

4.4.4 Ein arithmetischer Zugang zum Skalarprodukt

Sollen in einem Lehrgang der Linearen Algebra Anwendungen außerhalb der Geometrie bzw. Physik im Mittelpunkt stehen, so ist – auch aufgrund der Tatsache, dass in diesem Falle häufig mit n -Tupeln mit $n > 3$ zu arbeiten ist – ein arithmetischer Zugang zum Skalarprodukt in Erwägung zu ziehen.

Einführung des Skalarprodukts über Stücklisten und Preisvektoren

In Beispiel 3.1 wurden Stücklisten als Beispiele für n -Tupel betrachtet. Es werden nun die Stückpreise der einzelnen Gleisbauteile einbezogen.

Gleisstück gerade	2,40 €	Weiche links	17,98 €
Gleisstück gebogen	2,70 €	Weiche rechts	17,98 €
Anschluss-Gleisstück	6,29 €	Weichenantrieb	12,98 €

Daraus ergibt sich (bei Einhaltung der Reihenfolge der Teile, die in Beispiel 3.1 für die Stücklisten gewählt wurde) der *Preisvektor*

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 2,40 \\ 2,70 \\ 6,29 \\ 17,98 \\ 17,98 \\ 12,98 \end{pmatrix}.$$

Siehe unten

Unter Heranziehung der Stückliste eines Sortiments, die wir im Folgenden als *Teilevektor* bezeichnen, z. B.

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

für das Ergänzungssortiment 2, lässt sich der Gesamtpreis eines Sortiments durch die Summe der Produkte einander entsprechender Komponenten des Teile- und des Preisvektors ausdrücken:²⁵

$$15 \cdot 2,40 + 8 \cdot 2,70 + 1 \cdot 6,29 + 2 \cdot 17,98 + 2 \cdot 17,98 + 4 \cdot 12,98 = 187,73 \quad (\text{in €})$$

Diese Produktsumme, welche den Gesamtpreis ergibt, wird im Folgenden als Skalarprodukt der Vektoren $\vec{e}_2$ und $\vec{p}$ bezeichnet.

²⁵ Der Gesamtpreis bezieht sich darauf, dass die Teile einzeln gekauft werden. Beim Kauf von Sortimentskästen werden i. Allg. andere, meist niedrigere Preise berechnet.

► **Definition 4.4** Als *Skalarprodukt* zweier Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

bezeichnet man die Summe der Produkte der einander entsprechenden Komponenten von $\vec{u}$ und $\vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \dots + u_n \cdot v_n = \sum_{i=1}^n u_i \cdot v_i$$

Beispiel 3.1

Ein Modellbahnhersteller bietet verschiedene Gleisbauteile (siehe Abb. 3.21) sowohl einzeln als auch in Sortimentskästen an.

	Basissortiment	Ergänzungs-sortiment 1	Ergänzungs-sortiment 2
Gleisstück gerade (168,9 mm)	3	8	15
Gleisstück gebogen (45°)	8	4	8
Anschluss-Gleisstück	1	0	1
Weiche links	0	1	2
Weiche rechts	0	1	2
Weichenantrieb	0	2	4

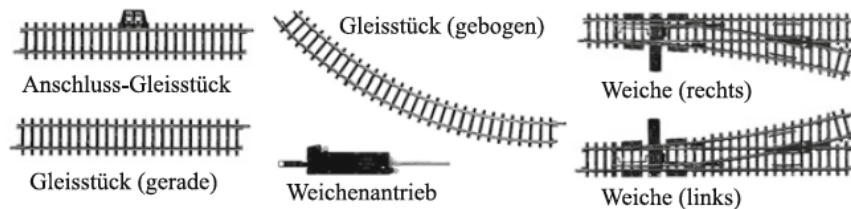


Abb. 3.21 Gleisteile für Modelleisenbahnen

Die Bestandteile der Sortimente lassen sich durch geordnete 6-Tupel natürlicher Zahlen angeben, die meist in Spaltenschreibweise geschrieben werden:

$$B = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Unter Verwendung dieser 6-Tupel (bzw. allgemein mit n -Tupeln) lassen sich Rechenoperationen ausführen: Man addiert zwei n -Tupel, indem man jeweils zusammengehörige (an derselben Stelle stehende) Komponenten der beiden addiert, und multipliziert ein n -Tupel mit einer Zahl k , indem man jede Komponente des n -Tupels mit k multipliziert. So lässt sich z. B. übersichtlich darstellen, wie viele der jeweiligen Bauteile insgesamt in 18 Basissortimenten, zehn Ergänzungssortimenten 1 und fünf Ergänzungssortimenten 2 enthalten sind:

$$N = 18 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 10 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 \\ 144 \\ 18 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 80 \\ 40 \\ 0 \\ 10 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 75 \\ 40 \\ 5 \\ 10 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 209 \\ 224 \\ 23 \\ 20 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix}$$