

DANIEL FROHN

# Mit Vektoren multiplizieren

## Grundvorstellungen zu Produkten in der analytischen Geometrie

**LEHRGRUPPE:** 10. – 12. Klasse

**IDEE:** Analogien und Unterschiede zwischen den verschiedenen Produkten in der Vektorgeometrie herausarbeiten, um Grundvorstellungen aufzubauen

**ARBEITSBLATT 1 – 3:** Das Vektorprodukt erkunden

**WEITERES MATERIAL:** GeoGebra-Datei: Vektorprodukt erkunden

**ZEITBEDARF:** 2 – 3 Doppelstunden

Schon in der Sekundarstufe I müssen bei den Zahlbereichserweiterungen immer wieder Grundvorstellungen zur Multiplikation erweitert werden. Die Multiplikation ist nur für natürliche Faktoren als wiederholte Addition interpretierbar, während für ganze, rationale und reelle Faktoren geometrische Vorstellungen an Bedeutung gewinnen (Spiegelung, Streckung, Stauchung).

In der Sekundarstufe II werden dann in der analytischen Geometrie zwei weitere Produkte eingeführt: Die skalare Multiplikation und das Skalarprodukt. Beide lassen sich als Verallgemeinerungen des Produktes reeller Zahlen auffassen, und in beiden Fällen müssen vorhandene Grundvorstellungen erweitert und neue Grundvorstellungen aufgebaut werden. In Leistungskursen wird zusätzlich oft noch das Vektorprodukt betrachtet, welches im Unterschied zu den anderen Produkten nur im dreidimensionalen reellen Vektorraum definiert werden kann. Neben einigen Unterschieden lassen sich beim Vektorprodukt auch viele Analogien zum Skalarprodukt ziehen, welche produktiv für den Aufbau von Grundvorstellungen genutzt werden können. Das Herausarbeiten von

Unterschieden und Analogien zwischen den verschiedenen Produkten in der Vektorgeometrie ist auch deshalb wichtig, da den Lernenden hier zum ersten Mal im Mathematikunterricht ein Nebeneinander von mehreren algebraischen Verknüpfungen unterschiedlicher Art begegnet, die aber alle durch die Benennung als „Produkte“ miteinander verbunden sind. Um Verwechslungen vorzubeugen und den Sinn der einzelnen Produkte zu erfassen, ist ein Netz von Grundvorstellungen erforderlich.

### Grundvorstellungen in der analytischen Geometrie

Lernprozesse in der analytischen Geometrie erfordern einen ständigen Wechsel von algebraischen in geometrische Darstellungsformen und umgekehrt. Durch adäquate Grundvorstellungen können abstrakte algebraische Konzepte verschiedene geometrische Bedeutungen erhalten. Am Beispiel des grundlegenden Begriffs „Vektor“ kann dies verdeutlicht werden: In algebraischer Darstellung ist ein Vektor in der Schulmathematik zunächst ein  $n$ -Tupel bzw. Tripel reeller Zahlen, welches unterschiedliche inhaltliche Deutungen erlaubt, die nicht notwendig geometrischer Art sind (man denke z. B. an stochastische Vektoren). Im zwei- oder dreidimensionalen Fall lassen sich nun viele verschiedene geometrische Interpretationen eines Vektors als Punkt, Ortsvektor, Verschiebung bzw. Pfeilklassse (d. h. Menge von gleichlangen gleichgerichteten Pfeilen) finden (vgl. Malle 2005). Von welchen dieser Deutungen man Gebrauch macht, hängt von dem betrachteten Inhalt ab und ist keinesfalls eindeutig. Die Parameterdarstellung  $\vec{x} = \vec{u} + t \cdot \vec{v}$

einer Geraden mit einem reellen Parameter  $t$  könnte beispielsweise wie folgt interpretiert werden:

- die Menge aller Ortsvektoren  $\vec{x}$ , die aus den Summen eines festen Ortsvektors  $\vec{u}$  mit allen Vielfachen des als Pfeilklassse gedeuteten Richtungsvektors  $\vec{v}$  entsteht
- die Menge aller Punkte  $\vec{x}$ , die sich aus allen Verschiebungen des Anfangspunktes  $\vec{u}$  in Richtung  $t \cdot \vec{v}$  ergibt
- die Ortslinie aller Punkte  $\vec{x}$  einer gleichförmigen Bewegung ausgehend von einem Startpunkt  $\vec{u}$  zu den Zeitpunkten  $t$ , wobei  $\vec{v}$  als „Geschwindigkeitspfeil“ die Länge und Richtung des in einer Zeiteinheit zurückgelegten Weges angibt
- die Verschiebung einer Ursprungsgeraden  $t \cdot \vec{v}$  um den Vektor  $\vec{u}$

Ohne Grundvorstellungen zum Vektorbegriff und den betrachteten Verknüpfungen ist also eine geometrische Deutung algebraischer Objekte wie Parameterdarstellungen von Geraden und Ebenen, Normalenformen von Ebenen usw. nicht möglich.

### Grundvorstellungen zur skalaren Multiplikation

Die skalare Multiplikation wird in der Regel zu Beginn der Vektorrechnung unmittelbar nach der Vektoraddition eingeführt. Hierbei kann mit der Vorstellung der Vervielfachung eines Vektors direkt an die Grundvorstellungen zur Multiplikation reeller Zahlen angeknüpft werden. Im Spezialfall der Multiplikation eines Multiplikators  $n \in \mathbb{N}$  mit einem Multiplikanden  $a \in \mathbb{R}$  ist die Vorstellung der wiederholten Addition grundlegend:  $n \cdot a = a + \dots + a$

Das Kommutativgesetz in  $\mathbb{R}$  erlaubt zwar indirekt auch eine entsprechende

| Inhalt                                          | Aktivitäten zum Skalarprodukt                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Aktivitäten zum Vektorprodukt                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|-------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Motivation durch Orthogonalität                 | Untersuchung der Orthogonalität zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit dem Satz des Pythagoras:<br>$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$                                                                                                                                                                                                                                                | Finden einer Formel für einen Vektor $\vec{c}$ , der zu zwei (nicht parallelen) Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal ist:<br>$\vec{c} = t \cdot \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$                                                                                                                                                                 |
| arithmetische Definition                        | $\vec{a} * \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| Erkundung mit DGS                               | Untersuchung von orthogonalen und parallelen Vektoren, spitzen und stumpfen Winkeln; Zusammenhang zur Länge der Vektoren; Veränderung eines Vektors, so dass das Skalarprodukt konstant bleibt                                                                                                                                                                                                                              | Untersuchung von orthogonalen und parallelen Vektoren, spitzen und stumpfen Winkeln; Zusammenhang zur Länge der Vektoren; Veränderung eines Vektors, so dass das Vektorprodukt konstant bleibt                                                                                                                                                                                                                                       |
| Untersuchung von Spezialfällen                  | $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} * \vec{b} = 0$<br>$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} * \vec{b} = \pm  \vec{a}  \cdot  \vec{b} $                                                                                                                                                                                                                                                              | $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$<br>$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow  \vec{a} \times \vec{b}  =  \vec{a}  \cdot  \vec{b} $                                                                                                                                                                                                                                                         |
| Untersuchung von Verknüpfungseigenschaften      | Kommutativgesetz: $\vec{a} * \vec{b} = \vec{b} * \vec{a}$<br>Distributivgesetz: $\vec{a} * (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} * \vec{b} + \vec{a} * \vec{c}$                                                                                                                                                                                                                                                                     | Antikommutativgesetz: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$<br>Distributivgesetz: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$                                                                                                                                                                                                                                              |
| Zerlegung in parallelen und orthogonalen Anteil | $\vec{a} * \vec{b} = \vec{a} * (\vec{b}_{\parallel} + \vec{b}_{\perp}) = \vec{a} * \vec{b}_{\parallel} + \vec{a} * \vec{b}_{\perp} = \vec{a} * \vec{b}_{\parallel}$<br>Das Skalarprodukt hängt nur vom parallelen Anteil ab.                                                                                                                                                                                                | $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times (\vec{b}_{\parallel} + \vec{b}_{\perp}) = \vec{a} \times \vec{b}_{\parallel} + \vec{a} \times \vec{b}_{\perp} = \vec{a} \times \vec{b}_{\perp}$<br>Das Vektorprodukt hängt nur vom orthogonalen Anteil ab.                                                                                                                                                                                  |
| Herleitung einer geometrischen Formel           | $\vec{a} * \vec{b} = \vec{a} * \vec{b}_{\parallel} = \pm  \vec{a}  \cdot  \vec{b}_{\parallel}  =  \vec{a}  \cdot  \vec{b}  \cdot \cos(\alpha)$                                                                                                                                                                                                                                                                              | $ \vec{a} \times \vec{b}  =  \vec{a} \times \vec{b}_{\perp}  =  \vec{a}  \cdot  \vec{b}_{\perp}  =  \vec{a}  \cdot  \vec{b}  \cdot \sin(\alpha)$                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| Anwendungen                                     | Winkelberechnung: $\alpha = \cos^{-1} \left( \frac{\vec{a} * \vec{b}}{ \vec{a}  \cdot  \vec{b} } \right)$<br>Normalenform einer Ebene: $\vec{n} * (\vec{x} - \vec{a}) = 0$<br>oder: $\vec{n} * \vec{x} = \vec{n} * \vec{a}$<br>Abstandsrechnungen, z. B. für den Abstand $d$ eines Punktes $\vec{p}$ zur Ebene $E$ mit $\vec{n} * \vec{x} = \vec{n} * \vec{a}$ :<br>$d = \frac{ \vec{n} * (\vec{p} - \vec{a}) }{ \vec{n} }$ | Winkelberechnung: $\alpha = \sin^{-1} \left( \frac{ \vec{a} \times \vec{b} }{ \vec{a}  \cdot  \vec{b} } \right)$<br>Berechnung eines Normalenvektors einer Ebene aus zwei Richtungsvektoren: $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$<br>Abstandsrechnungen, z. B. für den Abstand $d$ eines Punktes $\vec{p}$ zur Geraden $g$ mit $\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{b}$ :<br>$d = \frac{ \vec{b} \times (\vec{p} - \vec{a}) }{ \vec{b} }$ |

Tab. 1: Mögliche Wege zur Erarbeitung von Skalar- und Vektorprodukt

Deutung von  $a \cdot n$ , jedoch ist direkt hierfür keine sinnvolle Interpretation als wiederholte Addition möglich. Diese unterschiedlichen Rollen von Multiplikator und Multiplikand, die in den reellen Zahlen meist kaum wahrgenommen werden, treten nun bei der skalaren Multiplikation in der Vektorrechnung offen zutage, da es sich um Elemente aus unterschiedlichen

Bereichen handelt: Der Multiplikator ist eine reelle Zahl und der Multiplikand ein Vektor. Die Grundvorstellung der *wiederholten Addition* lässt sich also für natürliche Skalare  $n \in \mathbb{N}$  und Vektoren  $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$  direkt übertragen:

$$n \cdot \vec{a} = \vec{a} + \dots + \vec{a}$$

Auch im allgemeinen Fall zweier reeller Faktoren müssen bei der geometrischen Deutung der Multiplikation

reeller Zahlen die unterschiedlichen Rollen von Multiplikator und Multiplikand beachtet werden: Der Multiplikator kann als Streck- bzw. Stauchfaktor interpretiert werden, während der Multiplikand das Objekt ist, auf welches die zentrische Streckung wirkt. In den positiven reellen Zahlen kommt man dabei noch mit der Vorstellung einer Strecke ohne Orientierung aus,

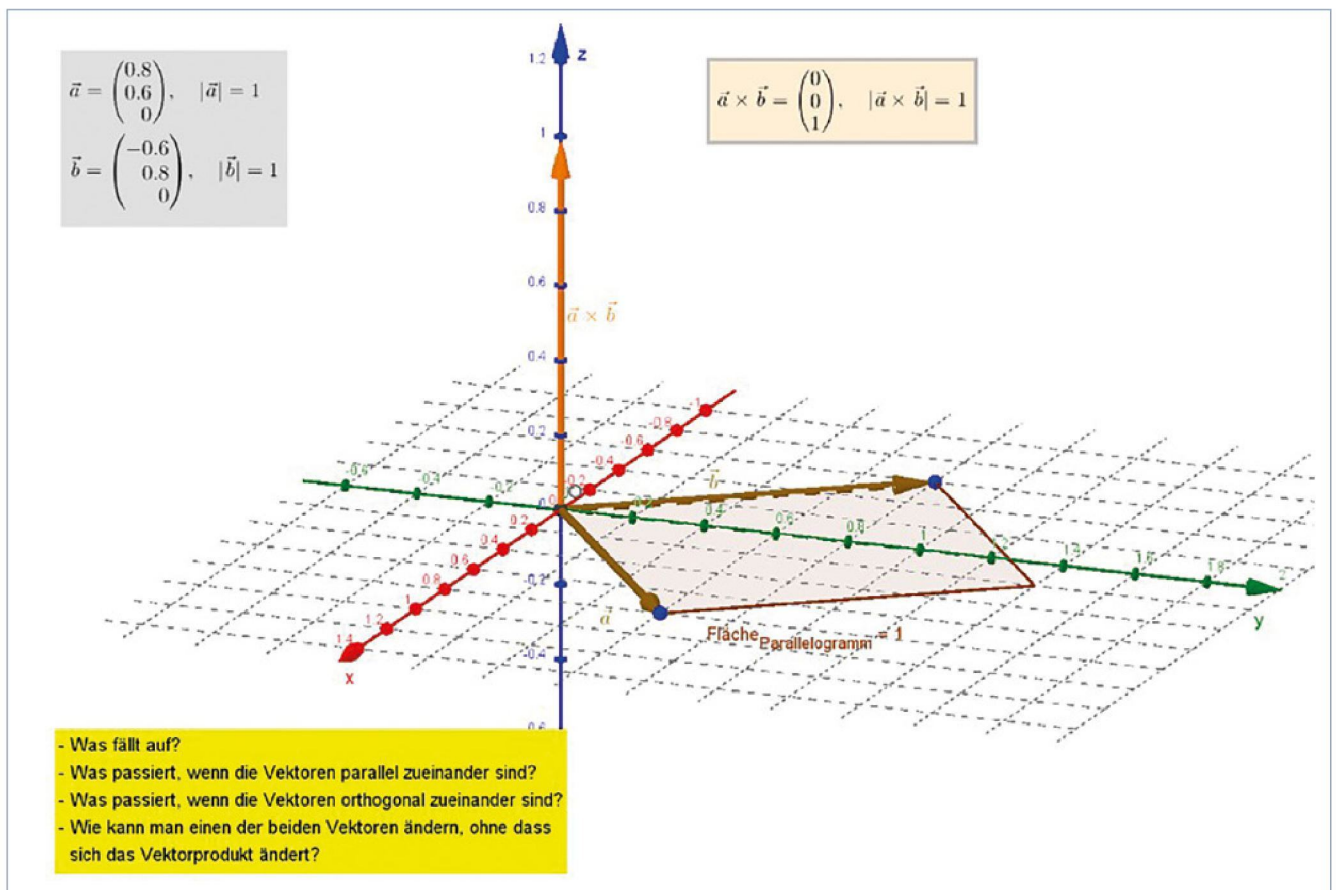


Abb. 1: GeoGebra-Umgebung zur Erkundung des Vektorprodukts (<https://fr-vlg.de/ml236vektorprod>)

aber bei der Einbeziehung negativer Faktoren bietet das Pfeilmodell der Zahlengeraden den geeigneten Rahmen (vgl. Fast/vom Hofe 2014). Diese Überlegungen zeigen, dass letztlich schon bei der Multiplikation mit negativen Zahlen eine skalare Multiplikation einer reellen Zahl mit einem Vektor aus  $\mathbb{R}^1$  eingeführt wird und dabei die Grundvorstellung der *zentrischen Streckung* angelegt werden sollte.

Diese ist dann auch beim Übergang in die Vektorgeometrie für den Fall der skalaren Multiplikation tragfähig, denn die geometrischen Operationen, die auf der eindimensionalen Zahlengeraden mit der Orientierung „nach rechts oder links“ durchgeführt werden, lassen sich nun in gleicher Weise im dreidimensionalen Raum in einer beliebigen Richtung vornehmen.

Zu beachten ist, dass die Grundvorstellung der zentrischen Streckung sowohl innerhalb der Koordinaten des Vektors in Gestalt der Multiplikation reeller Zahlen als auch für den Vektor als Ganzes Anwendung finden kann:

$$t \cdot \vec{a} = t \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta_1 \\ ta_2 \\ ta_3 \end{pmatrix}$$

Wenn in den einzelnen Koordinaten auf das Pfeilmodell der Zahlengeraden zurückgegriffen wird, liegt für den Vektor als Ganzes ebenfalls die geometrische Deutung als Pfeil nahe.

Im Hinblick auf die oben angeführte Parameterdarstellung einer Geraden ist auch eine *dynamische Bewegungsvorstellung* der skalaren Multiplikation bedeutsam: Hierbei wird  $t \cdot \vec{v}$  als zurückgelegter Weg zum Zeitpunkt  $t$  interpretiert, wobei die Geschwindigkeit durch Richtung und Länge des als Pfeil(klasse) gedeuteten Vektors  $\vec{v}$  gegeben ist.

Auch diese Grundvorstellung der skalaren Multiplikation baut auf Vorstellungen zur Multiplikation reeller Zahlen auf und kann damit verknüpft werden, indem die dreidimensionale gleichförmige Bewegung als zusammengesetzt aus drei gleichförmigen Teilbewegungen in Richtung der Achsen angesehen wird.

## Skalar- und Vektorprodukt erarbeiten

Neben der skalaren Multiplikation nimmt das Skalarprodukt eine zentrale Stellung in der analytischen Geometrie ein. Mithilfe des Skalarproduktes lassen sich Winkel und Abstände berechnen sowie die wichtige Darstellung einer Ebene mithilfe von Normalenvektoren verstehen. Die Konzeption einer grundvorstellungsorientierten Erarbeitung des Skalarproduktes, die in einem früheren Beitrag (Frohn 2020) ausführlicher vorliegt, wird im Folgenden aufgegriffen und durch ein entsprechendes Konzept für das Vektorprodukt ergänzt. Ein Überblick hierzu ist in **Tabelle 1** aufgeführt, während in **Tabelle 2** die Grundvorstellungen zum Skalar- und Vektorprodukt einander gegenübergestellt werden.

Im Unterricht ermöglichen **Arbeitsblatt 1–3** analog zur Vorgehensweise beim Skalarprodukt ein Erarbeiten grundlegender Eigenschaften des Vektorproduktes.

| Grundvorstellung                                  | Skalarprodukt                                                                                                                                                                                                                                                | Vektorprodukt                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|---------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Produktvorstellung<br>(verallgemeinertes Produkt) | $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ <p>Produkteigenschaften:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Distributivität</li> <li>• Kommutativität</li> </ul> | $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$ <p>Produkteigenschaften:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Distributivität</li> <li>• <b>Antikommutativität (!)</b></li> </ul> |
| Orthogonalitätsvorstellung                        | Skalarprodukt = 0 genau dann, wenn die Vektoren orthogonal sind                                                                                                                                                                                              | Vektorprodukt orthogonal zu beiden (nicht parallelen) Vektoren                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| Winkelvorstellung                                 | Betrag des Skalarprodukts ist bei parallelen Vektoren am größten<br>Skalarprodukt positiv bei spitzen Winkeln, negativ bei stumpfen Winkeln                                                                                                                  | Betrag des Vektorprodukts ist bei orthogonalen Vektoren am größten, bei parallelen Vektoren am kleinsten (= 0)<br>Rechte-Hand-Regel                                                                                                                                                                                                            |
| Projektionsvorstellung                            | Skalarprodukt hängt bei konstantem orthogonalem Anteil nur vom parallelen Anteil ab                                                                                                                                                                          | Vektorprodukt hängt bei konstantem parallelen Anteil nur vom orthogonalen Anteil ab                                                                                                                                                                                                                                                            |
| Flächeninhaltsvorstellung                         | Betrag des Skalarprodukts als Rechtecksflächeninhalt (Produkt der Länge eines Vektors mit der Länge des Projektionsvektors)                                                                                                                                  | Betrag des Vektorprodukts als Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms                                                                                                                                                                                                                                                                  |

Tab. 2: Grundvorstellungen zum Skalar- und Vektorprodukt

### Die Definition motivieren

Ein neuer Begriff sollte im Mathematikunterricht möglichst aus einer Problemstellung motiviert werden. „Begriffe müssen entdeckt, Definitionen nacherfunden werden“ (Winter 1983). Diese Forderung ist auch bei der Einführung neuer Produkte in der analytischen Geometrie zu beachten.

Das Skalarprodukt kann gut durch die Fragestellung „Wann sind zwei Vektoren orthogonal?“ mithilfe des Satzes des Pythagoras eingeführt werden, denn als Bedingung ergibt sich hier  $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$ . Daraufhin wird die linke Seite dieser Gleichung als Skalarprodukt zweier Vektoren definiert und dieser neue Begriff weiter untersucht. Beim Vektorprodukt bietet sich die Frage „Wie findet man einen zu zwei gegebenen Vektoren orthogonalen Vektor?“ als Motivation an, die im Zusammenhang der Umwandlung der Parameterform in die Normalenform einer Ebene relevant ist. Für konkret gegebene Richtungsvektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  löst man

dazu das lineare Gleichungssystem  $\vec{n} \cdot \vec{a} = 0$  und  $\vec{n} \cdot \vec{b} = 0$ , aber die Frage nach einer allgemeinen Formel, bei der man den gesuchten Vektor  $\vec{n}$  direkt hinschreiben kann, ist ja typisch für mathematisches Arbeiten. Die Herleitung einer solchen Formel ist anspruchsvoll, da ein Gleichungssystem mit allgemeinen Koeffizienten gelöst werden muss, aber mit einer Hilfestellung wie in **Arbeitsblatt 1** kann dies im Leistungskurs bewältigt werden. Dabei wird deutlich, dass ein solches Gleichungssystem unendlich viele Lösungen besitzt, was ja auch geometrisch auf der Hand liegt, da die Länge und die Orientierung des gesuchten Normalenvektors nicht festgelegt ist. Bei der Definition des Vektorprodukts muss man sich also für eine spezielle Lösung entscheiden und die durch das Vektorprodukt gegebene Formel erscheint zunächst willkürlich, stellt aber die anderen Eigenschaften des Vektorprodukts sicher (Länge entspricht dem Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms, Orientierung als Rechtssystem). Obwohl

nun also die Motivation des Vektorproduktes etwas weniger naheliegend als beim Skalarprodukt ist, lässt sich als Gemeinsamkeit festhalten, dass eine *Orthogonalitätsvorstellung* für beide Produkte zentral ist.

### Eigenschaften explorieren

Nach der Definition des Skalar- beziehungsweise Vektorprodukts bietet es

#### D Differenzierung auf den Punkt gebracht

##### Aspekte der Heterogenität:

- Verschiedene Grundvorstellungen

##### Methode:

- Erarbeitung in individuellem Lerntempo, beispielorientiert und verallgemeinernd

##### Praxistipp:

Immer wieder geometrische Deutungen verbalisieren lassen.

Name: \_\_\_\_\_

Datum: \_\_\_\_\_

## Wie findet man einen Normalenvektor?

Erinnerung: Ein Vektor  $\vec{n}$  heißt Normalenvektor einer Ebene  $E$ , wenn  $\vec{n}$  orthogonal zu jedem Richtungsvektor der Ebene verläuft. Für eine Ebene  $E$  mit der Parametergleichung  $\vec{x} = \vec{u} + s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$  muss ein Normalenvektor also die Gleichungen  $\vec{n} \cdot \vec{a} = 0$  und  $\vec{n} \cdot \vec{b} = 0$  erfüllen.

### 1. Berechnen Sie jeweils einen Normalenvektor zur Ebene $E$ :

a)  $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b)  $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Sind allgemein  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$  Richtungsvektoren einer Ebene  $E$ , so ist für einen Normalenvektor  $\vec{n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  das folgende Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{array}{l} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot b_1 \\ \cdot (-a_1) \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot b_2 \\ \cdot (-a_2) \end{array}$$

### 2. Lösen Sie dieses Gleichungssystem durch die angedeuteten Umformungen und zeigen Sie so, dass

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \text{ ein möglicher Normalenvektor von } E \text{ ist.}$$

### 3. Wenden Sie die gefundene Bedingung aus 2.) auf die Beispiele aus 1.) an und überprüfen Sie Ihre Ergebnisse.

Name: \_\_\_\_\_

Datum: \_\_\_\_\_

## Das Vektorprodukt bei parallelen und bei orthogonalen Vektoren

Erinnerung: Das **Vektorprodukt**  $\vec{a} \times \vec{b}$  zweier Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$  ist definiert durch:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

### 1. Berechnen Sie das Vektorprodukt der folgenden zueinander parallelen Vektoren:

i.  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

ii.  $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$

iii.  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$

iv.  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}$

Was fällt auf? Formulieren Sie eine Regel.

### 2. Berechnen Sie das Vektorprodukt der folgenden zueinander orthogonalen Vektoren:

i.  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

ii.  $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

iii.  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie auch die Längen aller Vektoren. Was fällt auf? Formulieren Sie eine Regel.

### 3. Beweisen Sie die Regel aus 2.) für zwei zueinander orthogonale Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ganz

allgemein, indem Sie die Terme  $|\vec{a} \times \vec{b}|^2$  und  $|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2$  berechnen.

Hilfestellung: Ist  $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$ , so kann man

$$|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2$$

schreiben und dies ausmultiplizieren.

## Das Vektorprodukt im allgemeinen Fall

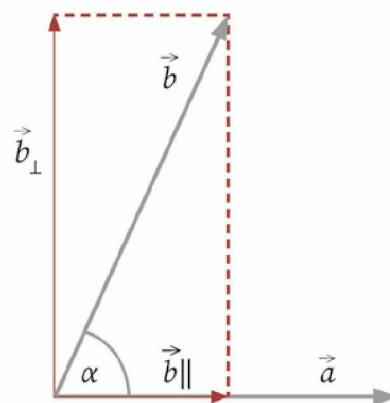
- Erinnerung:
- (1) Für alle Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ist  $\vec{a} \times \vec{b}$  orthogonal zu  $\vec{a}$  und zu  $\vec{b}$ .
  - (2) Sind  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  parallele Vektoren, so ist  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ .
  - (3) Sind  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  orthogonale Vektoren, so ist  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .

Welche geometrische Bedeutung hat  $|\vec{a} \times \vec{b}|$  im allgemeinen Fall?

1. Begründen Sie anhand der Abbildung, dass man für zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  immer schreiben kann:  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times (\vec{b}_{\parallel} + \vec{b}_{\perp})$
2. Vereinfachen Sie die Gleichung aus a) mithilfe des Distributivgesetzes für das Vektorprodukt und die Vektoraddition. Begründen Sie, dass das Distributivgesetz tatsächlich gilt.
3. Formen Sie den Term  $|\vec{a} \times \vec{b}_{\perp}|$  mithilfe von obiger Eigenschaft (3) um und zeigen Sie:  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha)$ .

Nehmen Sie dafür zunächst an, dass  $\alpha < 90^\circ$  ist und verallgemeinern Sie danach auf den Fall  $\alpha \geq 90^\circ$ .

4. Formulieren Sie, welche geometrische Bedeutung  $|\vec{a} \times \vec{b}|$  für das von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannte Parallelogramm hat.



sich an, zunächst eine Erkundungsphase zur Exploration weiterer Eigenschaften mithilfe einer Dynamischen Geometrie-Software einzuschieben, in der bereits Vermutungen aufgestellt werden können, die dann zu einem späteren Zeitpunkt rechnerisch überprüft werden. Für das Vektorprodukt findet sich hierzu eine GeoGebra-Datei im Online-Material (vgl. auch **Abb. 1**). Die Erkundung gestaltet sich hier etwas schwieriger als beim Skalarprodukt, da man notwendigerweise im 3D-Modus arbeiten muss. Um dies nicht zu unübersichtlich werden zu lassen, empfiehlt es sich, zunächst die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  in der  $x$ - $y$ -Ebene zu wählen. Dabei können schon qualitative Beobachtungen über den Zusammenhang des Winkels zwischen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  mit dem Betrag des Vektorprodukts gemacht werden: Bei parallelen Vektoren ist der Betrag 0, bei größer werdendem Winkel wird der Betrag größer und bei einem rechten Winkel ist er maximal, nämlich gleich dem Produkt der Längen von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .

Die Entdeckung und Formulierung solcher qualitativen Zusammenhänge ist wie beim Skalarprodukt auch geeignet, eine *Winkelvorstellung* zum Vektorprodukt aufzubauen, die mehr geometrische Deutungen erlaubt als die reine Kenntnis der Formel  $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$ .

### Verknüpfungseigenschaften untersuchen

Möchte man die gefundenen Zusammenhänge nun rechnerisch nachweisen, werden sowohl beim Skalar- als auch beim Vektorprodukt Verknüpfungseigenschaften benötigt. Manche Vorstellungen über ein Produkt, die aus den reellen Zahlen mitgebracht werden, lassen sich nicht mehr auf die neuen Produkte übertragen: Beispielsweise wird in den reellen Zahlen häufig der sogenannte Satz vom Nullprodukt verwendet (ein Produkt ist genau dann null, wenn einer der Faktoren null ist); dieser Zusammenhang ist jedoch bei

Skalar- und Vektorprodukt nicht mehr gültig, weshalb es hier auch keine Division als Umkehroperation gibt. Eine wichtige Eigenschaft eines Produktes ist aber die Distributivität mit der Addition, welche auch bei Skalar- und Vektorprodukt erfüllt ist und eine wesentliche Rechtfertigung für die Bezeichnung dieser Operationen als Produkte darstellt. Eine weitere gemeinsame Eigenschaft von Skalar- und Vektorprodukt ist die Übereinstimmung des Betrages mit dem Produkt der Längen der beteiligten Vektoren in Spezialfällen (beim Skalarprodukt im parallelen und beim Vektorprodukt im orthogonalen Fall, s. **Arbeitsblatt 2**). Eine Einsicht in solche Verknüpfungseigenschaften lässt sich als *Produktvorstellung* auffassen, mit der Skalar- und Vektorprodukt als verallgemeinerte Produkte gedeutet werden können. Eine Besonderheit des Vektorproduktes ist hierbei das sog. Antikommutativgesetz  $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ , welches sich sowohl rechnerisch nachweisen als auch geometrisch mit der Rechten-Hand-Regel begründen lässt.

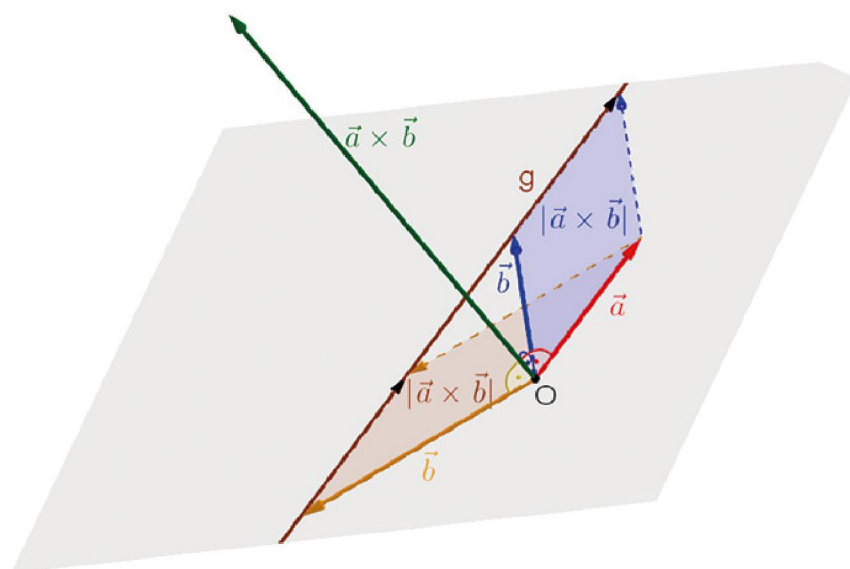


Abb. 2: Variation des Vektors  $\vec{b}$ , die das Vektorprodukt gleich lässt

### Eine geometrische Formel herleiten

Die geometrischen Formeln zum Skalar- und Vektorprodukt, aus denen viele der oben genannten Eigenschaften hervorgehen, lassen sich mit einer gemeinsamen Idee herleiten, nämlich der Zerlegung  $\vec{b} = \vec{b}_{\parallel} + \vec{b}_{\perp}$  mit einem zu  $\vec{a}$  parallelen Anteil  $\vec{b}_{\parallel}$  bzw. orthogonalen Anteil  $\vec{b}_{\perp}$ . So ergibt sich beim Skalarprodukt  $\vec{a} * \vec{b} = \vec{a} * \vec{b}_{\parallel}$  wegen  $\vec{a} * \vec{b}_{\perp} = 0$  und beim Vektorprodukt  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}_{\perp}$  wegen  $\vec{a} \times \vec{b}_{\parallel} = 0$ . Die Tatsache, dass nur einer der beiden Anteile einen Einfluss auf das jeweilige Produkt hat, ist besonders für Anwendungen in der Physik relevant (Arbeit, Drehmoment), kann aber auch geometrisch reichhaltig interpretiert werden: Der Vektor  $\vec{b}$  lässt sich auf einer Orthogonalen zu  $\vec{a}$  variieren, ohne dass sich das Skalarprodukt ändert, während bei der Variation auf einer Parallelen zu  $\vec{a}$  sich das Vektorprodukt nicht ändert (vgl. **Abb. 2**). Diese *Projektionsvorstellung* ermöglicht eine Analogiebildung zwischen Skalar- und Vektorprodukt. Die unterschiedlichen Projektionen auf den parallelen bzw. orthogonalen Anteil haben zur Folge, dass beim Skalarprodukt der Kosinus und beim Vektorprodukt der Sinus des von den Vektoren eingeschlossenen Winkels relevant wird (vgl. **Arbeitsblatt 3**).

Da die Höhe des von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Parallelogramms über der Seite  $\vec{a}$  durch  $|\vec{b}_{\perp}| = |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha)$  gegeben

ist, können mit dem Vektorprodukt auch Flächeninhalte von Parallelogrammen und Dreiecken berechnet werden. Für diese *Flächeninhaltsvorstellung* gibt es auch beim Skalarprodukt eine Entsprechung, da der Betrag des Skalarprodukts  $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}_{\parallel}|$  als Rechtecksflächeninhalt gedeutet werden kann.

### Anwendungen von Skalar- und Vektorprodukt

Für die (innermathematischen) Anwendungen ist das Skalarprodukt wesentlich wichtiger als das Vektorprodukt, da sich alle Winkel- und Abstandsberechnungen sowie die Normalenform einer Ebene mit dem Skalarprodukt verstehen lassen. Demgegenüber wird das Vektorprodukt in der Regel lediglich als Berechnungsformel für den Normalenvektor einer Ebene aus zwei Richtungsvektoren verwendet. Eine interessante Analogie ergibt sich bei den Abstandsberechnungen Punkt-Ebene mit dem Skalarprodukt gegenüber Punkt-Gerade mit dem Vektorprodukt. Die Abstandsformel

$$d = \frac{|\vec{n} * (\vec{p} - \vec{a})|}{|\vec{n}|}$$

für den Abstand  $d$  eines Punktes  $\vec{p}$  zu der Ebene mit dem Ortsvektor  $\vec{a}$  und dem Normalenvektor  $\vec{n}$  lässt sich so deuten:  $\vec{p} - \vec{a}$  ist ein Verbindungsvektor von der Ebene zum Punkt, dessen zu  $\vec{n}$  paralleler Anteil ein zur Ebene

orthogonaler Verbindungsvektor  $\vec{d}$  mit  $|\vec{d}| = d$  ist. Demgegenüber lässt sich die Abstandsformel

$$d = \frac{|\vec{b} \times (\vec{p} - \vec{a})|}{|\vec{b}|}$$

für den Abstand  $d$  eines Punktes  $\vec{p}$  zu der Geraden mit dem Ortsvektor  $\vec{a}$  und dem Richtungsvektor  $\vec{b}$  ganz analog deuten:  $\vec{p} - \vec{a}$  ist ein Verbindungsvektor von der Geraden zum Punkt, dessen zu  $\vec{b}$  orthogonaler Anteil ein zur Geraden orthogonaler Verbindungsvektor  $\vec{d}$  mit  $|\vec{d}| = d$  ist.

### Fazit

Mit fortschreitender Behandlung der analytischen Geometrie treten bis zu vier verschiedene Produkte auf: das Produkt reeller Zahlen, die skalare Multiplikation, das Skalarprodukt und das Vektorprodukt. Für einen verstehensorientierten Umgang mit diesen Produkten, der neben rechnerischen Fähigkeiten auch tragfähige geometrische Deutungen umfasst, müssen Grundvorstellungen erweitert, modifiziert und neu aufgebaut werden. Dabei können Analogiebildungen hilfreich sein: Zum einen ist die skalare Multiplikation eng verknüpft mit der Multiplikation reeller Zahlen, zum anderen bilden die Gemeinsamkeiten und Unterschiede von Skalar- und Vektorprodukt reichhaltige Anlässe zur Vertiefung. Dabei ist die Behandlung des Vektorproduktes zwar nachrangig gegenüber dem Skalarprodukt, kann aber ebenfalls einen guten Beitrag zum Aufbau von Grundvorstellungen in der analytischen Geometrie leisten.

### Literatur

- Fast, V./vom Hofe, R. (2014). Geometrisch wird's anschaulich. Das Pfeilmodell als Vorstellungsbasis für negative Zahlen. – In: *mathematik lehren* 183, Friedrich Verlag S. 20–24.
- Frohn, D. (2020): Mehr als Orthogonalität. Das Skalarprodukt anwenden – mit Grundvorstellungen. – In: *mathematik lehren* 218, Friedrich Verlag S. 33–38.
- Malle, G. (2005): Neue Wege in der Vektorgeometrie. – In: *mathematik lehren* 133, Friedrich Verlag S. 8–14.
- Winter, H. (1983). Über die Entfaltung begrifflichen Denkens im Mathematikunterricht. – In: *Journal für Mathematikdidaktik* 3, S. 175–204.