassen. Die beiden Größenbereiche „Länge“ und „Flächeninhalt“ haben den Vorteil, dass sie sich gut mit konkreten Erfahrungen verknüpfen lassen. Allerdings sind Flächeninhalte keine Größen mehr, die tagtäglich benötigt werden und für welche bei Kindern ein intuitiver Zugang schon von Anfang vorhanden ist. Das erkennt man schon daran, wie leicht Schülerinnen und Schüler jeder Altersstufe - und wohl auch manche Erwachsene - diese beiden Konzepte immer wieder durchein-

ander bringen. Daher muss die Vorstellung von Flächeninhalt und Umfang Schritt für Schritt entwickelt werden. Das Grundverständnis von Umfang und Flächeninhalt überprüft die in *Abb. 1* dargestellte Aufgabe aus dem PISA-2000-Feldtest.

Damit Schülerinnen und Schüler Sicherheit im Umgang mit den Beziehungen zwischen Umfang und Flächeninhalt gewinnen, ist es wesentlich, dass sie

- die beiden Begriffe möglichst oft in Beziehung zueinander verwenden und reflektieren und nicht etwa Flächeninhalt und Umfang nur separat voneinander behandeln,
- möglichst früh konkrete, handelnde Primärerfahrungen mit den Begriffen

sammeln können (Umfang  $\leftrightarrow$  Ausschneidelänge, Flächeninhalt  $\leftrightarrow$  Gewicht, Zahl der Legeplättchen usw.),

- vorstellungsbezogen und konkret mit den Begriffen und den Zusammenhängen zwischen ihnen umgehen und sie nicht auf den kalkülmäßigen Umgang reduzieren,
- die Zusammenhänge über alle Schuljahre hinweg immer wieder thematisieren und neue Beziehungen knüpfen (kumulatives Lernen).

In diesem Artikel machen wir einen Vorschlag, wie Schülerinnen und Schüler bereits im 4. bis 6. Schuljahr, wenn Konzepte der Flächenmessung und -berechnung noch gar nicht in der ganzen Breite bereit stehen, intensiv Zusammenhänge zwischen Flächeninhalt und Umfang explorieren können und wie in darauf folgenden Schuljahren das Thema wieder aufgegriffen und vertieft werden kann.

### Einstieg: Welches Zimmer ist größer?

Als „Anker“ für die gemeinsame Untersuchung von Flächeninhalt und Umfang in einer vierten bis sechsten Klasse braucht es ein Problem, das für Schülerinnen und Schülern zugänglich und herausfordernd zugleich ist. Eine hierzu oft

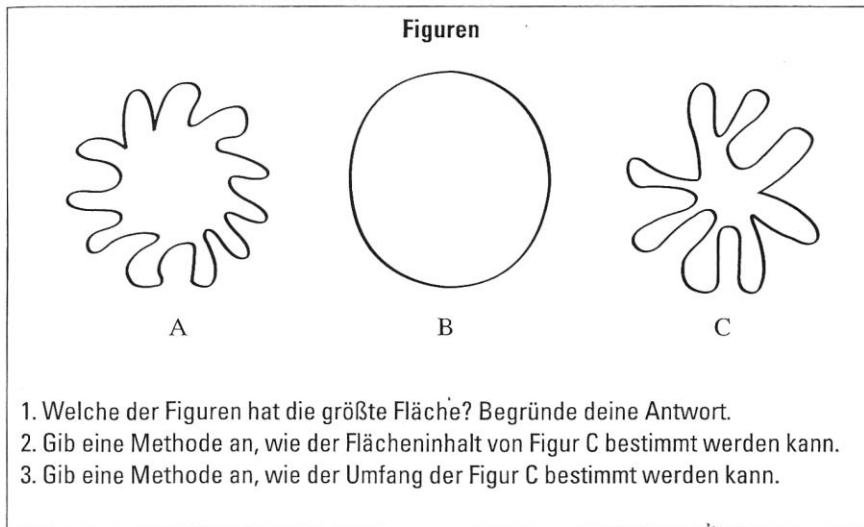


Abb. 1: Das Verständnis von Umfang und Flächeninhalt überprüfen

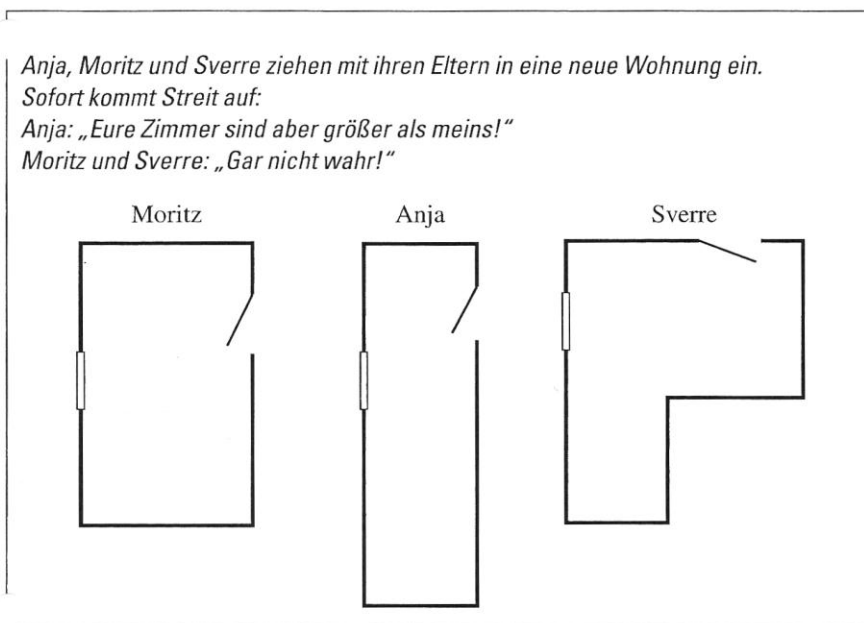


Abb. 2: Ein Einstieg in die Differenzierung zwischen Umfang und Flächeninhalt

und erfolgreich verwendete Situation ist die in Abb. 2 dargestellte.

Die problemerschließende Frage lautet also: „Wer hat Recht?“. Es mag sein, dass die Klasse sich hier auch nicht einigen kann und sich mehrere Fraktionen bilden. Dann müssen die Schülerinnen und Schüler argumentieren, warum das eine oder das andere Zimmer größer ist. Durch gute Begründungen sollen sie versuchen, sich gegenseitig zu überzeugen. Dies führt – soweit Schülerinnen und Schülern eine Berechnungsformel noch nicht zur Verfügung steht – unter anderem auf die (Wieder-)Entdeckung des Phänomens, dass Größenvergleiche, die

bei Längen und Gewichten noch recht problemlos vonstatten gingen, bei ebenen Figuren plötzlich vertrackter werden.

Schülerinnen und Schüler können außerdem Folgendes herausfinden:

- Größe kann Unterschiedliches bedeuten: Länge der Wände (Umfang), Flächeninhalt (Zahl der Meterquadrate), Länge oder Breite, längster Weg durchs Zimmer (Durchmesser). Welche Figur „größer“ ist, kann von der Betrachtungsweise abhängen.
- Form, Flächeninhalt und Umfang einer Figur hängen nicht auf einfache Weise miteinander zusammen. Verschiedene

Formen können den gleichen Flächeninhalt haben; aus dem Umfang lässt sich noch kein Flächeninhalt ableiten und umgekehrt.

- Welche Figur im Sinne des Flächeninhaltes größer ist, lässt sich nicht so einfach beurteilen. Das Übereinanderlegen verhilft nicht direkt zum Ziel.

Die letzte Feststellung kann auch Ausgangspunkt für die Entwicklung des Flächenbegriffes sein. Im konkreten Unterrichtsvorhaben wurde der grundlegende Flächenbegriff („Wie viele Meterquadrate passen in ...“) jedoch als bekannt vorausgesetzt und durch die vorliegende Situation nur wieder aufgefrischt. Auch hat ein Schüler bereits den Vorschlag gemacht, das Zimmer von Moritz zu zerlegen und wieder zusammenzusetzen, um den Vergleich zu ermöglichen. Hier deutet sich bereits eine Vertiefung des Flächeninhaltsbegriffes (im Sinne der Zerlegungsgleichheit) an, die aber in dieser Stunde nicht aufgegriffen und systematisch weiter entwickelt wurde.

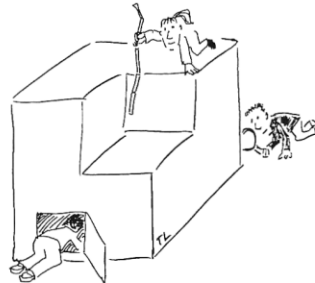
Durch die sehr offene Problemstellung kann es allerdings geschehen, dass der Umfang von den Schülerinnen und Schülern nicht als relevante Größe eingebracht wird. Im beschriebenen Versuch schlugen sich alle einhellig auf die Seite von Anja (und damit auf die Seite des Flächeninhaltes). In dieser Situation stößt der Lehrerimpuls, der die Streitsituation erneut betont, das Nachdenken wieder an: „Aber Moritz hat auch Recht!“. Wäre das größere Zimmer so einfach zu bestimmen, müssten sich die drei ja nicht streiten. Warum behaupten alle Kinder also, sie hätten das kleinere Zimmer erwischt? Die Frage, wer denn mehr Poster aufhängen oder Regale anbringen könne, führt dann schließlich auf die Gesamtlänge der Wände und somit auf den Umfang der Zimmer als andere Bewertungsmöglichkeit der Zimmergröße.

**Welche Zimmerformen gibt es überhaupt? Eine Gruppenexploration**

Nach der geschilderten Auffrischung der wichtigsten Kenntnisse und Vorstellungen im Umfeld von Umfang und Flächeninhalt steht nun die Frage im Raum: „Wie verhalten sich eigentlich Umfang und Flächeninhalt zueinander?“ Es folgt eine systematische Explorationsphase mit dem Auftrag:

**Gruppenexploration – Gemeinsam zu neuen Einsichten**

Für die Entdeckung mathematischer Zusammenhänge oder die Entwicklung mathematischer Begriffe ist es oft nützlich, wenn Schülerinnen und Schüler zunächst eine Vielzahl konkreter Beispiele untersuchen. Bei einer Gruppenexploration geschieht diese Untersuchung arbeitsteilig und die Schülerinnen und Schüler können selbst festlegen, wer welchen Teil der Arbeit erledigt. Ein idealtypischer Ablauf sieht in etwa so aus:



Phase	Typische Tätigkeiten	Sozialform
<b>1. Aufgabe präsentieren</b>	Die Lehrperson präsentiert eine Aufgabe, bei der es zunächst darum geht, viele konkrete Beispiele zu untersuchen.	Klasse
<b>2. Beispiele verteilen</b>	Die Schülerinnen und Schüler planen die Aufteilung der Beispiele oder wählen nach einem vorgegebenen Muster Beispiele aus.	Gruppe / Paare oder einzeln
<b>3. Beispiele untersuchen</b>	Die ausgewählten / zugeteilten Beispiele werden einzeln oder in Paaren untersucht.	Paare oder einzeln
<b>4. Zusammen-tragen</b>	Die Entdeckungen, die die Schülerinnen und Schüler bei der Untersuchung einiger Beispiele gemacht haben, werden gesammelt, diskutiert und zusammengeführt.	Klasse / Gruppe

Bei der Gruppenexploration erleben Schülerinnen und Schüler die Kraft kooperativen Arbeitens: Während die Arbeit alleine oder in Paaren nicht hinreichend viele untersuchte Beispiele ergäbe und wohl auch ermüdend wäre, können gemeinsam genügend Beispiele untersucht werden, um allgemeine Zusammenhänge zu entdecken oder hilfreiche neue Begriffe zu entwickeln. Die Gruppenexploration eignet sich also vor allem für Phasen des Entdeckens und bereitet den Boden für Argumentationen, Problemlösungen und Begriffsbildungen. Leistungstärkere Schülerinnen und Schüler können dabei schwierigere Beispiele untersuchen, leistungsschwächere einfachere - und wenn sie die Aufteilung der Arbeit selbst vornehmen, werden sie so zu Akteuren der Binnendifferenzierung.

**Kasten 1: Gruppenexploration als Unterrichtsmethode**

Welche Zimmerformen gibt es eigentlich? Welche Umfänge und welche Flächeninhalte haben sie?

Dies ist eine Fragestellung, die eigentlich erst geklärt werden kann, wenn man hinreichend viele Beispiele vorliegen hat, eine Situation, in der sich die Unterrichtsmethode „Gruppenexploration“ geradezu aufdrängt (s. Kasten 1, nach Barzel/Büchler/Leuders 2007).

Die Erkundung von rechteckigen Figuren (Zimmerformen) verläuft dann etwa so: In Einzel- oder Partnerarbeit sollen die Schüler zunächst möglichst viele unterschiedliche Figuren finden und in das ausliegende Raster (siehe Abb. 3) einordnen. Das Raster dient dazu, die vielen

verschiedenen Lösungen systematisch unter dem Gesichtspunkt Umfang und Flächeninhalt zu sammeln und bietet die Grundlage für die spätere Reflexion der Lösungsvielfalt. Das Raster ist eine Art Koordinatensystem, muss aber nicht vorweg als solches eingeführt werden. Das Aufsuchen von Kästchen in einem solchen Raster ist Schülern meist bereits vertraut oder kann kurz am Beispiel erläutert werden.

Jeder Schüler bekommt zur handelnden Erkundung einen Umschlag mit etwa zehn Plättchen, womit die Flächengröße der Zimmer automatisch eingeschränkt wird. Die Arbeitsanweisung wird für jeden Schüler gut sichtbar an die Tafel gehängt:

**Arbeitsanweisung:**

1. Lege mit den Plättchen verschiedene Figuren (Zimmerformen).
2. Zeichne die Figuren auf das Blatt ab.
3. Schreibe auf jede Figur ihren Flächeninhalt und ihren Umfang. (Du kannst abkürzen: F = Flächeninhalt; u = Umfang).
4. Schneide die Figuren aus und lege sie in das passende Feld des Rasters.

Das Vorgehen zeigt bei dieser Fragestellung vor allem den Vorteil der Binnendifferenzierung. Der Schwierigkeitsgrad der Figuren wird von Schülerinnen und Schülern selbst gewählt: Einige halten sich zunächst an übersichtliche Figuren, andere machen sich bereits daran, möglichst fantasievolle Figuren zu erstellen.

Die Schülerinnen und Schüler bleiben außerdem verschieden nah am Kontext „Zimmerformen“. Vor allem diejenigen, die ausgefallene Formen entwerfen, diskutieren darüber, dass es sich nicht mehr um sinnvolle Zimmerquerschnitte handelt. Sie bestehen allerdings dennoch darauf, auch diese Figuren in die Betrachtung mit einzubeziehen.

Manche stellen sich bereits selbst bestimmte Probleme. So versuchte Lisa zum Beispiel, bei gleich bleibendem Flächeninhalt einen möglichst großen Umfang zu erhalten. Simon dagegen machte es sich zur Aufgabe, alle Möglichkeiten von Figuren mit bestimmtem Flächeninhalt und Umfang zu finden.

Nachdem die Gruppenexploration schon einige Zeit im Gange ist, haben allerdings viele Schüler nur noch „Menge produziert“, ohne sich besondere Fragen zu stellen. An dieser Stelle werden individuell und je nach Arbeits- und Leistungsstand der Schülerinnen und Schüler Impulskarten ausgegeben (siehe Abb. 4)

Es gibt vier Typen von Impulskarten. An den offenen Stellen hat die Lehrkraft vor dem Austeilen jeweils konkrete Zahlen eingetragen.

**Sammlung und Reflexion**

Während ihrer individuellen Erkundungen haben die Schülerinnen und Schüler bereits ganz unterschiedliche Erfahrungen gemacht. In einer abschließenden gemeinsamen Reflexion sollen diese nun gesammelt, diskutiert und gegebenenfalls weiter entwickelt werden. Hier ist ganz

		Umfang									
		2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Fläche	1										
	2										
	3										
	4										
	5										
	6										
	7										
	8										
	9										
	10										

Abb. 3: Das Raster zum Sammeln der Figuren

Finde für $u = \underline{\quad}$ möglichst viele Figuren.	Finde für $F = \underline{\quad}$ möglichst viele Figuren.
Findest du eine Figur mit $u = \underline{\quad}$ und $F = \underline{\quad}$ ?	Finde alle Quadrate, die du mit $\underline{\quad}$ Plättchen legen kannst.

Abb. 4: Impulskarten

besonders die Moderationsfähigkeit der Lehrperson gefragt.

Die Schülerinnen und Schüler werden aufgefordert, ihre Beobachtungen zu äußern. Folgende Beispiele an Schüleräußerungen zeigen, was Schülerinnen und Schüler alles herausfinden:

- Nicht auf jedem Feld des Rasters liegt eine Figur.
- Es gibt Felder mit mehr, andere mit weniger Figuren.
- Bei kleinem Flächeninhalt gibt es nur wenige mögliche Umfänge. Bei größer werdendem Flächeninhalt steigt die Zahl der Möglichkeiten an.
- Bei kleinerem Umfang gibt es nur wenige mögliche Flächeninhalte, bei größer werdendem Umfang wird die Zahl der Figuren größer.
- Es gibt keinen ungeraden Umfang.
- Bei festem Flächeninhalt kommen erst die „geballten“ Figuren, später werden die Figuren immer länglicher.
- Noch größeren Umfang haben „ausgefranzte“ Figuren, bei denen Quadrate nur an einer Ecke zusammenstoßen (s. Abb. 7) – ein Schüler nennt sie „skurril“. Sie sind vom Umfang her so groß, dass sie jenseits der Grenzen des Rasters zu liegen kommen.
- Bei festem Umfang kann man ähnlich argumentieren.
- Vergleicht man Figuren mit gleichem Flächeninhalt, so sind diejenigen mit kleinstem Umfang Quadrate, „eher quadratartige Rechtecke“ oder „Rechtecke mit einem kleinen Ansatz“. Den größten Umfang haben die „langen Flure“ oder noch größer die „völlig ausgefranzten Figuren“.

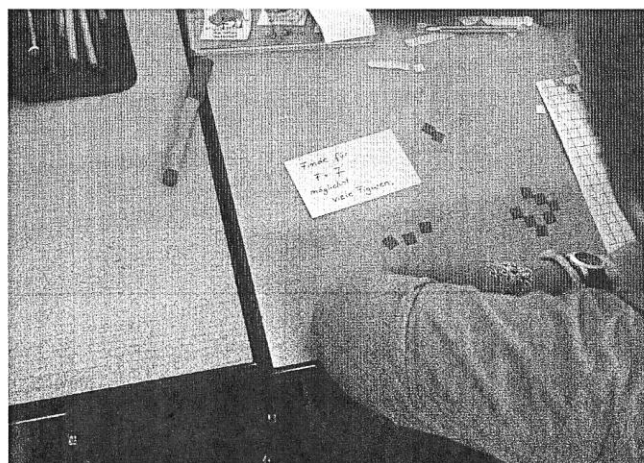


Abb. 5: Eine vertiefte Erkundung mit einer Impulskarte



Abb. 6: Sammlung und Reflexion im Stuhlkreis

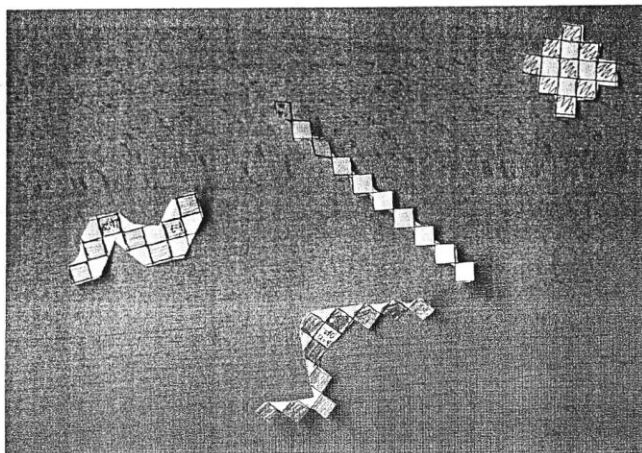


Abb. 7: Einige „ausgefranzte Exoten“

nisse gewinnen. Hier einige Varianten, die jeweils immer als Gruppenexploration (mit geeigneten Impulskarten) durchgeführt werden können.

**Variante: Rechtecke – Klasse 6**

- Entwirf mehrere Rechtecke mit demselben Umfang u.
- Entwirf mehrere Rechtecke mit demselben Flächeninhalt F.
- Trage für jedes gefundene Rechteck im Koordinatensystem bei u und F einen Punkt ein.

– Vergleicht man Figuren mit gleichem Umfang, so sind diejenigen mit größtem Flächeninhalt wieder die „quadratartigen“. Den kleinsten Flächeninhalt haben wieder die „ausgefranzten“. (+)

Einige Schüler finden die ausgefranzten Figuren akzeptabel, andere kritisieren an ihnen, dass sie ja gar keine begehbaren Zimmer mehr darstellen. Beide Sichtweisen sollte man nebeneinander bestehen lassen.

Die beiden letzten Zusammenhänge werden nur von wenigen Schülern erkannt und geäußert, hier kann der Lehrer gezielte Fragen stellen. Allerdings ist nicht zu erwarten, dass aus dieser Erkundung (und in dieser Altersgruppe) bereits eine tragfähige Formulierung des isoperimetrischen Problems (\*) oder der Dualität (+) zustande kommt<sup>1</sup>. Allerdings machen die Schülerinnen und Schüler bereits dorthin führende Erfahrungen, auf die sie später zurückgreifen können. (Siehe dazu die Varianten für Klasse 7 und 10 am Ende des Beitrags).

Während der Betrachtung und Diskussion der Figuren finden sich zudem einige Beispiele, die aus der Ordnung herauszustechen scheinen – und in der Tat, es stellt sich meistens heraus, dass sie falsch eingeordnet sind!

Zur Veranschaulichung der von den Schülern gemachten Beobachtungen können wieder Legeplättchen hinzugezogen werden. Sie unterstützen die Schülerinnen

und Schüler dabei, ihre Beobachtungen zu veranschaulichen und anderen mitzuteilen. Die Plättchen sind auch eine gute Unterstützung bei Begründungsversuchen, da man mit ihnen Figuren schrittweise aufbauen kann. In unserer Lerngruppe wurde beispielsweise argumentiert,

– warum es keine Figur mit Flächeninhalt 7 und Umfang 18 geben kann (weil der größte Umfang mit 7 Plättchen  $4 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 16$  ist – es sei denn, man lässt „ausgefranzte“ Figuren zu.),

– warum der Umfang immer eine gerade Zahl sein muss (weil durch jedes Quadrat 0, 2 oder 4 Kanten hinzukommen). (Natürlich hätte man diese letzte Eigenschaft nicht bereits durch die Struktur des Rasters vorgeben müssen, dann wäre diese Entdeckung sicherlich hervorstechender gewesen. Allerdings hätte das Raster dann sehr viel Platz eingenommen!)

Am Ende der Diskussion kann die Lehrperson das Augenmerk der Schülerinnen und Schüler auf bestimmte Entdeckungen lenken, die bisher noch nicht reflektiert wurden. Hilfreich hierzu können einige vorbereitete Figuren sein, die mit auf das Raster gelegt werden.

**Ausblick: Kumulatives Lernen beim Thema Flächeninhalt und Umfang**

Die hier vorgestellte Erkundung ist auf die Möglichkeiten von Schülerinnen und Schülern der vierten bis sechsten Klasse zugeschnitten. Sie soll möglichst früh im Lernprozess das Augenmerk auf Zusammenhänge zwischen Umfang und Flächeninhalt lenken. Ganz analoge Erkundungen können Schülerinnen und Schüler auch in späteren Jahrgangsstufen immer wieder durchführen und dabei vertiefte Erkennt-

In dieser Form wird auf das Ausschneiden verzichtet. Schülerinnen und Schüler können bereits Flächeninhalt und Umfang auch von Rechtecken mit nicht ganzzahligen Seitenlängen berechnen. Die Aufgabe kann auch in der Hausaufgabe vorbereitet werden. Das Muster aller möglichen Rechtecke ergibt im Koordinatensystem dann ein Bild, das hinsichtlich seiner funktionalen Zusammenhänge analysiert werden kann.

**Variante: Umfangsgleiche Figuren – Klasse 7 bis 8**

Mit Hilfe eines Dynamischen Geometriensystems kann man auch beliebige Figuren untersuchen. Beispielsweise können Erkundungsfragen wie diese gestellt und durch die Schülerinnen und Schüler bearbeitet werden:

- Finde ein Fünfeck mit Umfang 20 und möglichst kleinem Flächeninhalt.
- Finde ein gleichschenkliges Dreieck mit Flächeninhalt 20 und möglichst großem Flächeninhalt.

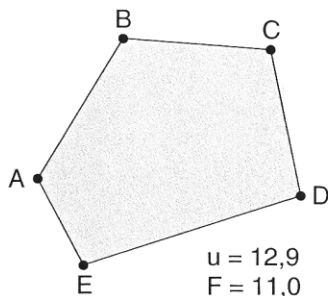
Dabei kann man hinsichtlich des DGS-Einsatzes drei Vorgehensweisen unterscheiden:

1. Das DGS wird als freies Werkzeug verwendet. Schülerinnen und Schüler zeichnen oder konstruieren entsprechende Figuren und messen die gesuchten Größen. Bei einigen Figuren (wie z. B. beim gleichschenkligen Dreieck) können sie dabei auch Konstruktionen entwickeln, mit der sie die Lösungsfigur begründen können. Bei anderen variantenreicheren Figuren (wie z. B. beim Fünfeck), können sie allenfalls im Wettbewerb gegeneinander ein Optimum suchen und eine Vermutung

<sup>1</sup> Die wohl bekannteste Version des isoperimetrischen Problems: „Unter allen ebenen Figuren mit gegebenem Umfang hat der Kreis den größte Flächeninhalt“. Seine duale Formulierung: „Unter allen ebenen Figuren mit gegebenem Flächeninhalt hat der Kreis den kleinsten Umfang.“ Entsprechende duale Aussagen kann man für viele andere, eingeschränkte Klassen von Figuren treffen.

über die optimale Figur formulieren, ohne aber diese zu beweisen.

- Das DGS wird als vorgefertigtes Arbeitsblatt verwendet, das bereits eine größere Zahl von untersuchenswerten Figuren enthält. Die Flächen- und Längenmessung ist dann bereits angezeigt. Zudem können bestimmte Figuren mit Vorgaben (wie z. B. ein Viereck mit vier gleichen Seiten, also eine Raute) untersucht werden, deren selbstständige Konstruktion für die Schüler schwierig wäre. Bei einigen DGS kann die Lehrkraft – mit einigem Know-How – sogar umfangskonstante Figuren erzeugen und vorgeben.



- Verwendet man ein geeignetes DGS, bei dem ein Computeralgebrasystem und Tabellenkalkulation integriert ist (z. B. TI-Inspire, Felix), so können Schüler sich auf andere Weise selbstständig an die Erkundung machen: Sie konstruieren zunächst eine Figur (z. B. ein beliebiges Fünfeck), messen die Seitenlängen und geben dann im CAS die Konstanzbedingung algebraisch ein, z. B.:  $a + b + c + d + e = 20$ . Nun können sie einzelne Messwerte für die Fläche in einer Tabelle festhalten.

**Variante: Beliebige Vielecke (auch mit Kreissektoren) – Klasse 10**

In Klasse 10 können Schülerinnen und Schüler bereits zu einer großen Zahl von Flächen ihre Inhalte berechnen. Außerdem können sie funktionale Zusammenhänge im Koordinatensystem und symbolisch darstellen und untersuchen. Dies kann man für einen weiteren Zugang zum isoperimetrischen Problem nutzen und dabei die genannten Inhalte produktiv üben (vgl. Stahel 2006).

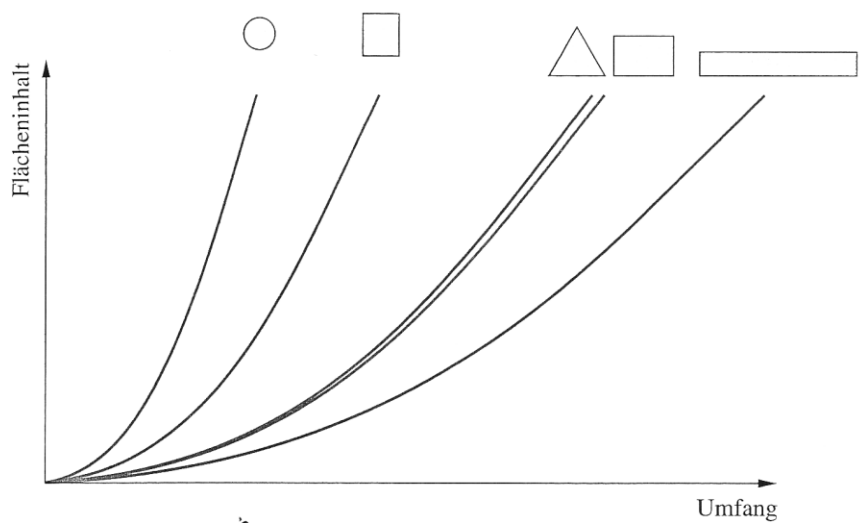


Abb. 8: Funktionale Abhängigkeit von Flächeninhalt und Umfang.

- Entwirf eine Figur mit gegebenem Umfang  $u$  und berechne deren Flächeninhalt  $F$ .
- Stelle eine Berechnungsvorschrift auf, mit der man  $F$  aus  $U$  berechnen kann.
- Ermittle mehrere Wertepaare und trage sie im Koordinatensystem an der Tafel ein.

Ein Ergebnis dieser Erkundung kann dann wie in Abb. 8 aussehen.

**Rückblick**

Die dargestellten Beispiele haben gezeigt, wie im Umfeld des isoperimetrischen Problems eine große Zahl von jeweils altersgemäßen mathematischen Erkundungen angelegt werden können. Insbesondere haben sie deutlich gemacht, wie ein zentraler geometrischer Zusammenhang Schülerinnen und Schüler über die Jahre begleiten kann, so dass sie jedes Mal feststellen, dass sie mit den inzwischen von ihnen erworbenen mathematischen Kenntnissen und Fähigkeiten den Zusammenhang etwas tiefer beleuchten können – ein Musterbeispiel für ein spiralgiges Curriculum im Sinne von Bruner.

Viele weitere, interessante Zugangsweisen zu diesem Problemkontext finden sich in der Literatur, z. B. bei Winter (2005), Schupp (1992), Schumann (1991) oder Kahle (1982).

**Literatur**

Barzel, Bärbel/Büchter, Andreas/Leuders, Timo (2007): Fachmethodik Mathematik. Cornelsen-Scriptor, Berlin.  
 Kahle, Dietrich (1982): Das isoperimetrische Problem bei Vierecken – Lösungswege im ‘Haus der Vierecke’. In: MNU 35, S. 273–280.  
 Schumann, Heinz (1991): Experimentelles Lösen einfacher isoperimetrischer Probleme in einer interaktiven computergrafischen Lernumgebung. In: Didaktik der Mathematik 19, S. 227–242.  
 Schupp, Hans (1992): Optimieren. Extremwertbestimmung im Mathematikunterricht. Bibliographisches Institut, Mannheim.  
 Stahel, Andreas (2006): Differenzierendes Üben mit offenen Aufgaben - Wie Schülerinnen und Schüler anhand des isoperimetrischen Problems Geometrie- und Algebrakenntnisse vernetzen und produktiv festigen können. In: PM 12, S. 8–13.  
 Winter, Heinrich (2005): Apfelbäume und Fichten – und Isoperimetrie. In: Mathematik lehren 128, S. 58–62.

Prof. Dr. Timo Leuders,  
 Pädagogische Hochschule Freiburg  
 leuders@ph-freiburg.de

Andrea Reischmann,  
 Pädagogische Hochschule Freiburg

Stefanie Zachmann,  
 Pädagogische Hochschule Freiburg