

HUBERT WAGLER, HOLGER WUSCHKE

Linearkombinationen als Kommunikationsanlass

Welche Vektoren würdest du wählen und wie oft?

LERNGRUPPE: ab Klasse 11**IDEE:** eigenständig Linearkombination von Vektoren begründet bilden**VORWISSEN:** Berechnung von Linearkombinationen mithilfe vorgegebener Vektoren**ARBEITSBLATT 1-3:** Einstieg, Spielanleitung, Reflexion**MATERIAL:** Kartensatz (6 x 24 Karten)**ZEITBEDARF:** 1–2 Unterrichtsstunden

Mit der Einführung der Analytischen Geometrie in der Sek. II werden die geometrischen Konzepte der Planimetrie und Stereometrie aus der Sek. I auf die Vektorrechnung übertragen. Die Einbettung in einen Vektorraum ermöglicht somit neben der qualitativen, händischen Zeichnung bzw. Konstruktion nun auch eine quantitative, arithmetische Berechnung bzw. Problemlösung durch algebraische Strukturen. Dadurch soll eine Auseinandersetzung der Lernenden erfolgen, „dass sich und wie sich geometrische Fragestellungen damit auf arithmetisch-algebraische Fragestellungen zurückführen und auf diesem Weg auch beantworten lassen“ (Vohns 2013, S. 150). Dies kann in der Unterrichtspraxis recht schnell in einen einseitigen, am Kalkül orientierten Mathematikunterricht münden (Borneleit u. a. 2001, S. 79).

Um einer derartigen Situation vorzubeugen, wird gefordert, „die kalkülorientierten Teile in Zeitaufwand und Wertigkeit zu Gunsten der inhaltlich orientierten Teile zu reduzieren“ und eine „deutliche Trennung zwischen der Idee und

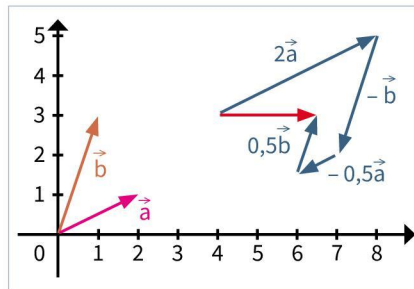


Abb. 1: Linearkombination für vorgegebene Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Bedeutung eines mathematischen Begriffs oder entsprechender Grundvorstellungen über mathematische Verfahren einerseits und dem kalkülhaften Umgang damit andererseits“ herzustellen (Henn/Filler 2015, S. 3 f.). Ergänzend dazu werden in den Bildungsstandards die Anwendungen und innermathematischen Aufgaben als zu beiden Teilen gleich wichtig beschrieben (KMK 2012, S. 12).

Fachdidaktischer Hintergrund

Linearkombinationen als Kalkülspielwiese

Das Konzept einer linearen Kombination $\vec{x} = \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n$ von n Vektoren ist bereits eine Definition, die auf einem Kalkül basiert. Dabei ist die geometrische Veranschaulichung mithilfe der Konzepte *Vektoraddition* und *skalare Multiplikation* gerade für Vektoren des $\mathbb{R}^2$ recht schnell auch parallel im Unterricht thematisierbar.

Somit ist das Konzept der Linearkombination als Verbindungsvektor zwischen Anfang und Ende einer Aneinanderreihung von Vektoren (**Abb. 1**) visualisierbar.

Bereits in dem Beispiel aus **Abb. 1** wird deutlich, dass die Linearkombination $2\vec{a} - \vec{b} = 0,5\vec{a} + 0,5\vec{b}$ grafisch gut visualisierbar ist, während die Berechnung (mit oder ohne Zusammenfassung der gleichen Vektoren) fehleranfällig sein kann:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 0,5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0,5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daher können sich Linearkombinationen auf der Ebene des Kalküls recht schnell in eine Spielwiese wiederholter, gleichartiger Aufgaben verwandeln, bei denen die geometrische Veranschaulichung schnell aufgezeichnet ist.

Zahlenblick für Vektoren

Nichtsdestotrotz sollen die Lernenden die arithmetisch-algebraische Ebene beherrschen, um daran auch die geometrischen Repräsentationen zu erkennen. Dies ist letztlich „die Grundlage eines (ansatzweisen) strukturellen Verständnisses von Vektorräumen“ (Henn/Filler 2015, S. 8) sowie die Grundlage für die Konzepte kollinear, komplanar oder linear unabhängiger Vektoren und der Basis von Vektoren. Dafür ist es notwendig, dass die Schülerinnen und Schüler eine Art „Zahlenblick für Vektoren“ entwickeln. Der Fokus auf das Kalkül scheint an dieser Stelle der Vektorrechnung sogar sinnvoll, um so im späteren Lernbereich anhand der arithmetisch-algebraischen Darstellung der Vektoren eine geometrische Interpretation vornehmen zu können. Dabei geht es nicht darum, eine vorgegebene Linearkombination auszurechnen, sondern eine mögliche Linearkombination zu identifizieren.

Eine typische Strategie, welche hier zum Tragen kommt, ist das „scharfe

1 WISSENSWERT

Impulse zur Kommunikation

Die Spielanleitung

Gerade um die mathematische Kommunikation für die Lernenden unbewusst in den Fokus zu setzen, werden diesbezügliche Arbeitsanweisungen auf ein Minimum beschränkt. So ist die Art und Weise der Präsentation einer gefundenen Lösung nicht explizit vorgegeben. Die Lernenden sollen dadurch in den Konflikt gebracht werden, während des Spiels kritisch die eigene sowie die von jedem anderen Gruppenmitglied gewählte Art und Form der Kommunikation zu reflektieren.

Das Tutorial (Erklärung des Spiels)

Hier bietet sich eine Kommunikation nach der Spielprobe im Klassenverband oder in einzelnen Teams an.

Alternative Spielregeln

Diese können von der einzelnen Lerngruppe im Austausch eigenständig aufgestellt werden. Dabei stellt sich zunächst die Frage, was abgeändert wird und ob das Spiel anschließend schwer bzw. spannender wird und warum.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	← Vektorkarten	
$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	← Tutorialkarten	
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	← Kombination $\vec{a} + \vec{b}$	
$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$		
$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$	← Kombination $\vec{a} - \vec{b}$	
$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$	← Kombination $\lambda \cdot \vec{a} + \vec{b}$	
$\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$	← Kombination $\lambda \cdot \vec{a} - \vec{b}$	
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$		
$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	← Kombination $\lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$	
$\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$		
$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$	← Kombination $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$	
$\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	← Nullvektor	

$r, s, t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
 $\lambda, \mu \in \mathbb{Z} \setminus \{0; 1\}$
 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \dots$ beliebige Vektorkarten

Hinsehen“. Diese subjektive, nicht quantifizierbare Strategie führt nicht nur Studierende in der Vorlesung Lineare Algebra an ihre Grenzen, sondern wird teilweise auch in der Schule erwartet, um Nachweise verschiedener Eigenschaften zu führen. Ähnlich wie der Zahlenblick in der Arithmetik ist dieses Konzept jedoch wichtig, damit die Rechnung selbst eher in den Hintergrund tritt.

Das Spiel VecShip

Für Schülerinnen und Schüler ist es schwierig, eigenständig eine

Linearkombination für einen gegebenen Vektor zu finden. Wahrscheinlich liegt dies einerseits an der benötigten Kreativität und andererseits an fehlenden, fördernden Übungsformaten.

Spielkonzept

Das Spielziel von VecShip ist es, möglichst schnell eine Linearkombination für eine gezogene Spielkarte zu bilden (**Abb. 2, Online-Material**). Dazu sind fünf Vektorkarten vorgegeben. Wer eine Linearkombination gefunden hat, kommuniziert diese dem Team. Ist die Kombination korrekt, darf die Karte behalten werden. Bei einer falschen Kombination muss diese von einem

anderen Gruppenmitglied korrigiert werden. Dieses erhält nach einer korrekten Begründung die Karte.

Konzeption der Spielkarten

Eine Übung als Spiel anzulegen, kann auch in der Sek. II ähnlich positive Effekte haben wie in der Sek. I. Die Spielkarten von VecShip sind so konzipiert, dass unterschiedliche Linearkombinationen möglich sind, von der einfachen Addition zweier Vektoren bis zur Linearkombination dreier Vektoren (vgl. **Abb. 2**). Beim Mischen der Karten bestimmt der Zufall, welche Anforderungen die nächste Spielkarte besitzt. Die Spielstruktur verfolgt das Übungsziel



Abb. 3: Eine Gruppe diskutiert über ihre unterschiedlichen Lösungen.

2 ZUM AUSPROBIEREN

Spielvarianten

Die Schülerinnen und Schüler erfanden folgende Varianten von VecShip:

- Spiel ohne Punkte nach normalen Regeln
- Jede Person bekommt eine feste Anzahl an Spielkarten, wer zuerst keine mehr hat, gewinnt.
- Jede Spielkarte, die als Linearkombination gebildet wurde, ersetzt eine Vektorkarte, sodass sich die Vektorkarten verändern.
- Nachdem eine Person eine Lösung hat, sagt sie „Stopp!“ und alle haben weitere zehn Sekunden, um noch eine Lösung zu finden.
- Lüge-oder-Wahrheit: Eine Person legt eine Spielkarte zu einer anderen Person und gibt zwei/drei Vektorkarten an, mit denen diese gebildet werden kann. Nun muss entschieden werden, ob das möglich ist oder nicht.
- ...

der Linearkombinationen, die Regeln sind kurz und knapp. Auch der Sinn des Spieles, selbst Linearkombinationen zu bilden, erschließt sich den Spielenden recht schnell. VecShip erfüllt somit sind die „Anforderungen beim Einsatz von Spielen im Mathematikunterricht“ (Schöneburg 2014, S. 3).

Mathematisches Kommunizieren anregen

Das Spiel VecShip bietet aufgrund seines einfachen und offenen Grundprinzips diverse Möglichkeiten für Kommunikationsanlässe (näher ausgeführt in **Kasten 1**).

Erfahrungen aus der Unterrichtspraxis

Das Spiel wurde in zwei Grundkursen in Sachsen (GK-S) und in einem Grundkurs in Mecklenburg-Vorpommern (GK-M) eingesetzt. Zunächst bildeten die Schülerinnen und Schüler selbstständig Dreier- bzw. Vierergruppen. Diese Einteilung ist neben dem Spaßfaktor förderlich für die Intensität der Kommunikation, die während des Spielens von der Lehrkraft beobachtet werden kann (Heinz 2018, S. 22, 149, 184 und 301).

Beginn des Spieles

Zum Einstieg erfolgte die Vermittlung des Spielprinzips mithilfe der Tutorialkarten (vgl. **Material 1**), entweder durch die Schülerinnen und Schüler selbst (GK-S) oder gemeinsam im Klassenverband (GK-M). Die Gruppen, die selbstständig gearbeitet hatten, stellten anschließend weniger Fragen zum grundsätzlichen Spielprinzip. Aus den Erfahrungen wurde ein Einstiegsmaterial als weitere Möglichkeit zum Tutorial erstellt (**Arbeitsblatt 1** – Vorbereitung).

Spieldurchführung

Während der Durchführung von VecShip spielten die meisten Gruppen sehr angeregt und motiviert. Im GK-M gab es jedoch eine Gruppe von eher leistungsschwächeren Lernenden, die Unterstützung und erste Spielstrategien benötigten. Aus dieser Kommunikation konnten bereits erste Rückschlüsse gezogen werden, die so im herkömmlichen Unterricht nicht aufgefallen wären (diagnostische Ansätze).

In den meisten Gruppen wurde das Spiel zunächst im Sinne der Spielregeln gegeneinander gespielt. Einige Gruppen entschieden sich jedoch bewusst dafür, den ersten Spieldurchgang gemeinsam zu spielen, die Punktevergabe zu ignorieren und stattdessen direkt zu begründen, warum die gewählte Linearkombination korrekt sei. Auch weitere Spielvarianten wurden von den Jugendlichen entwickelt (vgl. **Kasten 2**). Auf diese wird später eingegangen.

In mehreren Gruppen kamen nach einigen Minuten Spielzeit aufgrund unterschiedlicher Lösungen lautere Diskussionen vor. An diesen Stellen wurde sowohl in den GK-S als auch im GK-M die Lehrkraft als Schiedsrichter angefragt. Nachdem die Gruppen darüber aufgeklärt wurden, dass es unendlich viele Lösungsmöglichkeiten gibt, nahm das Spiel teilweise noch dynamischere Züge an und die Gruppen wirkten motivierter.

Eine recht frustrierte Gruppe im GK-S stellte fest: „Wir brauchen gar nicht alle Vektorkarten, oder?“ Auch hier gab es eine Art Erleichterung, nachdem diese Frage verneint wurde,



VecShip – Spielanleitung

VecShip – Alle 11 Sekunden lässt sich ein Vektor als Linearkombination darstellen.

Ziel des Spiels

Im Spiel gibt es drei verschiedene Kartentypen.



Vektorkarte, Tutorialkarte, Spielkarte

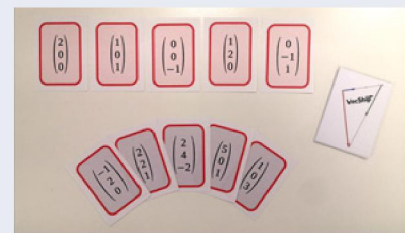
Wer zuerst eine passende Linearkombination der Vektorkarten für die aufgedeckte Spielkarte oder Tutorialkarte gefunden hat, erhält einen Punkt. Dabei ist die Lösung direkt nach Beanspruchung der Spielkarte der Gruppe zu kommunizieren und deren Korrektheit von dieser zu überprüfen.

Spielvorbereitungen

- Die fünf Vektorkarten werden offen und für alle gut sichtbar auf den Tisch gelegt.
- Spiel- und Tutorialkarten werden getrennt voneinander gemischt.
- Positionieren Sie die Spielkarten verdeckt vor sich und legen Sie die Tutorialkarten, ebenfalls verdeckt, auf den Spielkartenstapel.

Die Grundregeln

Nacheinander werden einzeln Spielkarten vom Kartenstapel aufgedeckt. Wer zuerst eine passende Linearkombination der Vektorkarten für eine Spielkarte gefunden hat, bekommt die zugehörige Spielkarte und somit einen Punkt. Dabei ist die Lösung direkt der Gruppe zu kommunizieren und deren Korrektheit von dieser zu überprüfen. Ist die genannte Linearkombination falsch, so erhält die Spielkarte die Person, die zuerst den Fehler in der genannten Linearkombination korrekt benannt hat.



Tutorial

Die Tutorialkarten dienen ausschließlich der Verständlichkeit des Spielablaufes und werden nach Ende des Tutorials aus dem Spiel entfernt. Es ist dabei von der Gruppe sicherzustellen, dass jedes Gruppenmitglied am Ende des Tutorials den Spielablauf verstanden hat.

Spielende

Das Spiel endet, wenn alle Spielkarten vom Kartenstapel gezogen wurden. Wer am Ende des Spiels die meisten Punkte hat gewinnt. Im Falle von Gleichstand kommt es zum Duell. Dabei wird von den übrigen Spielerinnen und Spielern eine Spielkarte entworfen. Wer von den Duellanten zuerst eine korrekte Linearkombination findet, gewinnt das Duell und somit das Spiel.

Lösungsbeispiele

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Gib eine Linearkombination $\vec{x}$ an, die aus den Vektorkarten gebildet werden kann.
- Gib eine weitere Linearkombination $\vec{y}$ an, die auch aus den Vektorkarten gebildet werden kann und für die gilt:
 $\vec{x} \neq \vec{y}$.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$$

[illegible]

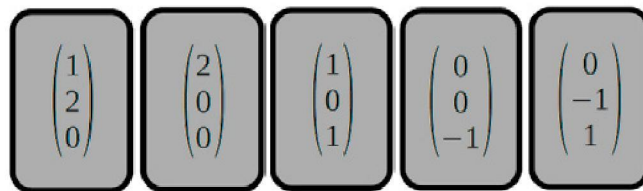
$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

[illegible]

$2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + () \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + () \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
$1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

VecShip[→] – Ergebnissicherung

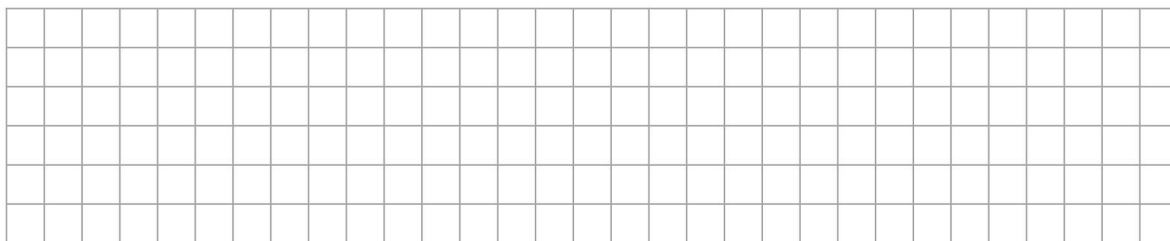
1. Gibt es einen Vektor $\vec{x}$, der nicht als Linearkombination der Vektorkarten dargestellt werden kann? Begründe deine Antwort.



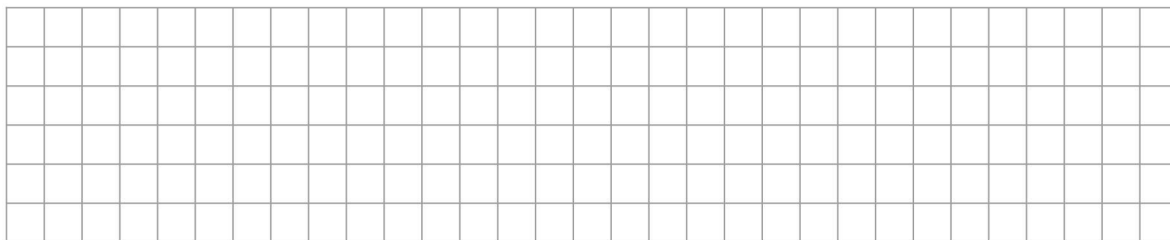
2. Gib drei Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ an, mit denen jeder Vektor $\vec{x}$ als Linearkombination dargestellt werden kann.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$$

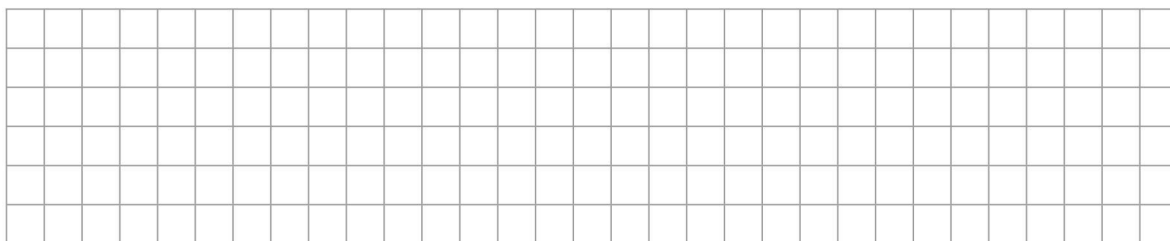
3. Begründe, warum zur Darstellung mittels Linearkombination eines beliebigen Vektors $\vec{x}$ in der x-y-Ebene wie Vektoren genügen.



4. Gib ein Paar Beispielvektoren $(\vec{a}, \vec{b})$ an, mit denen jeder Vektor $\vec{x}$ der x-y-Ebene als Linearkombination dargestellt werden kann und ein Paar $(\vec{c}, \vec{d})$, für welches dies nicht möglich ist.



5. Notiere eine Linearkombination eines Vektors der x-z-Ebene, welche im Spiel verwendet wurde und aus zwei Vektoren besteht. Stelle diese Linearkombination graphisch dar.



wenngleich auch schon einige Nerven im Spiel gelassen wurden.

Der Nullvektor stellte für einige Gruppen eine Herausforderung (für die Gruppen, die ihn nicht trivial kombinieren wollten) und für andere Gruppen die einfachste Karte dar. Dazu Paula in allgemein wahrnehmbarer Lautstärke: „Mensch Leute, ihr müsst doch nur irgendeinen Vektor mit Null multiplizieren, dann kommt doch auch da Null raus.“

Lösungsangabe

Ein Kritikpunkt der Schülerinnen und Schüler war die mündliche Kommunikation der Lösung. Sie entschieden sich, ihre Lösung aufzuschreiben. Eine andere Situation kam auch häufiger vor: Ein Gruppenmitglied nimmt sich die Spielkarte und denkt erst danach über die Lösung dafür nach. Hier einigten sich die entsprechenden Gruppen, dass die Spielkarte erst berührt wird, wenn man die Lösung ad hoc kommunizieren kann.

Allgemeine mathematische Kompetenzen

Im Sinne der Bildungsstandards sind während des Spielverlaufes auf der sprachlichen Ebene folgende Kompetenzen erkennbar:

- Mathematisch argumentieren (K1) AFB I/II
- Probleme mathematisch lösen (K2) AFB I
- Mathematische Darstellungen verwenden (K4) AFB I
- Mathematisch kommunizieren (K6) AFB I/II, teilweise III

Dabei wird bereits aus der Spielkonzeption deutlich, warum die Kompetenzen in den entsprechenden Anforderungsbereichen verortet sind.

VecShip bietet jedoch auch die Möglichkeit eines AFB III bei der Kompetenz „Mathematisch kommunizieren“. Letztlich werden im Spielverlauf durchaus „mündliche und schriftliche Äußerungen mit mathematischem Gehalt von anderen Personen miteinander“ verglichen, bewertet und korrigiert (KMK 2012, S. 17). Dies liegt daran, dass die Kommunikation ohnehin im Vordergrund stehen soll. Inwiefern die Fachsprache korrekt eingesetzt wird,

sollte dann von der Lehrkraft oder den Lernenden reflektiert werden.

Diagnostische Ansätze

Im Grundsatz ist VecShip eher ein Übungsspiel mit Diagnosepotenzial der Kommunikation während und nach der Spieldurchführung. Deshalb werden hier auch diagnostische Ansätze thematisiert, welche so im Unterricht genutzt bzw. beobachtet werden können.

Aus der Beobachtung der Kommunikation und der strategischen Hilfestellung für die einzelnen Gruppen zeigten sich zwei Strategien, die erkannt und verwendet wurden:

1. Für die Linearkombination eines Vektors der Struktur

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

sind die Vektoren mit $x_2 = 0$ geeignet. (Strategie)

2. Die x_3 -bzw. x_1 -Komponente kann mithilfe der Vektorkarten

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gut bestimmt werden.

Gruppen, die nicht mit einer solchen Strategie vorgehen, deuteten in ihrer Kommunikation ein Ausprobieren der einzelnen Vektorkarten mit beliebigen Rechnungen an. Dieses systematische Probieren versagt jedoch, wenn die Koeffizienten der Linearkombination nicht mehr ganzzahlig, sondern rational sind.

Es wurde jedoch auch ein Fehler deutlich, der uns Lehrkräften bei der Berechnung von Linearkombinationen durch die Lernenden bisher noch nicht aufgefallen war:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hierbei wird für die x_1 -Komponente und die x_2 -Komponente jeweils der richtige Koeffizient verwendet. Die x_3 -Komponente wird aber vollständig ignoriert. Der Vektor wird auch nicht als Ganzes aufgefasst, sondern es erfolgt ein Fokus auf die Komponenten, ähnlich wie es im $\mathbb{R}^2$ gemacht wird.

Außerdem wird die Strategie eingehalten, dass auf die Nullen geachtet wird bei der Lösung. Nur die „Probe“ wurde vergessen.

Das Spiel als Ankerpunkt

In einigen Gruppen im GK-S zeigten sich bereits Ideen zum Konzept der linearen Unabhängigkeit. Im GK-M wurde mithilfe der Vektorkarten zu diesem Konzept übergeleitet mit Bezug auf das Spiel. Dabei stellt sich die Frage, welche drei Vektoren für beliebige Vektoren genügen, also eine Basis bilden. Durch die Spielerfahrung konnte auf eine Art „Erlebnis“ in der Erinnerung der Schülerinnen und Schüler aufgebaut werden.

Literatur

- Borneleit, P./Danckwerts, R./Henn, H.-W./Weigand, H.-G. (2001): Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. – In: Journal für Mathematik-Didaktik 22 (1), S. 73–90.
- Heinz, F. (2018): Mathematische Lernspiele als diagnostisches Instrument. Spiele im heterogenen Mathematikunterricht der Grundschule zur Erfassung von Lernhürden, Springer-Spektrum, Wiesbaden.
- Henn, H.-W./Filler, A. (2015): Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Algebraisch verstehen – Geometrisch veranschaulichen und anwenden, Springer Spektrum, Berlin/Heidelberg.
- KMK (Hrsg.) (2012): Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012). Köln: Wolters Kluwer.
- Schöneburg, S. (2014): Wer spielt, gewinnt und lernt – In: mathematik lehren, Heft 186, Friedrich Verlag GmbH, S. 2–5.
- Vohns, A. (2013): Von der Vektorrechnung zum reflektierten Umgang mit vektoriellen Darstellungen – In: Allmendinger, H./Lengnink, K./Vohns, A./Wickel, G. (Hrsg.): Mathematik verständlich unterrichten. Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung, Springer Spektrum, Wiesbaden, S. 147–166.