

AT 10

Messen Sek II

Dr. Maike Tesch

Januar 2026

Aus dem Ausbildungscurriculum

Messen SII

Ziel: Die LiV durchlaufen die **Planungsphasen** eines Unterrichts, der in die **metrische Geometrie in der Sekundarstufe II** (als Beispiel für die Leitidee Messen) einführt.

Sie **entwickeln schülergerechte Zugänge zum Skalarprodukt** und zum **Vektorprodukt** und erkennen den **Nutzen der geometrischen Interpretationen** dieser Verknüpfungen zur Lösung von typischen Fragestellungen aus der analytischen Geometrie.

Diese Aufgabenstellungen werden **durch geeignete Modelle**, die SuS während des gesamten Unterrichts zur analytischen Geometrie begleiten können, **visualisiert**. Es wird anhand der Modelle aufgezeigt, dass ein geometrisches **Abstandproblem auf verschiedene Weisen gelöst** werden kann. Auf die **Dokumentation von Lösungswegen** in der Geometrie wird eingegangen.

Zur **Visualisierung** wird ebenfalls das dynamische Geometrieprogramm **Geogebra** verwendet.

Das Ausbildungscurriculum im Fachportal:

<https://fachportal.lernnetz.de/sh/faecher/mathematik/wissenswertes/ausbildung.html>

Ablauf



- ❖ Aktuelles und Allgemeines
- ❖ MESSEN in der Sek II
- ❖ Unterrichtsbesuch und Besprechung
- ❖ Produkte mit Vektoren
- ❖ Mittagspause
- ❖ Abstände

Aktuelles und Allgemeines

Ausbildungsveranstaltungen im 2. Halbjahr

Mi, 18.02.2026 AV11 Modellieren Präsenz Jule (?)

Mi, 18.03.2026 AV12 Unterrichtsplanung Sek II Präsenz Sten

Osterferien

Mi, 29.04.2026 AV15 Lernumgebungen, Aufgabenkultur online online

Mi, 27.05.2026 AV13 Raum und Form, Begriffsbildung Präsenz Anneke

Mi, 24.06.2026 AV14 Raum und Form, Argumentieren Präsenz XY

MESSEN in der Sek II

Kernideen des Messens

Kernidee – noch unmathematisiert	Mathematische Präzisierung
Man kann Objekte und Phänomene der Welt nach ganz unterschiedlichen Eigenschaften vergleichen. Manchmal kann man das so tun, als lägen die Objekte sortiert hintereinander, wie die Zahlen auf einem Zahlenstrahl (z. B. bei Länge oder Gewicht). <i>(Modellieren von Eigenschaften durch Zahlen)</i>	Messen ist eine Abbildung von einer Objektmenge in einen Größenbereich (z. B. die Längen, die ähnlich wie die positiven reellen Zahlen strukturiert sind). Das Operieren in der Objektwelt (also z. B. das Zusammenfassen von Objekten), sollte dabei immer zu sinnvollen Operationen im Größenbereich führen (also z. B. zur Addition).
Will man die Größe eines Objektes zahlenmäßig erfassen, so wählt man ein „kleines“ Vergleichsobjekt und fragt, wie oft es in das zu erfassende Objekt passt. Geht das nicht auf, so kann man versuchen, das Vergleichsobjekt in kleinere aufzuteilen („Verfeinern“) und mit diesen weiter zu arbeiten. <i>(Einheitenkonzept und Passen-In-Vorstellung)</i>	Zu einer zahlenmäßigen Angabe für eine Größe kommt man, indem man eine Einheit im Größenbereich auswählt und danach fragt, wie oft die Einheit in die Größe passt. Einheiten sind i. A. willkürlich, mitunter kann man sie durch Division verfeinern.
Für die Verständigung über Größen ist es nützlich, sich auf möglichst einfache, stabile, praktische und vor allem gemeinsame Einheiten zu einigen. <i>(Nutzen von Standardeinheiten)</i>	Zur Messung physikalischer Größen bedient man sich weltweit normierter Standardeinheiten.

Die Leitidee MESSEN

Aus den Bildungsstandards Sek I (2022)

Die Leitidee Größen und Messen umfasst das Bestimmen und Deuten von Größen unter Berücksichtigung des Grundprinzips des Messens. Dabei spielen neben Längen-, Flächen- und Volumenmessungen weitere Größen wie Winkel und Zeitspannen sowie die Berücksichtigung der Sachsituation einschließlich Vorstellungen über geeignete Repräsentanten eine Rolle.

Die darauf bezogenen mathematischen Sachgebiete der Sekundarstufe I sind Arithmetik, Algebra und Geometrie.

Aus den Fachanforderungen Sek II

In der Oberstufe wird das Messen als universelles Werkzeug zum Quantifizieren und Vergleichen um die Ableitung, das Integral sowie das Skalar- und Vektorprodukt erweitert. Die Leitidee Messen ist in besonderem Maße mit anderen Leitideen verknüpft.



Was sollen sich Lernende unter einem Vektor vorstellen?

Was sollen sich Lernende unter einem Vektor vorstellen?

- ▶ Geometrische Auffassung von Vektoren als Klassen gleich langer, paralleler und gleich gerichteter Pfeile: **Pfeilklassenauffassung**
- ▶ Arithmetische Auffassung von Vektoren als n -Tupel (speziell Paare und Tripel) reeller Zahlen: **n -Tupel-Auffassung**
- ▶ Auffassung von Vektoren als Elemente eines (axiomatisch begründeten) Vektorraumes: **Vektorraumauffassung**



Lambacher Schweizer – Mathematik für Gymnasien, Gesamtband Oberstufe mit CAS (2008)

In der analytischen Geometrie meinen wir mit dem Begriff Vektor eine Verschiebung. Die Eigenschaften und Gesetze für Verschiebungen gelten auch für viele andere Objekte. Solche Objekte nennt man allgemein Vektoren und eine Menge von solchen Objekten bezeichnet man als Vektorraum.

Definition: Eine nicht leere Menge V nennt man einen **Vektorraum** und ihre Elemente **Vektoren**, wenn

1. es eine „Addition“ gibt, die Elementen $\vec{a}, \vec{b} \in V$ jeweils genau ein Element $\vec{a} + \vec{b} \in V$ zuordnet, und hierbei gilt:
 - 1.1 Es gibt ein „Nullelement“ $\vec{0} \in V$ mit $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ für alle $\vec{a} \in V$.
 - 1.2 Zu jedem $\vec{a} \in V$ gibt es ein „Gegenelement“ $-\vec{a} \in V$ mit $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.
 - 1.3 Für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ gilt: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (Assoziativgesetz)
 - 1.4 Für alle $\vec{a}, \vec{b} \in V$ gilt: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (Kommutativgesetz)
2. es eine „Multiplikation“ gibt, die jeweils einer reellen Zahl r und einem Element $\vec{a} \in V$ genau ein Element $r \cdot \vec{a} \in V$ zuordnet, und hierbei gilt:
 - 2.1 Für alle $r \in \mathbb{R}, \vec{a}, \vec{b} \in V$ gilt: $r \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = r \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$ und
für alle $r, s \in \mathbb{R}, \vec{a} \in V$ gilt: $(r + s) \cdot \vec{a} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{a}$ (Distributivgesetze)
 - 2.2 Für alle $r, s \in \mathbb{R}, \vec{a} \in V$ gilt: $r \cdot (s \cdot \vec{a}) = (r \cdot s) \cdot \vec{a}$ (Assoziativgesetz)
 - 2.3 Für alle $\vec{a} \in V$ gilt: $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Ein Vektorraum ist vollständig bekannt, wenn man die Menge der Vektoren V und die beiden Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ kennt. Man gibt deshalb oft einen Vektorraum in der Schreibweise $(V, +, \cdot)$ an.

LS – Mathematik Oberstufe Einführungsphase (2013)

Bisher wurden mithilfe von Koordinaten die Lagen von Punkten beschrieben.
Im Folgenden wird gezeigt, wie man die Verschiebung von Punkten mathematisch beschreiben kann.

Wie man von einem Ausgangspunkt P zu einem Zielpunkt Q mit einer Verschiebung gelangt, kann man so beschreiben (Fig. 1):
Man erreicht den Punkt Q, wenn man vom Punkt P aus zwei Einheiten in Richtung der x_1 -Achse geht und anschließend drei Einheiten in Richtung der x_2 -Achse geht.

Diese Verschiebung bezeichnet man als **Vektor** und schreibt kurz $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Weil dieser Vektor von P nach Q führt, schreibt man auch $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Man sagt:

Der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ hat die x_1 -Koordinate 2 und die x_2 -Koordinate 3.

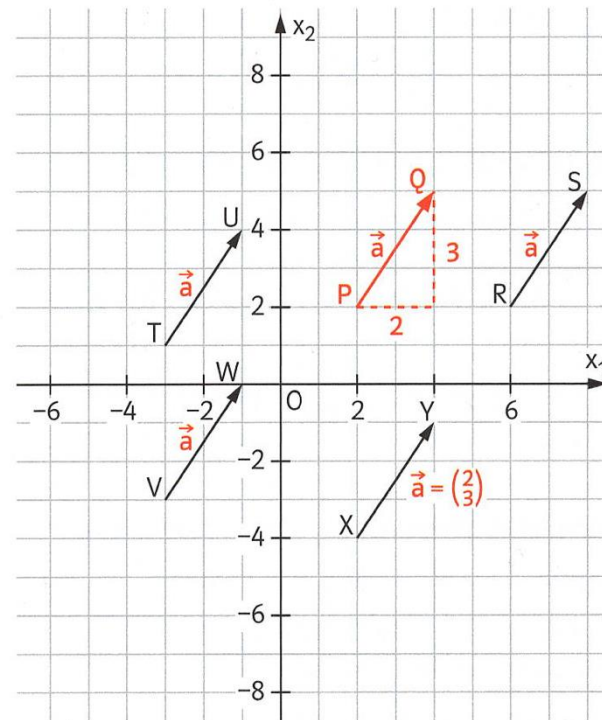


Fig. 1

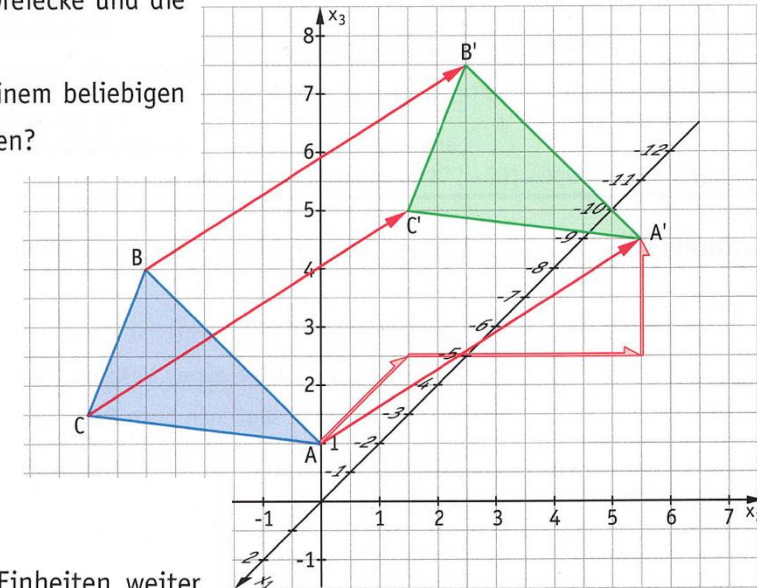
Der Vektor $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ beschreibt nicht nur, wie man zum Ausgangspunkt P den Zielpunkt Q erhält, sondern auch, wie man in Fig. 1 zum Ausgangspunkt R den Zielpunkt S, zum Ausgangspunkt T den Zielpunkt U, zum Ausgangspunkt V den Zielpunkt W und zum Ausgangspunkt X den Zielpunkt Y erhält.

Deshalb bezeichnet man Vektoren auch allgemeiner durch kleine Buchstaben mit einem Pfeil.

In Fig. 1 gilt: $\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{TU} = \overrightarrow{VW} = \overrightarrow{XY} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Elemente der Mathematik – Einführungsphase S-H (2012)

- 1** Das Dreieck ABC mit $A(0|0|1)$, $B(2|-2|5)$ und $C(0|-4|1,5)$ wird so parallel verschoben, dass der Bildpunkt von A die Koordinaten $A'(-3|4|3)$ hat.
- a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Bildpunkte B' und C' . Zeichnen Sie auch beide Dreiecke und die Verschiebungspfeile in ein Koordinatensystem.
- b) Angenommen, ein Roboter soll die gleiche Verschiebung wie in Teilaufgabe a) mit einem beliebigen Gegenstand ausführen. Welche Informationen zu der Verschiebung kann man ihm geben?



Vektor

In Aufgabe 1 haben wir die Verschiebung durch drei Zahlenangaben beschrieben: 3 Einheiten weiter hinten, 4 Einheiten weiter rechts und 2 Einheiten weiter oben. Da diese Angaben *eine* Verschiebung beschreiben, fasst man sie in einer Spalte mit Klammern zusammen: $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Definition 1

- (1) Ein **Vektor** mit drei Koordinaten ist ein geordnetes Zahlentripel, das wir als Spalte schreiben. Zur Abkürzung bezeichnen wir Vektoren mit kleinen Buchstaben und einem darüber gesetztem Pfeil, zum Beispiel $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

- (2) Der Vektor $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ heißt **Nullvektor**.

Man wählt die Spaltenschreibweise, damit keine Verwechslung mit Punktkoordinaten vorkommt.

Mathematik Neue Wege

Lineare Algebra | Analytische Geometrie (2010)

Mithilfe des Koordinatensystems können Sie bereits geometrische Objekte durch Zahlen beschreiben und in Schrägbildern anschaulich darstellen. In diesem Lernabschnitt werden Sie mit dem Vektor einen weiteren Begriff kennen lernen, mit dem viele geometrische Frage- und Problemstellungen mit rechnerischen (algebraischen) Methoden bearbeitet werden können. Die Grundidee ist dabei recht einfach: Die schon bekannten Zahlenpaare $(x|y)$ und Zahlentripel $(x|y|z)$ werden nun nicht mehr nur als Beschreibung von Punkten im ebenen und räumlichen Koordinatensystem genutzt, sondern zusätzlich auch als Bewegungen (Verschiebungen) interpretiert. Für die Vektoren lassen sich einfache Rechenoperationen definieren, die dann wiederum eine geometrische Bedeutung haben. Damit können Sie nun viele geometrische Eigenschaften von Objekten erkunden und Zusammenhänge nachweisen. Von besonderem Vorteil ist, dass dieses Rechnen mit Vektoren für die Ebene und den Raum in analoger Weise geschieht.

Was Sie erwartet

Vektoren – algebraisch und geometrisch

Algebraisch wird ein Vektor als **Zahlenpaar** oder **Zahlentripel** geschrieben.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Wir schreiben Vektoren als Spalten und bezeichnen sie mit kleinen Buchstaben und einem zusätzlichen Pfeil. Die reellen Zahlen x_1, x_2, x_3 heißen **Koordinaten des Vektors**.

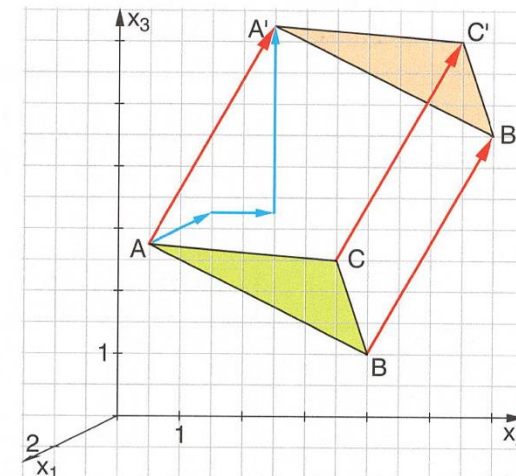
Geometrisch können Vektoren als **Verschiebungen (Translationen)** in der Ebene oder im Raum interpretiert werden.

$$\text{Der Vektor } \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

verschiebt den Punkt $A = (1|1|3)$

- um -2 in Richtung x_1 -Achse
- um 1 in Richtung x_2 -Achse
- um 3 in Richtung x_3 -Achse

Der Bildpunkt ist $A' = (-1|2|6)$.



Grundvorstellungen in der analytischen Geometrie

Lernprozesse in der analytischen Geometrie erfordern einen ständigen Wechsel von algebraischen in geometrische Darstellungsformen und umgekehrt. Durch adäquate Grundvorstellungen können abstrakte algebraische Konzepte verschiedene geometrische Bedeutungen erhalten. Am Beispiel des grundlegenden Begriffs „Vektor“ kann dies verdeutlicht werden: In algebraischer Darstellung ist ein Vektor ein Tripel reeller Zahlen, welches aber viele unterschiedliche geometrische Interpretationen als Punkt, Ortsvektor, Verschiebung bzw. Pfeilklassse (Menge von gleichlangen gleichgerichteten Pfeilen) erlaubt (Malle, 2005).

Bewegungsaufgaben

U-Boote, Flugzeuge,... bewegen sich meist geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit. Ihre Bahngleichungen können somit durch Geradengleichungen beschrieben werden.

Beispiel: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ -40 \\ 25 \end{pmatrix}$ (t in Stunden ($t \in \mathbb{R}$), sonstige Angaben in km)

„Bausteine“ der Bahngleichung	Interpretation
$\begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix}$ (Stützvektor)	
t (Parameter)	
$\begin{pmatrix} 60 \\ -40 \\ 25 \end{pmatrix} = \vec{v}$ (Richtungsvektor)	
$ \vec{v} $ (Länge Richtungsvektor)	
$\vec{x}$	



Bewegungsaufgaben

U-Boote, Flugzeuge,... bewegen sich meist geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit. Ihre Bahngleichungen können somit durch Geradengleichungen beschrieben werden.

Beispiel: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ -40 \\ 25 \end{pmatrix}$ (t in Stunden ($t \in \mathbb{R}$), sonstige Angaben in km)

„Bausteine“ der Bahngleichung	Interpretation
$\begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix}$ (Stützvektor)	Koordinaten des Startpunktes der Bewegung
t (Parameter)	vergangene Zeit nach (Beobachtungs-)Beginn der Bewegung
$\begin{pmatrix} 60 \\ -40 \\ 25 \end{pmatrix} = \vec{v}$ (Richtungsvektor)	gibt an, wie sich die Koordinaten des Objektes innerhalb von einer Stunde ändern.
$ \vec{v} $ (Länge Richtungsvektor)	Geschwindigkeit des Objektes (in km/h)
$\vec{x}$	Ort des Objektes nach t Stunden



Produkte mit Vektoren

HMF 4 - Analytische Geometrie (Pool 1)

- 4.1 Gegeben seien die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ und die reellen Zahlen r und t . Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle an, ob es sich bei dem Ausdruck um einen Vektor oder um eine Zahl handelt, oder ob der Ausdruck nicht definiert ist.

Ausdruck	Vektor	Zahl	nicht definiert
$(\vec{u} \circ \vec{v}) + \vec{w}$			
$ \vec{u} ^2 - \vec{w} ^2$			
$(\vec{u} \times \vec{v}) - (r \cdot t) \cdot \vec{w}$			
$(\vec{u} \circ \vec{u}) + (r - t)^2$			
$(r \cdot \vec{u}) \circ (t \times \vec{u} \times \vec{v})$			
$\vec{u} \times ((\vec{w} - \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}))$			

HMF 3 - Analytische Geometrie (Pool 1)

- 3.1 Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ und die reellen Zahlen r und t . Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle an, ob es sich bei dem Ausdruck um einen Vektor oder um eine Zahl handelt, oder ob der Ausdruck nicht definiert ist.

Ausdruck	Vektor	Zahl	nicht definiert
$\vec{a} \circ (\vec{b} + r \cdot \vec{c})$			
$ \vec{a} \times \vec{b}$			
$(r \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c}$			
$(\vec{a} \circ \vec{a}) + (r \cdot \vec{c})^2$			
$\vec{c} \times (t \cdot \vec{a} - r \cdot \vec{b})^2$			
$\vec{b} \times (\vec{c} \circ (r \cdot \vec{a}))$			

Sachanalyse zum Skalarprodukt

Definition

Es sei V ein Vektorraum und φ eine Abbildung, die jedem Paar $(\vec{v}; \vec{w})$ von Vektoren eine reelle Zahl $\varphi(\vec{v}; \vec{w})$ zuordnet. Eine solche Abbildung heißt **Skalarprodukt**, wenn gilt:

- (L) $\forall r \in \mathbb{R} \forall \vec{v}, \vec{w} \in V: \varphi(r \vec{v}; \vec{w}) = \varphi(\vec{v}; r \vec{w}) = r \varphi(\vec{v}; \vec{w})$ (Linearität)
- (D) $\forall \vec{u}; \vec{v}; \vec{w} \in V: \varphi(\vec{u} + \vec{v}; \vec{w}) = \varphi(\vec{u}; \vec{w}) + \varphi(\vec{v}; \vec{w})$ (Distributivität)
- (K) $\forall \vec{v}; \vec{w} \in V: \varphi(\vec{v}; \vec{w}) = \varphi(\vec{w}; \vec{v})$ (Kommutativität)
- (P) $\forall \vec{v} \in V: \varphi(\vec{v}; \vec{v}) \geq 0$ (Positivität)
- (R) $\forall \vec{v} \in V: \varphi(\vec{v}; \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$ (Reichhaltigkeit)

Ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt heißt **euklidischer Vektorraum**.

Für die Einführung des Skalarprodukts

... gibt es verschiedene Möglichkeiten:

Der **axiomatische Ansatz**, welcher das Skalarprodukt als abstrakte Abbildung mit bestimmten Eigenschaften definiert (vgl. vorherige Folie), erscheint für die Schule eher ungeeignet.

Bei einem **geometrisch orientierten Zugang** wird das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ als Produkt ihrer Beträge und des Kosinus des von ihnen

eingeschlossenen Winkels beschrieben: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \angle(\vec{u}, \vec{v})$

Bei einem **arithmetisch/algebraisch orientierten Zugang** steht die Berechnung des Skalarprodukts zweier Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ als Summe der Produkte einander entsprechender Koordinaten im Fokus:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \dots + u_n \cdot v_n = \sum_{i=1}^n u_i \cdot v_i$$

wobei $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

Es sei V ein Vektorraum und φ eine Abbildung, die jedem Paar $(\vec{v}; \vec{w})$ von Vektoren eine reelle Zahl $\varphi(\vec{v}; \vec{w})$ zuordnet. Eine solche Abbildung heißt **Skalarprodukt**, wenn gilt:

- (L) $\forall r \in \mathbb{R} \forall \vec{v}, \vec{w} \in V: \varphi(r \vec{v}; \vec{w}) = \varphi(\vec{v}; r \vec{w}) = r \varphi(\vec{v}; \vec{w})$ (Linearität)
- (D) $\forall \vec{u}; \vec{v}; \vec{w} \in V: \varphi(\vec{u} + \vec{v}; \vec{w}) = \varphi(\vec{u}; \vec{w}) + \varphi(\vec{v}; \vec{w})$ (Distributivität)
- (K) $\forall \vec{v}; \vec{w} \in V: \varphi(\vec{v}; \vec{w}) = \varphi(\vec{w}; \vec{v})$ (Kommutativität)
- (P) $\forall \vec{v} \in V: \varphi(\vec{v}; \vec{v}) \geq 0$ (Positivität)
- (R) $\forall \vec{v} \in V: \varphi(\vec{v}; \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$ (Reichhaltigkeit)

Zeige, dass die Verknüpfung $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$ kein Skalarprodukt ist.

Skalarprodukt

ein arithmetisch orientierter Zugang

Definition

Das Skalarprodukt $\overline{a} \cdot \overline{b}$ (lies "a Punkt b")
ist definiert durch die Rechenvorschrift

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y.$$

Die Vorschrift „fällt vom Himmel“.
Die Schüleraktivierung besteht in
den Arbeitsaufträgen:

- Geben Sie möglichst verschiedene Paare von 2D-Vektoren an, deren Skalarprodukt 0 ist.
- Klären Sie die Situation zeichnerisch.
- Geben Sie möglichst verschiedene Paare von 3D-Vektoren an, deren Skalarprodukt 0 ist.
- Vergleichen Sie das Skalarprodukt mit den Beträgen der Vektoren.
- Bilden Sie das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst.
- Untersuchen Sie das Skalarprodukt eines Vektors mit seinem Gegenvektor.
- Untersuchen Sie das Skalarprodukt zweier kollinearere Vektoren.
- Vergleichen Sie Skalarprodukt, Vektoraddition und s-Multiplikation.

Skalarprodukt

ein arithmetisch orientierter Zugang

Definition

Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ (lies "a Punkt b")
ist definiert durch die Rechenvorschrift

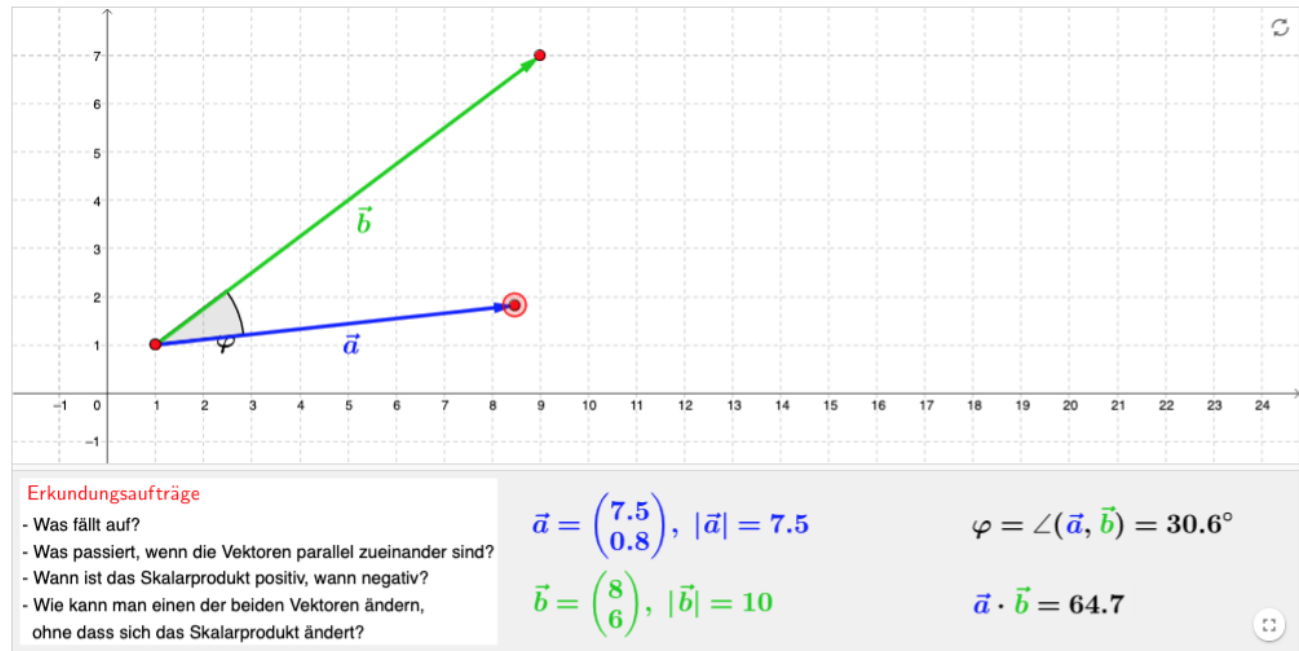
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y.$$

Die Vorschrift „fällt vom Himmel“.
Die Schüleraktivierung besteht in
den Arbeitsaufträgen:

Skalarprodukt erkunden 1

Autor: Jürgen Roth

Thema: Vektoren 2D (zweidimensional)



<https://www.geogebra.org/m/vxfndvh7>

Skalarprodukt – „Geometrisierung“

Man betrachtet das Skalarprodukt eines Differenzvektors mit sich selbst.

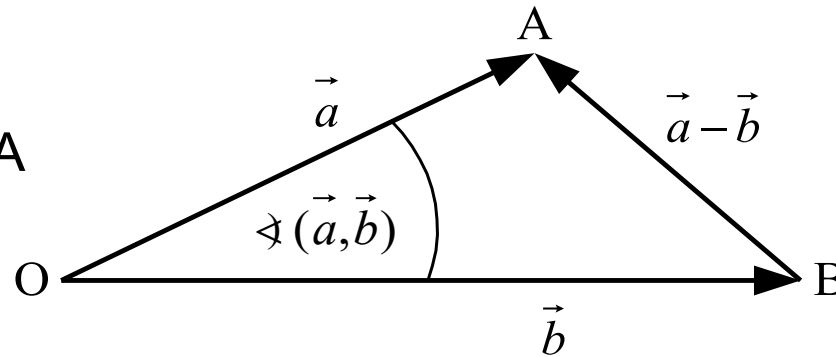
$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

Nach den gewonnenen Erkenntnissen gilt: $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$

Was bedeutet $-2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$?

Die Seitenlängen im Dreieck OBA

sind $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ und $|\vec{a} - \vec{b}|$.



Der Kosinussatz im Dreieck OBA lautet

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}))$$

Skalarprodukt – „Geometrisierung“

Man vergleicht

$$\left| \vec{a} - \vec{b} \right|^2 = \left| \vec{a} \right|^2 - 2 \cdot \underline{\vec{a} \cdot \vec{b}} + \left| \vec{b} \right|^2 \quad \text{und}$$

$$\left| \vec{a} - \vec{b} \right|^2 = \left| \vec{a} \right|^2 + \left| \vec{b} \right|^2 - \underline{2 \cdot \left| \vec{a} \right| \cdot \left| \vec{b} \right| \cdot \cos(\sphericalangle (\vec{a}, \vec{b}))}$$

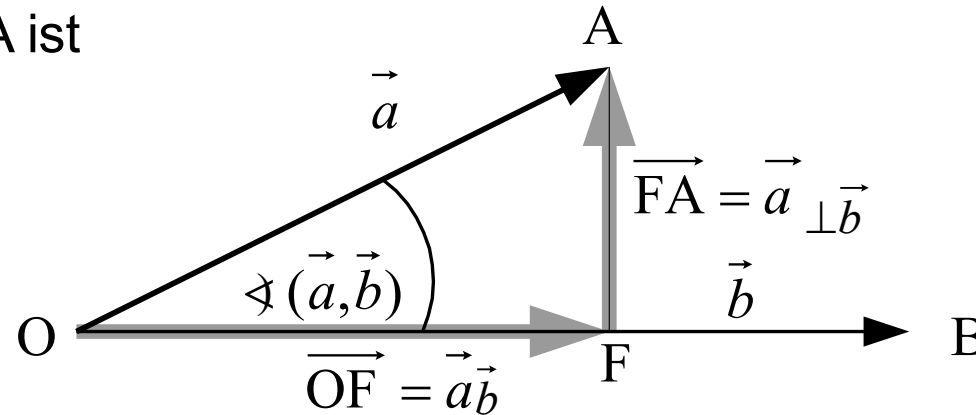
Demnach ist $\underline{\vec{a} \cdot \vec{b} = \left| \vec{a} \right| \cdot \left| \vec{b} \right| \cdot \cos(\sphericalangle (\vec{a}, \vec{b}))}$

Skalarprodukt – Geometrische Interpretation

Der Term $|\vec{a}| \cdot \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$ hat eine geometrische Bedeutung.

Der Kosinus im Dreieck OFA ist

$$\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{|\overrightarrow{OF}|}{|\vec{a}|}$$



Der Vektor $\overrightarrow{OF} = \vec{a}_b$ ist die Projektion des Vektors $\vec{a}$ auf den Vektor $\vec{b}$.

d.h. also $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}_b| \cdot |\vec{b}|$

Der Vektor $\vec{a}$ wird in zwei Komponenten zerlegt, eine parallel zu $\vec{b}$ und eine orthogonal zu $\vec{b}$.

Skalarprodukt

ein geometrisch orientierter Zugang

Beispiele:

- 1) Ein Kind zieht mit Hilfe einer Kordel einen Schlitten (Bild 8.2).
- 2) Ein Traktor zieht schräg an einem Waggon, der auf einem Gleis parallel zur Straße läuft (Bild 8.3).
- 3) Ein Boot wird vom Land aus durch eine Schleuse gezogen (Bild 8.4).



Bild 8.2

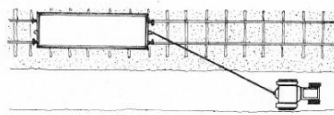


Bild 8.3

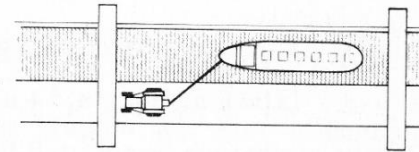


Bild 8.4

In solchen Fällen wirkt sich für die Bewegung nur der Anteil der Kraft $\vec{F}$ aus, der in der Wegrichtung, also in Richtung von $\vec{s}$ liegt; wir bezeichnen diesen Anteil mit $\vec{F}_s$ (Bild 8.5).

Schließen $\vec{F}$ und $\vec{s}$ einen Winkel der Größe α ein, so gilt in diesem Falle für die Arbeit, die die Kraft $\vec{F}$ längs des Weges $\vec{s}$ verrichtet, wegen $|\vec{F}_s| = |\vec{F}| \cos \alpha$:

$$W = |\vec{F}_s| |\vec{s}| = |\vec{F}| |\vec{s}| \cos \alpha.$$

Dieses Produkt $|\vec{F}| |\vec{s}| \cos \alpha$ definiert man als das Skalarprodukt von $\vec{F}$ und $\vec{s}$; man schreibt:

$$\vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| |\vec{s}| \cos \alpha.$$

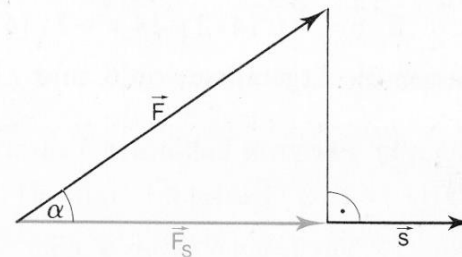


Bild 8.5

**Am Anfang
steht der
Projektions-
gedanke.**

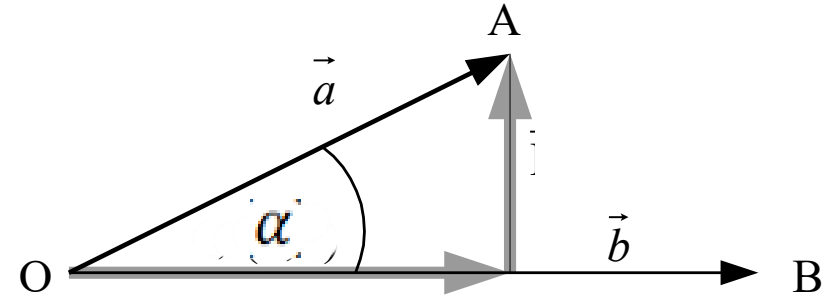
Skalarprodukt

ein geometrisch orientierter Zugang

Am Anfang steht der Projektionsgedanke.

Definition: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\alpha)$

Man sieht unmittelbar:



$0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$: $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ für $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$

$90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$: $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ für $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$

$\alpha = 0^\circ$: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$

$\alpha = 180^\circ$: $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|$

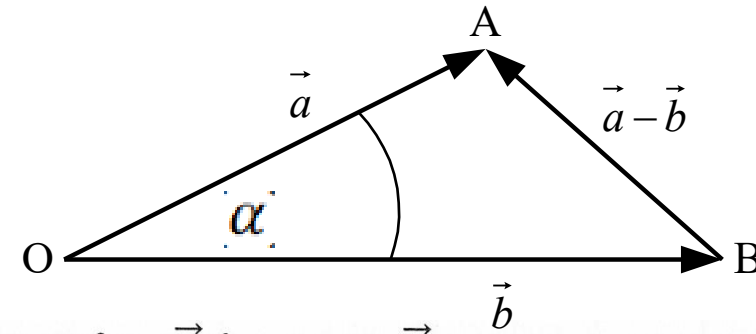
$\alpha = 90^\circ$: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ $\vec{a} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{a} > 0$

Skalarprodukt

„Algebraisierung“

Am Anfang steht der Projektionsgedanke.
Die Koordinatendarstellung folgt mit dem Kosinussatz.



$$1) \quad |\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

$$2) \text{ Es ist } \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}. \text{ Mithin gilt:}$$

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 \\ &= (a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2) + (a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2) + (a_3^2 - 2a_3b_3 + b_3^2) \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3). \end{aligned}$$

Durch Vergleich der beiden Darstellungen von $|\vec{a} - \vec{b}|^2$ ergibt sich unmittelbar:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Untersucht die vorgestellten Aufträge zum Skalarprodukt:
Ist der Zugang eher algebraisch oder geometrisch?

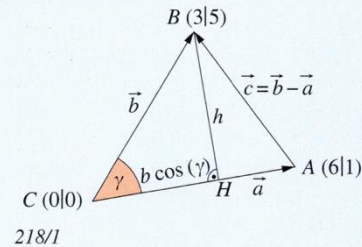
Einigt euch begründet auf einen der vier
Einstiegsaufträge als Zugang zum Skalarprodukt in
eurer nächsten Oberstufenlerngruppe

(oder liefert einen besseren 😊).

Zum Skalarprodukt (aus Fokus Mathematik)

Auftrag 1 Der Winkel zwischen Vektoren und das Skalarprodukt

Ein Dreieck ist bereits eindeutig festgelegt, wenn von den Seitenlängen und Innenwinkeln drei geeignete Größen bekannt sind, von denen mindestens eine Seitenlänge sein muss. Unter dieser Voraussetzung kann man es eindeutig konstruieren, die fehlenden Größen müssen sich also auch berechnen lassen.



Interpretieren Sie in der Abbildung 218/1 den Vektor $\vec{c} = \vec{AB}$ als Differenz der Vektoren $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, zeichnen Sie die

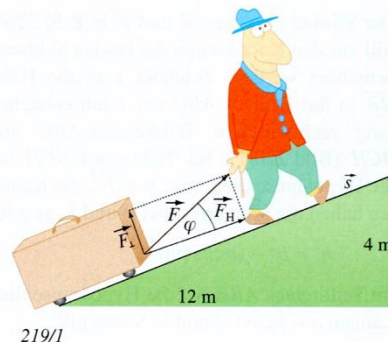
Höhe h_b ein und finden Sie (etwa mithilfe des Satzes von Pythagoras in den entstehenden rechtwinkligen Teildreiecken) ein Verfahren, mit dem man in dem abgebildeten Dreieck ABC den Winkel γ unmittelbar aus den Koordinaten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnen kann.

Zeigen Sie anschließend allgemein, wie man den Winkel zwischen zwei beliebigen Vektoren im zweidimensionalen Koordinatensystem aus deren Koordinaten berechnet.

Auftrag 3 Weniger Arbeit?

Wenn man einen Rollkoffer reibungsfrei eine schiefe Ebene hinaufzieht, muss man die Hangabtriebskraft überwinden, die den Koffer den Hang hinab zu ziehen versucht, und deshalb wenigstens eine entgegengesetzt gleich große Zugkraft aufwenden. Um nicht gebückt, sondern Rücken schonend aufrecht zu gehen, zieht die Person im Bild 219/1 unter einem solchen Winkel, der sogar eine größere Kraft notwendig werden lässt. Es wirkt nur ein Teil F_H der Zugkraft in Hangrichtung, ein Teil $F_\perp$ senkrecht zum Hang. Überlegen Sie sich anhand des Beispiels mit der Zugkraft

$\vec{F} = \begin{pmatrix} 3\text{N} \\ 2\text{N} \end{pmatrix}$ und dem Weg $\vec{s} = \begin{pmatrix} 12\text{m} \\ 4\text{m} \end{pmatrix}$, wie groß die verrichtete Arbeit W ist.



Bestimmen Sie zunächst die Anteile F_H und $F_\perp$ von F und berechnen Sie daraus die Arbeit W . Überlegen Sie sich anschließend die Auswirkungen einer Verdoppelung, Verdreifachung usw. des Wegvektors bzw. des Kraftvektors.

Welche bemerkenswerte Situation liegt vor, wenn Weg $\vec{s}$ und Kraft $\vec{F}$ durch $\vec{s} = \begin{pmatrix} 3a \\ a \end{pmatrix}$ und $\vec{F} = \begin{pmatrix} -b \\ 3b \end{pmatrix}$ beschrieben werden können? Dabei ist a eine beliebige Weglänge und b eine beliebige Kraftkomponente. Welche Verknüpfung von $\vec{s}$ und $\vec{F}$ führt direkt zum gleichen Ergebnis?

Auftrag 2 Minimalistischer Einkaufszettel

Der Einkaufszettel im Bild 218/2 lässt folgende Kurzschreibweise zu:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Sie bedeutet, dass 3 Packungen Apfelsaft zu je 2€, 4 Tafeln Schokolade zu je 1€ und 5 Großpackungen Chips zu je 6€ gekauft werden sollen.

Dabei steht der Apfelsaft immer ganz oben, danach kommt die Schokolade und an 3. Stelle stehen die Chips.

Im linken Vektor werden also die Stückzahlen („Stückzahlvektor“), im rechten jeweils die entsprechenden Einzelpreise notiert („Einzelpreisvektor“).

Geben Sie ein Verfahren an, mit dem man aus diesen beiden Vektoren den Gesamtpreis des Einkaufs berechnen kann.

Nach diesem Verfahren kann man beliebige Vektoren mit gleicher Komponentenanzahl miteinander „multiplizieren“. Untersuchen Sie, welche Eigenschaften dieses „Produkt“ hat. Schauen Sie dazu nach, welche Rechengesetze für die Multiplikation von Zahlen gelten.

Auftrag 4 ... Ansichtssache!

Untersuchen Sie die Eigenschaften des folgendermaßen definierten Produktes:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

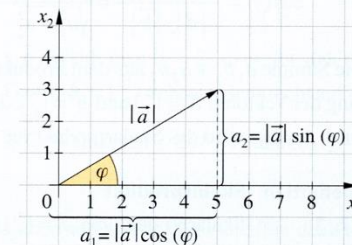
Gehen Sie wie folgt vor und beschreiben Sie jeweils die Auswirkungen auf das Ergebnis.

(I) Bei einem der beiden Vektoren wird nur die Länge verändert, indem man ihn mit einer Zahl multipliziert.

(II) In Formelsammlungen findet sich folgende Formel:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta).$$

Verwenden Sie das Ergebnis von (I), die Abbildung 219/2 und diese Formel, um zu zeigen, wie das angegebene Produkt bei fester Länge der Vektoren von deren Zwischenwinkel abhängt. Wie lässt sich das Produkt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ mithilfe des Winkels zwischen den Vektoren ausdrücken?



(III) Zeigen Sie, dass das analog definierte

$$\text{Produkt } \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

im dreidimensionalen Raum ebenso mithilfe des Winkels zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ausgedrückt werden kann.

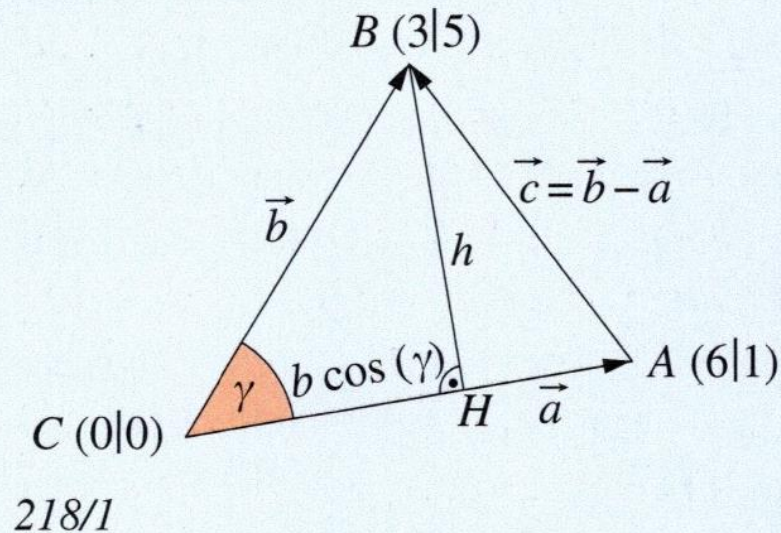
Auftrag 1 Der Winkel zwischen Vektoren und das Skalarprodukt

Ein Dreieck ist bereits eindeutig festgelegt, wenn von den Seitenlängen und Innenwinkeln drei geeignete Größen bekannt sind, von denen mindestens eine Seitenlänge sein muss. Unter dieser Voraussetzung kann man es eindeutig konstruieren, die fehlenden Größen müssen sich also auch berechnen lassen.

Interpretieren Sie in der Abbildung 218/1 den Vektor $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$ als Differenz der Vektoren $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, zeichnen Sie die

Höhe h_b ein und finden Sie (etwa mithilfe des Satzes von Pythagoras in den entstehenden rechtwinkligen Teildreiecken) ein Verfahren, mit dem man in dem abgebildeten Dreieck ABC den Winkel γ unmittelbar aus den Koordinaten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnen kann.

Zeigen Sie anschließend allgemein, wie man den Winkel zwischen zwei beliebigen Vektoren im zweidimensionalen Koordinatensystem aus deren Koordinaten berechnet.



Auftrag 2 Minimalistischer Einkaufszettel



218/2

Der Einkaufszettel im Bild 218/2 lässt folgende Kurzschreibweise zu:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Sie bedeutet, dass 3 Packungen Apfelsaft zu je 2€, 4 Tafeln Schokolade zu je 1€ und 5 Großpackungen Chips zu je 6€ gekauft werden sollen.

Dabei steht der Apfelsaft immer ganz oben, danach kommt die Schokolade und an 3. Stelle stehen die Chips.

Im linken Vektor werden also die Stückzahlen („Stückzahlvektor“), im rechten jeweils die entsprechenden Einzelpreise notiert („Einzelpreisvektor“).

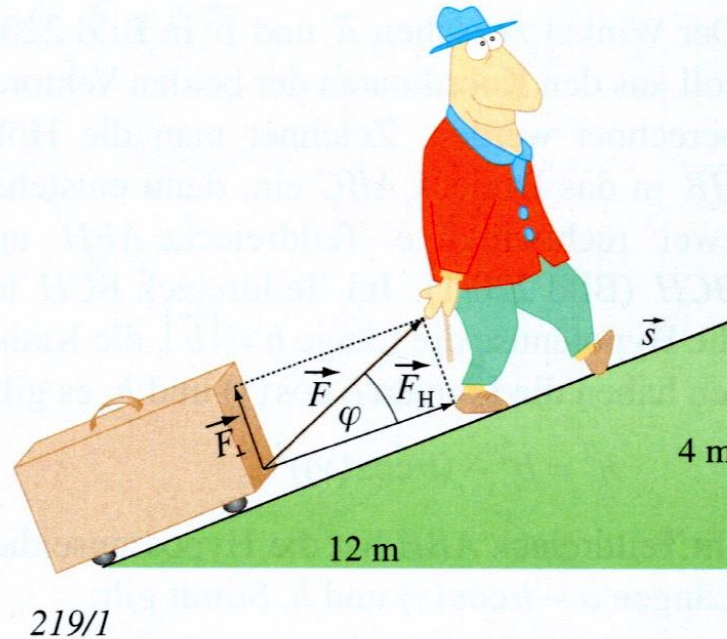
Geben Sie ein Verfahren an, mit dem man aus diesen beiden Vektoren den Gesamtpreis des Einkaufs berechnen kann.

Nach diesem Verfahren kann man beliebige Vektoren mit gleicher Komponentenanzahl miteinander „multiplizieren“. Untersuchen Sie, welche Eigenschaften dieses „Produkt“ hat. Schauen Sie dazu nach, welche Rechengesetze für die Multiplikation von Zahlen gelten.

aus: Fokus Mathematik 2012

Auftrag 3 Weniger Arbeit?

Wenn man einen Rollkoffer reibungsfrei eine schiefe Ebene hinaufzieht, muss man die Hangabtriebskraft überwinden, die den Koffer den Hang hinab zu ziehen versucht, und deshalb wenigstens eine entgegengesetzt gleich große Zugkraft aufwenden. Um nicht gebückt, sondern Rücken schonend aufrecht zu gehen, zieht die Person im Bild 219/1 unter einem solchen Winkel, der sogar eine größere Kraft notwendig werden lässt. Es wirkt nur ein Teil F_H der Zugkraft in Hangrichtung, ein Teil $F_\perp$ senkrecht zum Hang. Überlegen Sie sich anhand des Beispiels mit der Zugkraft



$\vec{F} = \begin{pmatrix} 3\text{N} \\ 2\text{N} \end{pmatrix}$ und dem Weg $\vec{s} = \begin{pmatrix} 12\text{m} \\ 4\text{m} \end{pmatrix}$, wie groß die verrichtete Arbeit W ist.

Bestimmen Sie zunächst die Anteile F_H und $F_\perp$ von F und berechnen Sie daraus die Arbeit W . Überlegen Sie sich anschließend die Auswirkungen einer Verdoppelung, Verdreifachung usw. des Wegvektors bzw. des Kraftvektors.

Welche bemerkenswerte Situation liegt vor, wenn Weg $\vec{s}$ und Kraft $\vec{F}$ durch $\vec{s} = \begin{pmatrix} 3a \\ a \end{pmatrix}$ und $\vec{F} = \begin{pmatrix} -b \\ 3b \end{pmatrix}$ beschrieben werden können? Dabei ist a eine beliebige Weglänge und b eine beliebige Kraftkomponente. Welche Verknüpfung von $\vec{s}$ und $\vec{F}$ führt direkt zum gleichen Ergebnis?

aus: Fokus Mathematik 2012

Auftrag 4 ... Ansichtssache!

Untersuchen Sie die Eigenschaften des folgendermaßen definierten Produktes:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

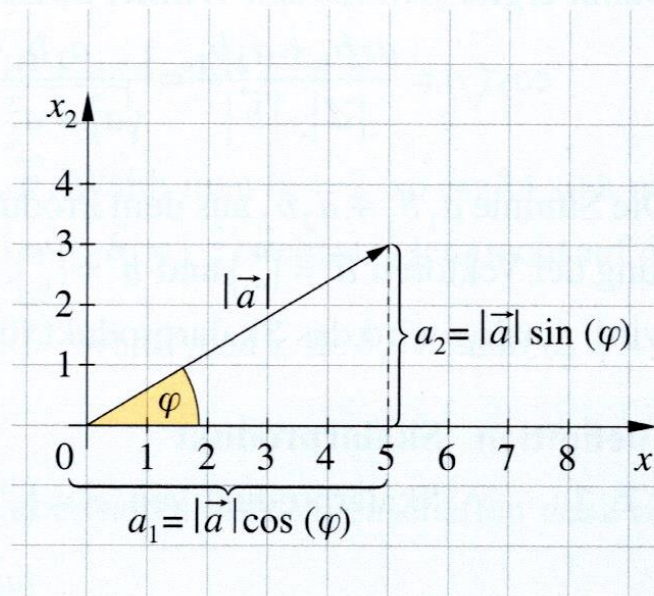
Gehen Sie wie folgt vor und beschreiben Sie jeweils die Auswirkungen auf das Ergebnis.

(I) Bei einem der beiden Vektoren wird nur die Länge verändert, indem man ihn mit einer Zahl multipliziert.

(II) In Formelsammlungen findet sich folgende Formel:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta).$$

Verwenden Sie das Ergebnis von (I), die Abbildung 219/2 und diese Formel, um zu zeigen, wie das angegebene Produkt bei fester Länge der Vektoren von deren Zwischenwinkel abhängt. Wie lässt sich das Produkt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ mithilfe des Winkels zwischen den Vektoren ausdrücken?



219/2

(III) Zeigen Sie, dass das analog definierte

$$\text{Produkt } \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

im dreidimensionalen Raum ebenso mithilfe des Winkels zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ausgedrückt werden kann.

aus: Fokus Mathematik 2012

Das Vektorprodukt erkunden

<https://www.geogebra.org/m/jjk8reu7>

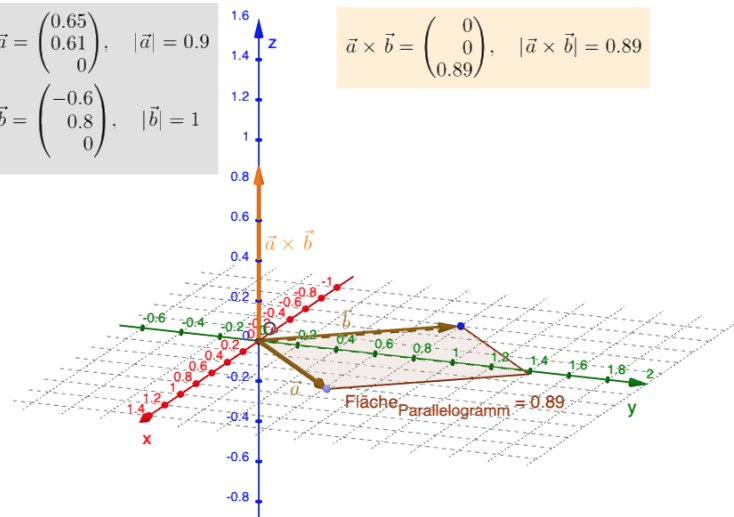
Vektorprodukt erkunden

Autor: dfrohn

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0.65 \\ 0.61 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\vec{a}| = 0.9$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -0.6 \\ 0.8 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\vec{b}| = 1$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.89 \end{pmatrix}, \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = 0.89$$



- Was fällt auf?
- Was passiert, wenn die Vektoren parallel zueinander sind?
- Was passiert, wenn die Vektoren orthogonal zueinander sind?
- Wie kann man einen der beiden Vektoren ändern, ohne dass sich das Vektorprodukt ändert?

Arbeitsblatt

Wie findet man einen Normalenvektor?

Erinnerung: Ein Vektor $\vec{n}$ heißt Normalenvektor einer Ebene E , wenn $\vec{n}$ orthogonal zu jedem Richtungsvektor der Ebene verläuft. Für eine Ebene E mit der Parametergleichung $\vec{x} = \vec{u} + s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$ muss ein Normalenvektor also die Gleichungen $\vec{n} \cdot \vec{a} = 0$ und $\vec{n} \cdot \vec{b} = 0$ erfüllen.

1. Berechnen Sie jeweils einen Normalenvektor zur Ebene E :

a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Sind allgemein $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ Richtungsvektoren einer Ebene E , so ist für einen Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ das folgende Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{array}{l} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0 \end{array} \quad \left[\begin{array}{l} \cdot b_1 \\ \cdot (-a_1) \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{l} \cdot b_2 \\ \cdot (-a_2) \end{array} \right]$$

2. Lösen Sie dieses Gleichungssystem durch die angedeuteten Umformungen und zeigen Sie so, dass

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

3. Wenden Sie die gefundene Bedingung aus 2.) auf die Beispiele aus 1.) an und überprüfen Sie Ihre Ergebnisse.

© Friedrich Verlag GmbH | mathematik lehren 236 | 2023 | Zum Beitrag S. 38-44

Inhalt	Aktivitäten zum Skalarprodukt	Aktivitäten zum Vektorprodukt
Motivation durch Orthogonalität	Untersuchung der Orthogonalität zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit dem Satz des Pythagoras: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$	Finden einer Formel für einen Vektor $\vec{c}$, der zu zwei (nicht parallelen) Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal ist: $\vec{c} = t \cdot \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$
arithmetische Definition	$\vec{a} * \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$	$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$
Erkundung mit DGS	Untersuchung von orthogonalen und parallelen Vektoren, spitzen und stumpfen Winkeln; Zusammenhang zur Länge der Vektoren; Veränderung eines Vektors, so dass das Skalarprodukt konstant bleibt	Untersuchung von orthogonalen und parallelen Vektoren, spitzen und stumpfen Winkeln; Zusammenhang zur Länge der Vektoren; Veränderung eines Vektors, so dass das Vektorprodukt konstant bleibt
Untersuchung von Spezialfällen	$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} * \vec{b} = 0$ $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} * \vec{b} = \pm \vec{a} \cdot \vec{b} $	$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} $

Inhalt	Aktivitäten zum Skalarprodukt	Aktivitäten zum Vektorprodukt
arithmetische Definition	$\vec{a} * \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$	$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$
Untersuchung von Verknüpfungseigenschaften	Kommutativgesetz: $\vec{a} * \vec{b} = \vec{b} * \vec{a}$ Distributivgesetz: $\vec{a} * (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} * \vec{b} + \vec{a} * \vec{c}$	Antikommutativgesetz: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ Distributivgesetz: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
Zerlegung in parallelen und orthogonalen Anteil	$\vec{a} * \vec{b} = \vec{a} * (\vec{b}_{\parallel} + \vec{b}_{\perp}) = \vec{a} * \vec{b}_{\parallel} + \vec{a} * \vec{b}_{\perp} = \vec{a} * \vec{b}_{\parallel}$ Das Skalarprodukt hängt nur vom parallelen Anteil ab.	$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times (\vec{b}_{\parallel} + \vec{b}_{\perp}) = \vec{a} \times \vec{b}_{\parallel} + \vec{a} \times \vec{b}_{\perp} = \vec{a} \times \vec{b}_{\perp}$ Das Vektorprodukt hängt nur vom orthogonalen Anteil ab.
Herleitung einer geometrischen Formel	$\vec{a} * \vec{b} = \vec{a} * \vec{b}_{\parallel} = \pm \vec{a} \cdot \vec{b}_{\parallel} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos(\alpha)$	$ \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}_{\perp} = \vec{a} \cdot \vec{b}_{\perp} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \sin(\alpha)$
Anwendungen	Winkelberechnung: $\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{a} * \vec{b}}{ \vec{a} \cdot \vec{b} } \right)$ Normalenform einer Ebene: $\vec{n} * (\vec{x} - \vec{a}) = 0$ oder: $\vec{n} * \vec{x} = \vec{n} * \vec{a}$ Abstandsrechnungen, z. B. für den Abstand d eines Punktes $\vec{p}$ zur Ebene E mit $\vec{n} * \vec{x} = \vec{n} * \vec{a}$: $d = \frac{ \vec{n} * (\vec{p} - \vec{a}) }{ \vec{n} }$	Winkelberechnung: $\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{ \vec{a} \times \vec{b} }{ \vec{a} \cdot \vec{b} } \right)$ Berechnung eines Normalenvektors einer Ebene aus zwei Richtungsvektoren: $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ Abstandsrechnungen, z. B. für den Abstand d eines Punktes $\vec{p}$ zur Geraden g mit $\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{b}$: $d = \frac{ \vec{b} \times (\vec{p} - \vec{a}) }{ \vec{b} }$

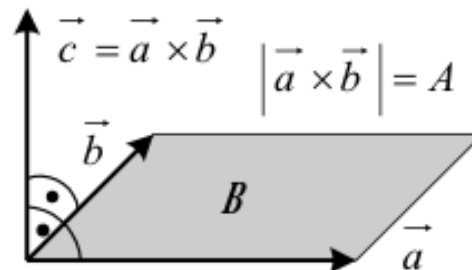
Tab. 1: Mögliche Wege zur Erarbeitung von Skalar- und Vektorprodukt

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

Das Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ ist eine Verknüpfung zweier Vektoren im 3D-Raum.

Es liefert als Ergebnis einen Vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ mit folgenden Eigenschaften:

- Der Vektor $\vec{c}$ ist orthogonal zu der Ebene, die von den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.
- Sein Betrag $|\vec{c}|$ ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den beiden Vektoren aufgespannt wird. $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = A$
- Seine Orientierung ergibt sich nach der Drei-Finger-Regel der rechten Hand aus der Orientierung der beiden Vektoren.



Grundvorstellung	Skalarprodukt	Vektorprodukt
Produktvorstellung (verallgemeinertes Produkt)	$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ Produkteigenschaften: • Distributivität • Kommutativität	$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$ Produkteigenschaften: • Distributivität • Antikommutativität (!)
Orthogonalitätsvorstellung	Skalarprodukt = 0 genau dann, wenn die Vektoren orthogonal sind	Vektorprodukt orthogonal zu beiden (nicht parallelen) Vektoren
Winkelvorstellung	Betrag des Skalarprodukts ist bei parallelen Vektoren am größten Skalarprodukt positiv bei spitzen Winkeln, negativ bei stumpfen Winkeln	Betrag des Vektorprodukts ist bei orthogonalen Vektoren am größten, bei parallelen Vektoren am kleinsten (= 0) Rechte-Hand-Regel
Projektionsvorstellung	Skalarprodukt hängt bei konstantem orthogonalem Anteil nur vom parallelen Anteil ab	Vektorprodukt hängt bei konstantem parallelen Anteil nur vom orthogonalen Anteil ab
Flächeninhaltsvorstellung	Betrag des Skalarprodukts als Rechtecksflächeninhalt (Produkt der Länge eines Vektors mit der Länge des Projektionsvektors)	Betrag des Vektorprodukts als Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms

Tab. 2: Grundvorstellungen zum Skalar- und Vektorprodukt

Quelle:
Mathematik lehren 236

Ein Spat

(oder Parallelepip)

$$A = (6, 1, 4.5)$$

$$B = (9, 0, 3)$$

$$C = (12, 3, 4.5)$$

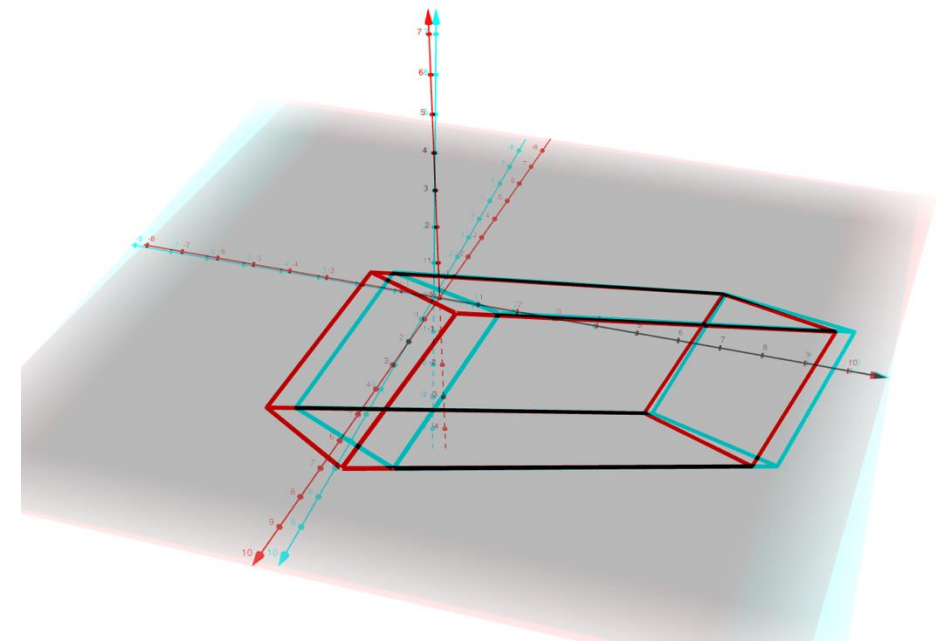
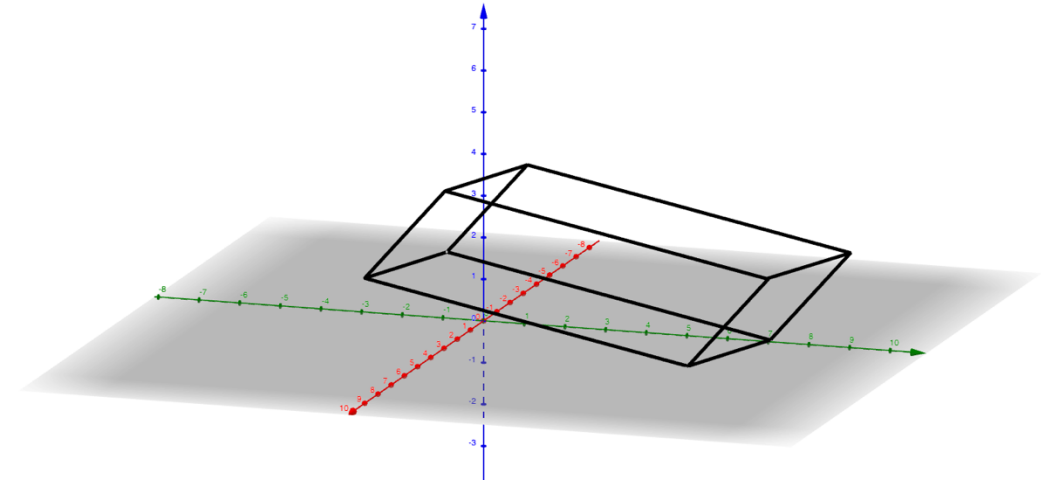
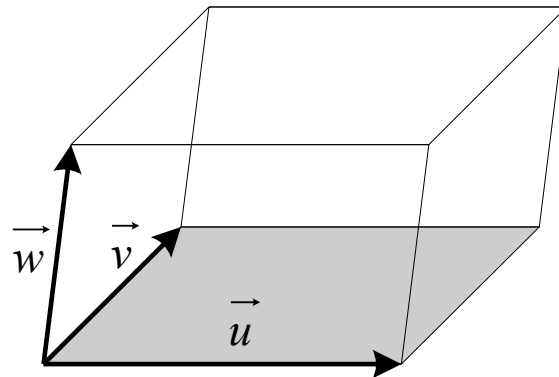
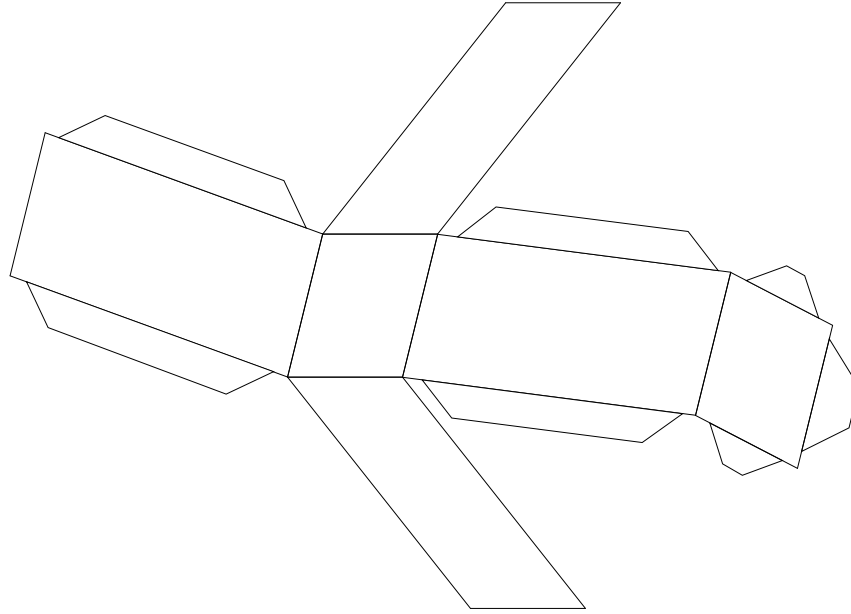
$$D = (9, 4, 6)$$

$$E = (0, 7, 1.5)$$

$$F = (3, 6, 0)$$

$$G = (6, 9, 1.5)$$

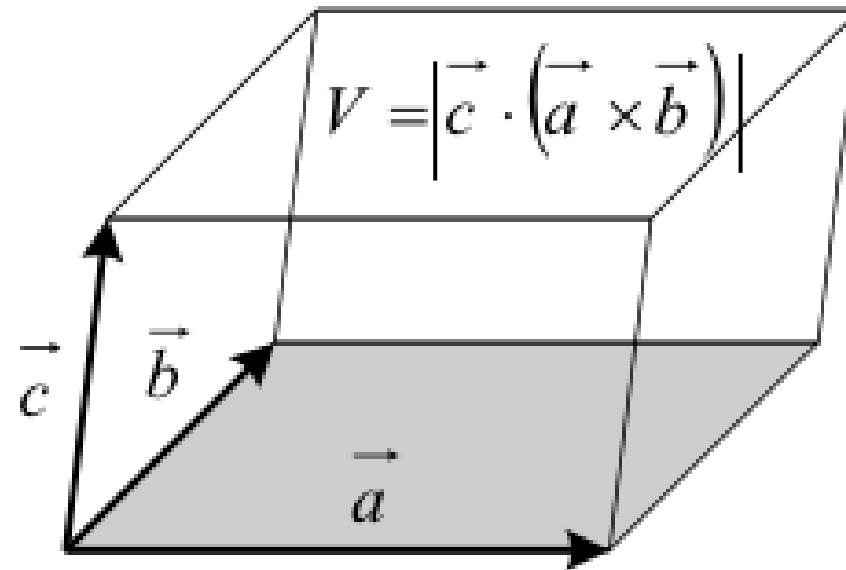
$$H = (3, 10, 3)$$



Das Spatprodukt

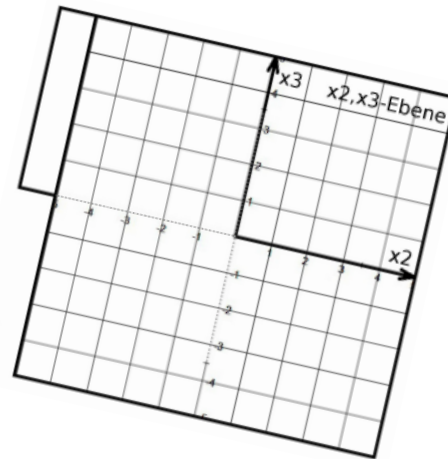
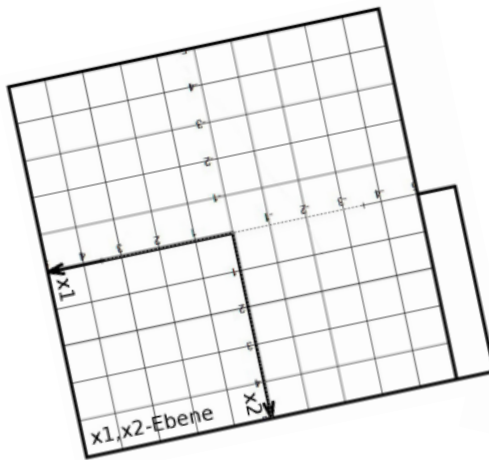
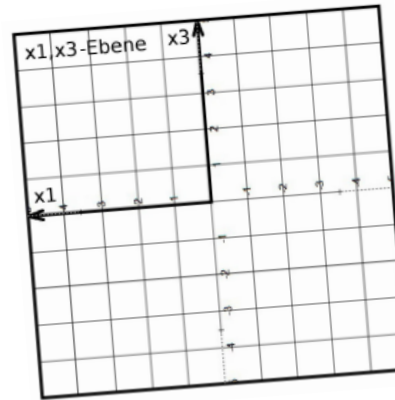
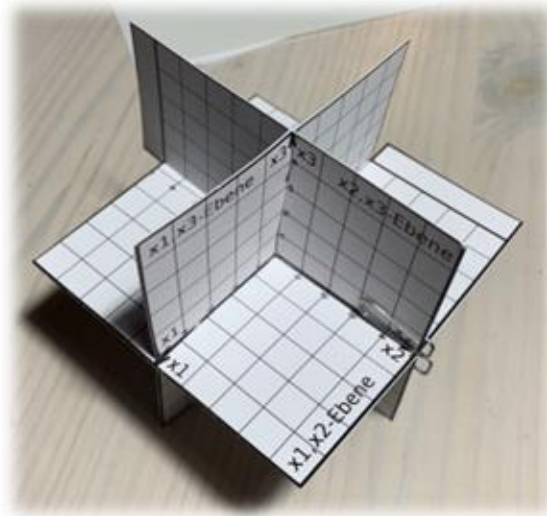
Die Kombination $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ von Kreuzprodukt und Skalarprodukt heißt Spatprodukt.

Das Ergebnis ist ein Skalar. Der Betrag ist gleich dem Volumen des von den drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Körpers (Spat oder Parallelelepiped).

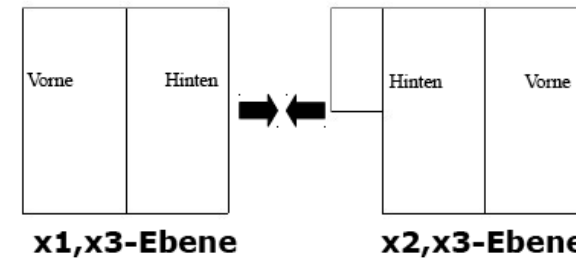


„Ansichtssache“

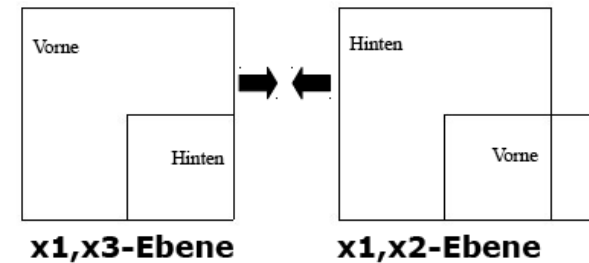
Ein Koordinatensystem zum Falten



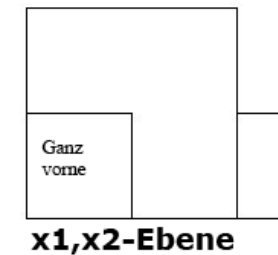
1. Schneide die drei Ebenen aus.
2. Schneide entlang der gestrichelten Linien.
3. Füge die **x1,x3-Ebene** und die **x2,x3-Ebene** wie folgt ineinander:



4. Füge die **x1,x3-Ebene** und die **x1,x2-Ebene** wie folgt ineinander:

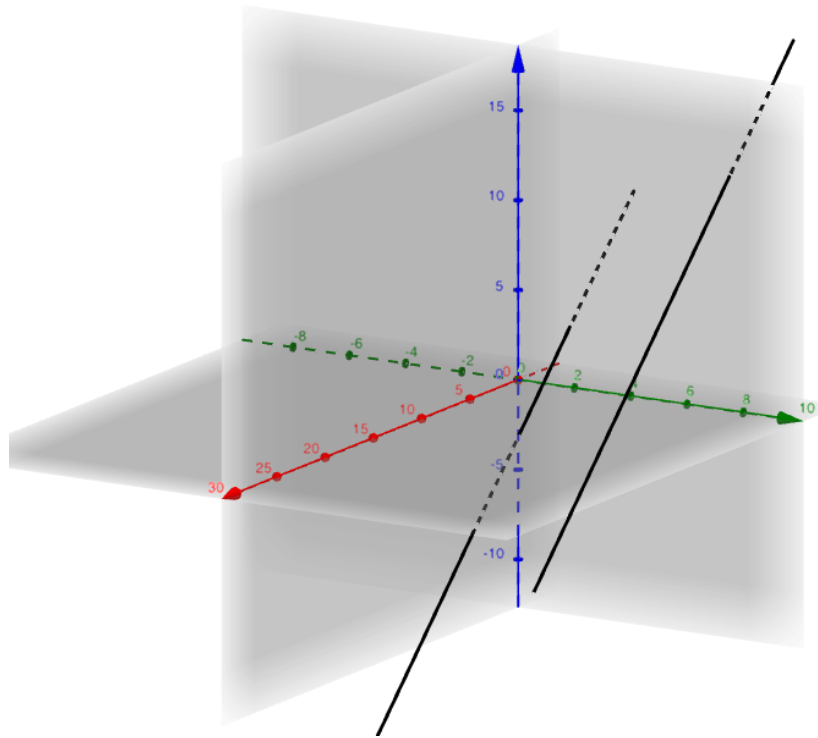


5. Bringe nun den gekennzeichneten Teil der **x1,x2-Ebene** ganz nach vorne:



-> Kopiervorlage auf Moodle ☺

Geogebra mit Brille

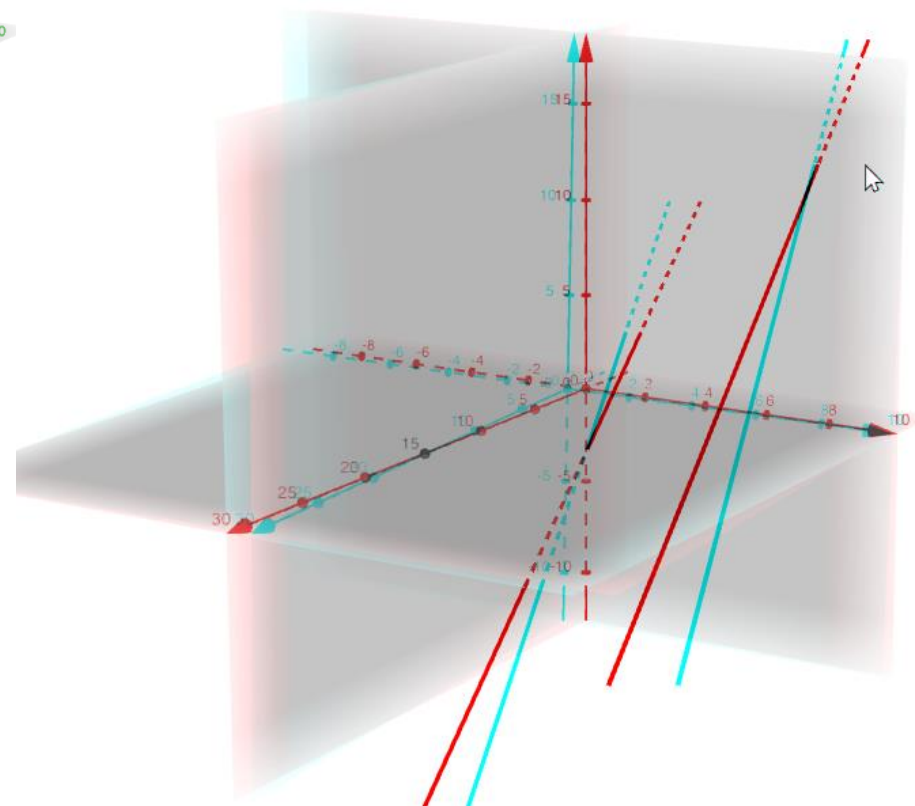
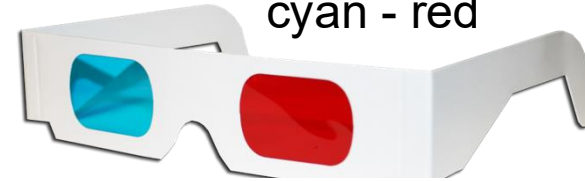


└─ ⚙ 3D Grafik ...

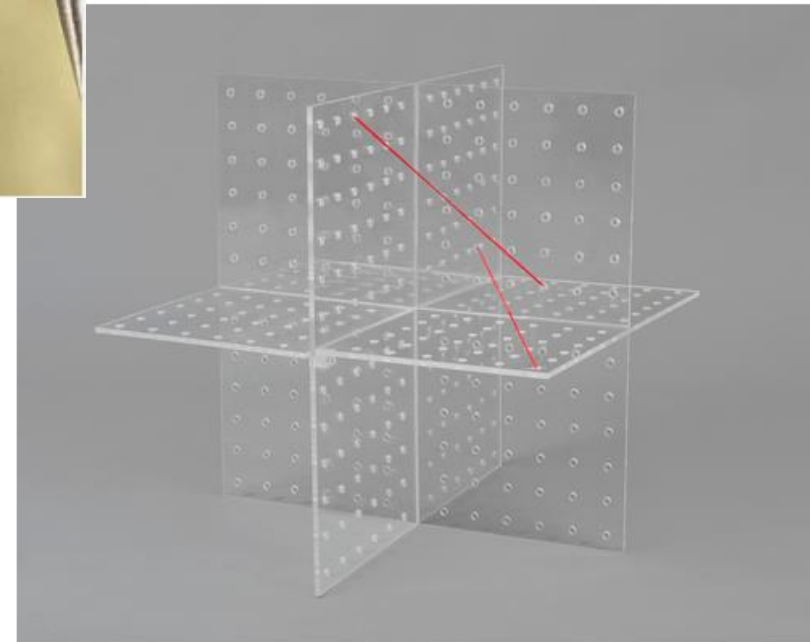
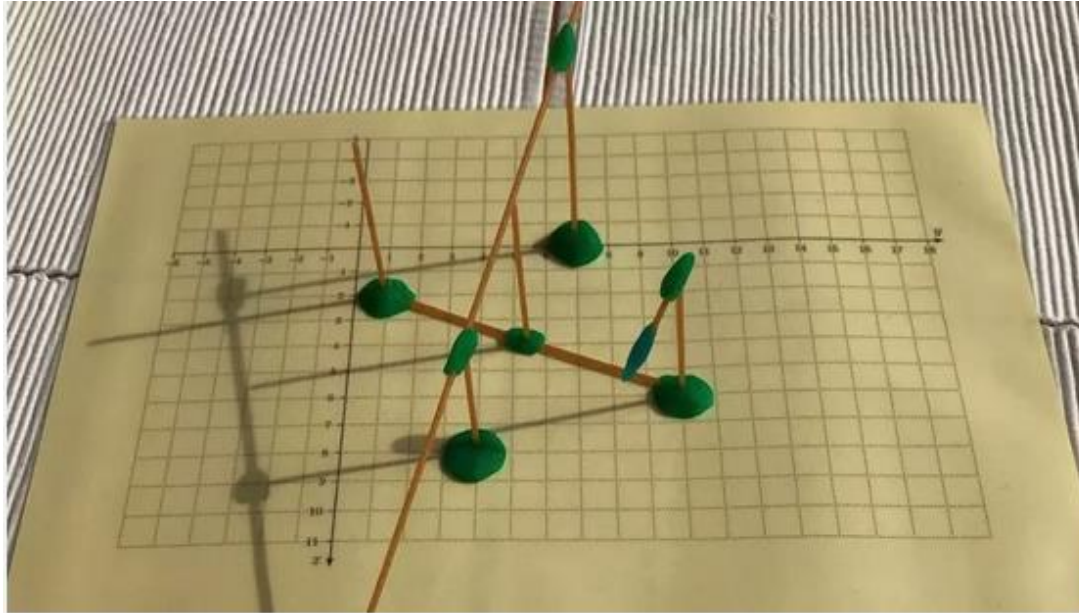
└─ Brille



Anaglyphenbrille
cyan - red



Weitere Modelle



Abstände

Abstand paralleler Geraden

Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

- a) Zeigen Sie, dass die beiden Geraden parallel sind.
- b) Formulieren Sie Ideen für mindestens drei verschiedene Verfahren zur Bestimmung des Abstandes der beiden Geraden.
- c) Führen Sie eines der Verfahren rechnerisch aus und geben Sie den Abstand an.

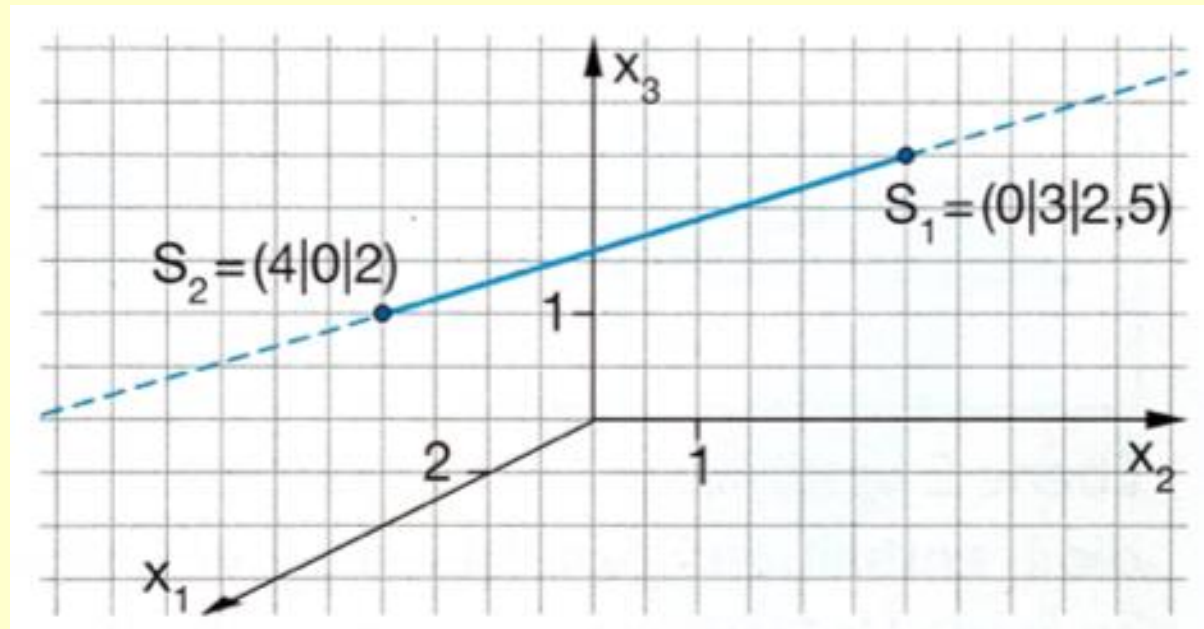
Diese Aufgabe ist eine Lernaufgabe. Die SuS kennen noch kein „Verfahren“. Überlegt, welche Ideen genannt werden könnten.

Abstand Punkt - Gerade

Erarbeitet verschiedene Möglichkeiten, den Abstand des Punktes $P(3|4|0)$ von der unten abgebildeten Gerade zu bestimmen.

Nutzt/erprobt dabei analoge und digitale visuelle Unterstützungsmöglichkeiten.

Gestaltet für einen Lösungsweg eine Tafelbild-würdige Ergebnisfolie.



aus: Mathematik Neue Wege

Abstandsberechnung Punkt - Gerade

Vorschläge zum Vorgehen:

- Lotfußpunktverfahren
- Minimum einer Funktion
- ...

Abstand Punkt – Gerade

- eine Formel -

Der Abstand des Punktes P zu einer Geraden $g : \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{u}$ im dreidimensionalen Raum beträgt $d = \frac{|(\vec{p} - \vec{a}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$.

(Wie) kann man diese Formel anschaulich einsehen

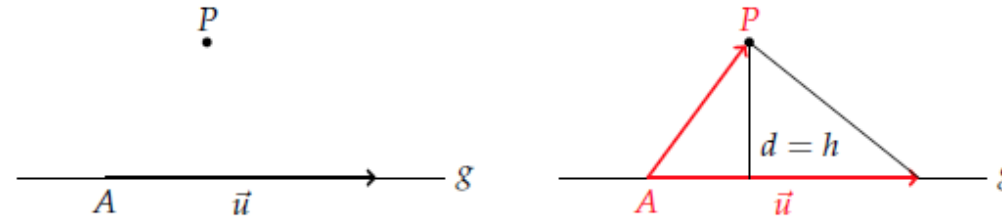


Abstand Punkt – Gerade

- eine Formel -

Der Abstand des Punktes P zu einer Geraden $g : \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{u}$ im dreidimensionalen Raum beträgt $d = \frac{|(\vec{p} - \vec{a}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$.

Herleitung:



Seinen Flächeninhalt können wir mithilfe des Vektorproduktes angeben:

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AP} \times \vec{u}|.$$

Andererseits kennen wir aus der Mittelstufe die Formel $A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$. Die Höhe h wiederum ist der Abstand d des Punktes zur Geraden, die Grundseite g die Länge des Richtungsvektors. Durch Einsetzen und Umformen erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot g \cdot h &= \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AP} \times \vec{u}| & | \text{ ersetze } g = |\vec{u}|; h = d; \overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a} \\ \frac{1}{2} \cdot |\vec{u}| \cdot d &= \frac{1}{2} \cdot |(\vec{p} - \vec{a}) \times \vec{u}| & | \cdot 2 : |\vec{u}| \\ d &= \frac{|(\vec{p} - \vec{a}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} \end{aligned}$$

Hesse'sche Normalenform

Für das Abstandsproblem Punkt – Ebene kann eine spezielle Normalenform helfen, den Abstand direkt zu berechnen.

In der Hesse'schen Normalenform muss der Normalenvektor die Länge 1 haben.

Normalenform der Ebene aufstellen:

$$E: \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{q}) = 0$$

$$P = (1 \mid 6 \mid 2)$$

$$E: \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Hesse'sche Normalenform aufstellen:

Normalenvektor $\vec{n}_0$ der Länge 1 bestimmen: $\vec{n}_0 = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}$

$$E: \vec{n}_0 \cdot (\vec{x} - \vec{q}) = 0 \text{ mit } |\vec{n}_0| = 1$$

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$E: \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0$$

In obigen Term für $\vec{x}$ den **Vektor $\vec{p}$ einsetzen** und den **Betrag dieses Terms bilden**.

So erhalten wir direkt den Abstand von P zu E

$$d(P, E) = |\vec{n}_0 \cdot (\vec{p} - \vec{q})|$$



$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \right| \\ &= \frac{1}{3} \cdot (2 - 2 + 6 - 3 - 4 + 4) \\ &= 1 = d(P, E) \end{aligned}$$

aus:

MathematikNeue Wege –
Lineare Algebra, Analytische
Geometrie. Schroedel 2010

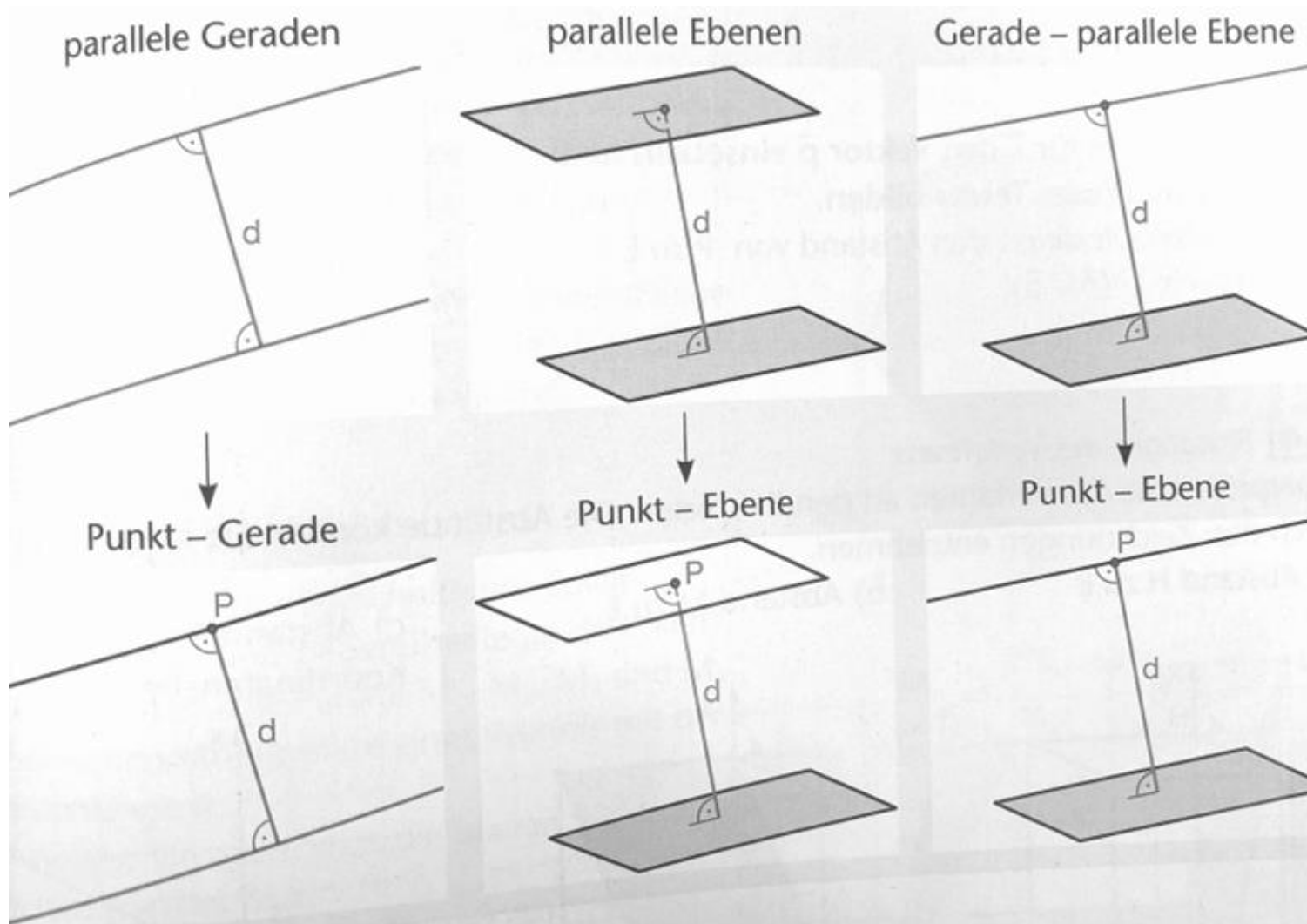
(Wie) kann man diese Formel anschaulich einsehen?

Abstandsberechnungen

- didaktische Bemerkungen -

- Nachdenken über räumliche Situationen mit Hilfe von Vektoren
- keine „Kochrezepte“ lehren, keine unverstandenen Rechenverfahren blindlings anwenden lassen
- mit Hilfe von Skizzen, z.B. Projektion eines Vektors, Ansätze anschaulich begründen lassen
- Eher Gemeinsamkeiten als Unterschiede zwischen den verschiedenen Ebenendarstellungen herausarbeiten.
- SuS Ideen skizzieren und diskutieren lassen. Das erfordert von Lerngruppe und Lehrkraft sehr viel Aufmerksamkeit und Zeit beim Zuhören und Erwidern. Das Ergebnis lohnt die Mühe 😊

Grundlegende Abstandsprobleme



Schleswig-Holstein. Der echte Norden.