

mathematiklehren

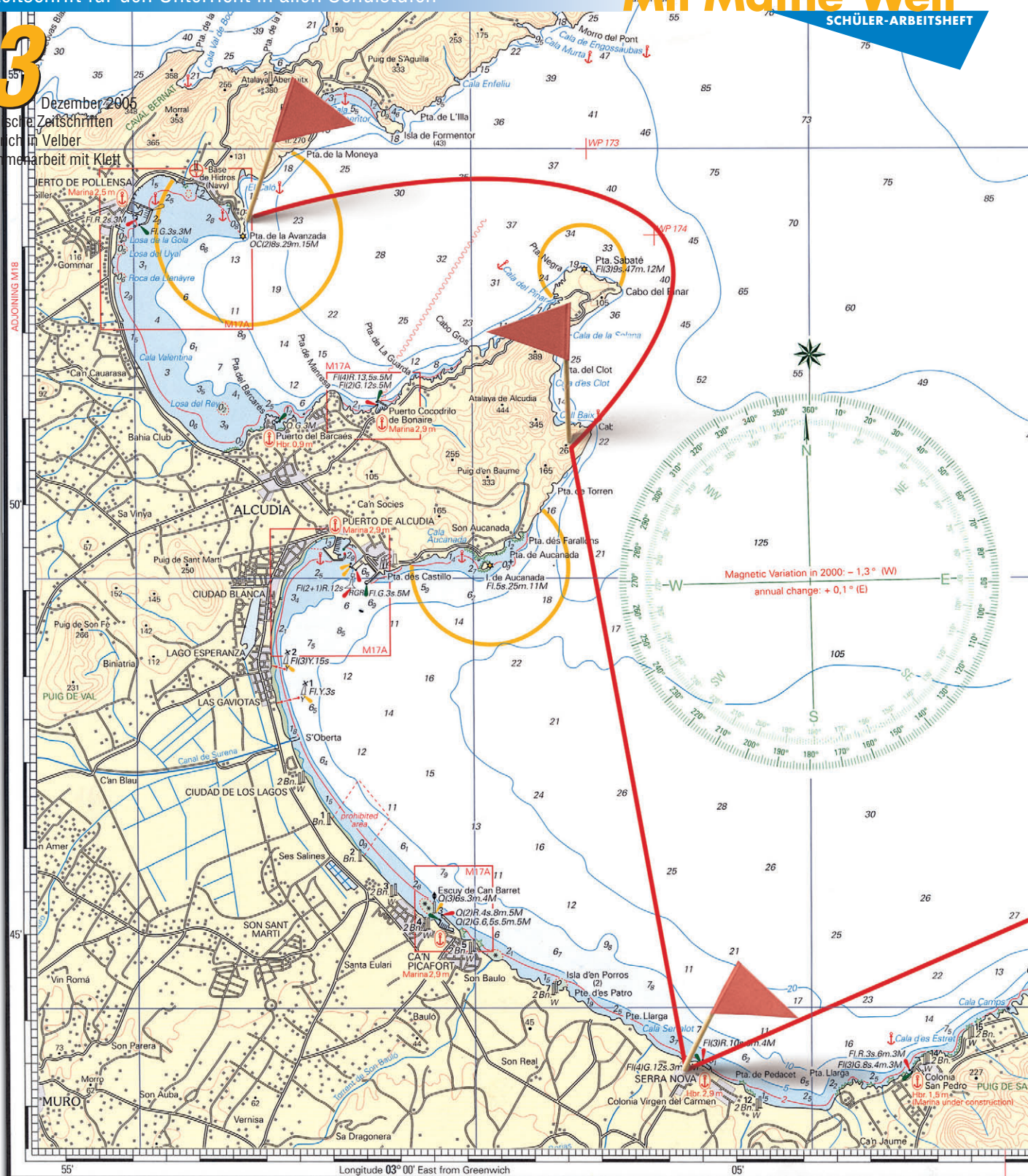
Die Zeitschrift für den Unterricht in allen Schulstufen

Mit Mathe-Welt

SCHÜLER-ARBEITSHEFT

133

Dezember 2005
Pädagogische Zeitschriften
bei Friedrich Vieweg
in Zusammenarbeit mit Klett



Koordinaten und Vektoren

mathematiklehren

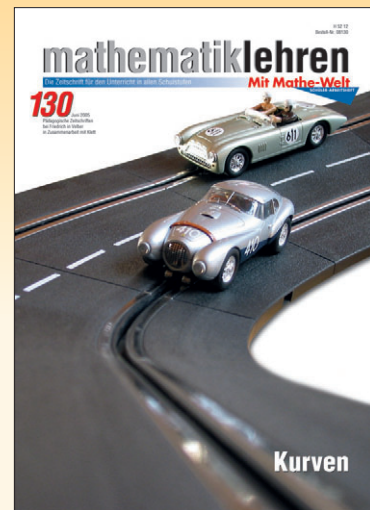
Die Zeitschrift für den Unterricht in allen Schulstufen

Mit Mathe-Welt
SCHÜLER-ARBEITSHEFT

Mathematik rund ums Ei, arme und reiche Zahlen, das Rosinenproblem – Sie wollen die Fragen der Mathematik einmal von einer anderen Seite angehen und Abwechslung in den Unterrichtsalltag bringen?

mathematik lehren bietet Ihnen als Zeitschrift aus der Praxis für die Praxis ein weites Spektrum an kreativen Ideen. Im Basisartikel finden Sie eine prägnante theoretische Darstellung des Heftthemas, in der Unterrichtspraxis vielfältige Umsetzungsmöglichkeiten, Anregungen und Arbeitsmaterialien zum Kopieren.

Die Bandbreite von **mathematik lehren** ist so vielfältig und spannend wie die Unterrichtswelt: Typische Mathe-Themen wie „Funktionen untersuchen“, didaktische Themen wie „Ganzheitlich unterrichten“ und eher außergewöhnliche Themen wie „Natur“ oder „Computeralgebrasysteme“ wechseln sich ab.



Bestell-Nr. 08130
€ 8,60 (€ 11,-)



Bestell-Nr. 08129, € 8,60 (€ 11,-)



mathematik lehren wendet sich an LehrerInnen der Sekundarstufe I und II. Als StudentIn oder ReferendarIn finden Sie Anregungen und Hilfen für die Unterrichtsvorbereitung, als erfahrene LehrerIn können Sie für schon oft unterrichtete Inhalte neue Ansätze, Einstiege und Zusammenhänge entdecken.

Als besonderes Extra enthält jede Ausgabe das Schüler-Arbeitsheft **Mathe-Welt**, das Sie direkt im Unterricht einsetzen können. Mit diesem Arbeitsheft können Ihre SchülerInnen lesen, tüfteln, schneiden, kleben und entdecken, dass die Welt außerhalb der Schule voller Mathematik steckt. Unterrichtsnaher Themen wie den Satz des Pythagoras oder den Umgang mit Gleichungen können sie handelnd vertiefen und individuell üben, weitere Themen außerhalb des Lehrplans („Unendlichkeit“ oder „Spiralen“) selbstständig erschließen.

mathematik lehren erscheint 6x jährlich. Das Jahresabonnement kostet € 69,60 inkl. der beiden Magazine „Friedrich Jahresheft“ und „SCHÜLER“, zzgl. Versandkosten. Stand 2006.



Bestell-Nr. 32999, € 2,50

Bestell-Nr. 32998, € 2,50

FRIEDRICH VERLAG

Pädagogische Zeitschriften in Zusammenarbeit mit Klett

Für Ihre Bestellung nutzen Sie bitte den Fax-Bestellschein. Schneller geht's per Telefon: 05 11 / 4 00 04 - 1 50

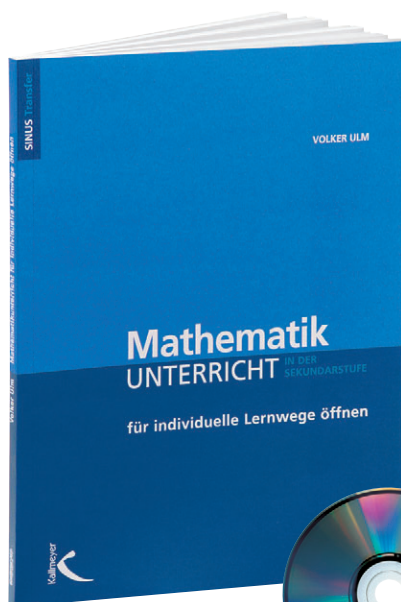
Preise zzgl. Versandkosten, Stand 2006.

Preise in Klammern für Nicht-Abonnenten

*** Alle Themenhefte und Sonderprodukte auch im Internet *** z.B. Sammelband Vertretungsstunden (Best.-Nr. 32985, € 13,50 / € 18,50 für Nicht-Abonnenten)

*** www.friedrichonline.de ***

Volker Ulm



Mathematik

UNTERRICHT IN DER SEKUNDARSTUFE

für individuelle Lernwege öffnen

Reihe SINUS Transfer

Wie können Schüler ein mathematisches Verständnis entwickeln, das ihnen einen kreativen Umgang mit Mathematik ermöglicht? Wie vermitteln Sie Ihren Schülern ein sinnvoll vernetztes Wissen, das sie aktiv zum Problemlösen nutzen können?

Volker Ulm entwickelt Antworten, die das eigenständige und eigenverantwortliche Arbeiten in den Mittelpunkt stellen. Das Buch richtet dabei den Blick auf Unterrichtsentwürfe, die Schülern Freiräume für das Lernen auf eigenen Wegen geben. Lernzirkel oder Unterrichtsprojekte als Beispiele offener Aufgabenformen fördern das selbstständige Arbeiten wirkungsvoll.

Am Beispiel der dynamischen Mathematik werden Möglichkeiten für das individuelle Entdecken und Erforschen mathematischer Zusammenhänge am Computer gezeigt.

Das Buch liefert Konzepte, praktische Ideen, Aufgaben und Materialien für den alltäglichen Unterricht.

Auf der CD-ROM finden Sie:

- alle Aufgaben des Buches für den Einsatz im Unterricht
- Vorlagen für Overhead-Folien zur Vorbereitung schulinterner Fortbildungsveranstaltungen zu den Themen des Buches
- GEONExT: Programm für Dynamische Mathematik (als Freeware mit Beispielkonstruktionen)

20 x 27 cm, 160 Seiten
inkl. CD-ROM
Bestell-Nr. 4939, € 24,80*



Wilfried Herget • Dietmar Scholz

Die etwas andere Aufgabe

Über 200 Aufgaben aus Zeitungsausschnitten, die mit geringem Aufwand in Ihrem Unterricht einsetzbar sind. Sie erhalten zahlreiche Ideen für mehr Abwechslung im Unterricht, den Einstieg in ein neues Thema und für Hausaufgaben, Klassenarbeiten oder Klausuren. Das Buch führt lebendig aus dem alltäglichen Schulbuch-Aufgaben hinaus und unterstützt Sie darin, Ihre Klasse zum Rechnen zu motivieren. Neben einer Übersicht über die Anforderung mit ausführlichen Lösungsbeschreibungen erhalten Sie Aufgaben zu Prozentrechnung, Exponentiellem Wachstum, Einheiten, Formeln und Funktionen u.v.m.

240 Seiten,
zahlreiche Abbildungen
Bestell-Nr. 4188, € 9,90

FAX-BESTELLSCHEIN 05 11/4 00 04 -1 70

Friedrich Verlagsservice
Postfach 10 01 50, 30917 Seelze

Abonnement - Bestellung

bitte ankreuzen!	Probe-Abo	Direkt-Abo	Geschenk-Abo	Leser werben Leser
Mathematik lehren 6x jährlich, Abo-Preis € 69,-*				
Unterricht Physik 6x jährlich, Abo-Preis € 64,80*				

Bei Leser werben Leser:
Mein eigenes Zeitschriften-Abo werde ich nicht vor Ablauf eines weiteren Jahres kündigen. Werber und Abonnent dürfen nicht identisch sein. Dieses Angebot kann nicht mit dem Ausbildungsrabatt kombiniert werden.

Studierende und Referendare bitte hier zusätzlich ankreuzen:

- ☐ StudentInnen und ReferendarInnen erhalten bei Vorlage ihrer aktuellen Bescheinigung 30% Rabatt auf den Jahres-Abonnementpreis sowie beim Direkt-Abo einmalig vier Einkaufsgutscheine über 50% Rabatt. Wenn Sie diesen Ausbildungsrabatt über mehrere Jahre in Anspruch nehmen möchten, schicken Sie uns regelmäßig Ihre aktuelle Bescheinigung (keine Ernennungsurkunde!) zu. (Gilt nicht für Leser werben Leser!)

* Inklusive Friedrich Jahresheft und SCHÜLER

Meine Abo-Prämie

(bitte ankreuzen, gilt nur für Direkt-Abo und Leser werben Leser)



1.

Jahreslos Aktion Mensch



2.

Spiegel-Tangram
Best.-Nr. 3301



3.

Sammelband
Ideen für Vertretungsstunden
Best.-Nr. 32985



4.

Einkaufsgutschein
über € 12,90

Ich bin die neue Leserin/der neue Leser.

Bitte senden Sie meine Bestellung/ mein Geschenk-Abo / mein Probe-Abo oder Direkt-Abo an:

Kundennummer (falls vorhanden)

Unterrichtsfächer, Schulstufe

Name, Vorname 5008

Straße, Haus-Nr.

PLZ, Ort

E-Mail

Datum, Unterschrift

Ich werbe den neuen Leser/verschenke ein Abo. Bitte senden Sie die Rechnung und die Überraschung für das Geschenk-Abo bzw. meine Prämie bei Leser werben Leser an:

Kundennummer (falls vorhanden)

Unterrichtsfächer, Schulstufe

Name, Vorname 5008

Straße, Haus-Nr.

PLZ, Ort

E-Mail

Datum, Unterschrift

Einzelhefte und Material - Bestellung

Menge	Titel	Einzelpreis €	Bestell-Nr.
└─┐			
└─┐			
└─┐			
└─┐			
└─┐			
└─┐			

Preise in Klammern gelten für Nicht-Abonnenten einer Friedrich- oder Kallmeyer Zeitschrift. Alle Preise zzgl. Versandkosten. Stand 2006.

So funktioniert Ihr Abo:

PROBE-ABO: Sie erhalten das aktuelle Heft der angekreuzten Zeitschrift(en) kostenlos! Wenn Sie nicht überzeugt sind, informieren Sie uns bis 14 Tage nach Erhalt des Heftes schriftlich, dass Sie nicht weiterlesen möchten. Ansonsten erhalten Sie die Zeitschrift(en) regelmäßig zum gültigen Jahres-Abo-Preis.

DIREKT-ABO: Sie erhalten die angekreuzte(n) Zeitschrift(en) regelmäßig zum gültigen Jahres-Abo-Preis. Für ein DIREKT-ABO bedanken wir uns mit einer Prämie Ihrer Wahl! (bitte ankreuzen).

Bezugsbedingungen: Die Mindest-Abo-Dauer beträgt ein Jahr. Sie können das Abo bis sechs Wochen vor Ablauf des Berechnungszeitraumes schriftlich kündigen. Die Lieferung erfolgt mit einer Rechnung.

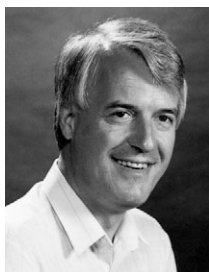
Vertrauensgarantie: Sie können Ihre Bestellung innerhalb von zwei Wochen (Datum des Poststempels) schriftlich gegenüber dem Verlag widerrufen.

Wenn Sie künftig unsere interessanten Angebote nicht mehr erhalten möchten, können Sie bei uns der Verwendung Ihrer Daten für Werbezwecke widersprechen.



Gleich **kostenlos** mitbestellen:
Unser Verlagsprogramm auf CD-ROM!





Herausgeber
des Thementeils
**Koordinaten und
Vektoren**
Günther Malle

Liebe Leserin, lieber Leser,

Die Grundidee der Koordinaten kann man heute schon Grundschulkindern beibringen, weil sie Koordinaten in ihrer Umwelt mannigfaltig vorfinden. Viele Situationen kann man nicht durch eine einzige Zahl beschreiben, sondern man braucht dazu Zahlenpaare, Zahlentripel usw. Das gewohnte Rechnen mit Zahlen lässt sich relativ problemlos auf Zahlenpaare, Zahlentripel usw. übertragen, wobei man fast wie von selbst in die Vektorrechnung hineinschlittert.

Große didaktische Schwierigkeiten ergeben sich allerdings, wenn man versucht, die Zahlenpaare und Zahlentripel sowie die Rechenoperationen mit ihnen auf die Geometrie anzuwenden. Hier hat sich die Schulmathematik ungeschickt verhalten, indem Vektormodelle entworfen wurden, die einer gründlichen didaktischen Analyse nicht standhalten (z. B. das so genannte „Pfeilklassenmodell“). Welche didaktischen Fehler hier gemacht wurden, erfahren Sie in diesem Heft.

Es wird aber nicht nur Kritik an bestehenden Vorschlägen geübt, sondern auch ein konstruktiver Vorschlag zur Vektorrechnung gemacht. Dieser enthält durchaus Zündstoff, weil er sich an einigen Stellen gegen traditionell Liebgewonnenes wendet. Aber keine Angst: dieser Ansatz wurde bereits mehrfach erprobt und funktioniert. Alle Beiträge in diesem Heft sind mit diesem Vorschlag kompatibel und sollen damit auch dessen Brauchbarkeit untermauern. Habe ich Sie neugierig gemacht? Viel Spaß beim Lesen und eine spannende Auseinandersetzung mit neuen Ideen wünscht Ihnen

Günther Malle

Ihre Service-Nummern im Friedrich Verlag

Abo-Service: (0511) 40004-151

Leserservice: (0511) 40004-150

www.friedrich-verlag.de

INHALT

Basisartikel

Günther Malle

Von Koordinaten zu Vektoren

4

Günther Malle

Neue Wege in der Vektorgeometrie

8

Unterrichtspraxis

9.–13. Schuljahr *Günther Malle*

Schwierigkeiten mit Vektoren

16

7.–8. Schuljahr *Andreas Ulovec*

Heiß oder kalt?

Eine Software zur Vorübung für den Vektorbegriff und die Vektoraddition

20

6.–10. Schuljahr *Heinz Klaus Strick*

Koordinaten zum Zeichnen geometrischer Körper nutzen
Schrägbilder mit EXCEL

22

12.–13. Schuljahr *Maria Koth*

Vektorbeweise in der Dreiecksgeometrie

44

9.–13. Schuljahr *Gerald Wittmann*

**Ellipse, Hyperbel, Parabel –
Koordinatengeometrie ohne Vektoren**

50

Magazin

Vorschau

61

Impressum

61

Heinz Böer

Von Mauerrätseln zu quadratischen Gleichungen

62

Lesetipps

64

Lesezeichen

65

Die etwas andere Aufgabe

66

Ideenkiste

68

5.–10. Schuljahr

Mathe-Welt

SCHÜLER-ARBEITSHEFT

**Mathe-Welt
„Koordinaten“**

27

- Positionen angeben
- Figuren erkunden
- Körper beschreiben

Bestell-Nr. 92902 Preis: 2 € bei Einzelbestellung 2,50 €





H4 nach F6 –
eine alltägliche Anwendung
zweidimensionaler Koordinaten

Von Koordinaten zu Vektoren

Nicht nur in der Geometrie können Sachverhalte angemessen mit Koordinaten und Vektoren dargestellt werden.

Schon in unteren Klassen kann das Umgehen mit Zahlenpaaren eingeführt werden.

Thermometer, Wasserstandsanzeiger, Stadtpläne, Fahrtenschreiber – Koordinaten finden unsere Schülerinnen und Schüler mannigfaltig in ihrer Umwelt. Die meisten Skalen (wie auch das alltägliche Lineal) sind Beispiele für eindimensionale Koordinaten. Aber auch zweidimensionale Koordinaten lassen sich entdecken, beispielsweise bei Beschreibungen zum Schachspiel oder bei der Festlegung von Geländepunkten. In dem beiliegenden Mathe-Welt-Heft sind weitere Beispiele enthalten, die schon ab Klasse 5 im Unterricht eingesetzt werden können.

Viele Situationen im Alltag können nicht durch eine einzige Zahl beschrieben werden, sondern man braucht dazu zwei oder drei Zahlen. Beispiele wie Julias monatliches Taschengeld (in Euro)
(Einnahmen|Ausgaben) = (25|23)
oder Stückzahlen in einem Lager
(Nägel|Schrauben|Walzen)
= (1500|1300|1000)
führen zwanglos zu den Begriffen des Zahlenpaars und Zahlentripels. Passende Aufgaben finden Sie in **Kasten 1**.

Geometrische Darstellung von Zahlenpaaren

Zahlenpaare und Zahlentripel kann man bekanntlich in entsprechenden Koordinatensystemen geometrisch darstellen. Wir beschränken uns bei den folgenden Ausführungen auf Zahlenpaare. Für Zahlentripel verläuft alles analog.

Die (auf Descartes zurückgehende) Grundidee besteht darin, dass man nach Einführung eines Koordinatensystems ein Zahlenpaar $(a_1|a_2)$ als Punkt in der Ebene darstellen kann und umgekehrt einen Punkt der Ebene durch ein Zahlenpaar beschreiben kann (vgl. **Kasten 2**).

Ein Zahlenpaar $(a_1|a_2)$ kann man nach Einführung eines Koordinatensystems aber auch als Pfeil in der Ebene darstellen, wobei der Anfangspunkt beliebig gewählt werden darf. Damit das Zahlenpaar $(0|0)$ nicht ausgeschlossen bleibt, führt man zweckmäßigerweise einen Nullpfeil ein, der die Länge 0, aber keine Richtung hat. Damit kann man insbesondere Bewegungen, z.B. die Fahrt eines Schiffs, darstellen. Man gibt dazu sowohl den Ausgangspunkt als auch den Bewegungspfeil durch ein Zahlenpaar an.

Rechnen mit Zahlenpaaren

Während man bis zur Klasse 8 vor allem lernen soll, Situationen mit Zahlenpaaren zu beschreiben und diese geometrisch darzustellen, kommt ab Klasse 9 ein neuer Aspekt hinzu: Man kann mit Zahlenpaaren auch rechnen.

In vielen Situationen des Alltagslebens liegt es auch nahe, Zahlenpaare zu addieren bzw. zu vervielfachen. Wenn beispielsweise Anna und Berta gemeinsam Urlaub machen und das Zahlenpaar $(a_1|a_2)$ die Flug- und Hotelkosten von Anna sowie das Zahlenpaar $(b_1|b_2)$ die Flug- und Hotel-

Günther Malle

Professor für Mathematik und ihre Didaktik an der
Universität Wien
E-Mail: guenther.malle@univie.ac.at

Aufgaben zu Zahlenpaaren und Zahlentripeln

► Aufgabe 1

Beate und Dora haben zwei Tests absolviert. Bei jedem Test konnte man 20 Punkte erreichen. Beate erhielt auf den ersten Test 15 Punkte und auf den zweiten 18 Punkte. Dora erhielt jedes Mal zwei Punkte weniger als Beate.

Gib einen Zahlenpaar an, das

- Beates Punktezahlen bei den beiden Tests angibt,
- Doras Punktezahlen bei den beiden Tests angibt,
- die Punktezahlen der beiden Mädchen beim ersten Test angibt,
- die Punktezahlen der beiden Mädchen beim zweiten Test angibt.

► Aufgabe 2

Eine Firma erzeugt drei Waren. Die Stückpreise der Waren sind 115€, 135€ und 140€.

Im Lager befinden sich von diesen Waren 728, 644 bzw. 840 Stück, bestellt wurden 411, 438 bzw. 596 Stück. Es fallen Produktionskosten von 65€, 70€ bzw. 72€ pro Stück an.

- Beschreibe die Stückpreise, den Lagerbestand, die Bestellzahlen und die Produktionskosten jeweils durch ein Zahlentripel.
- Die Produktionskosten steigen um 5€ pro Stück. Deshalb erhöht die Firma die Stückpreise ebenfalls um 5€ pro Stück. Dadurch sinken die Bestellungen für die erste Ware um 56 Stück, für die zweite Ware um 112 Stück und für die dritte Ware um 134 Stück. Um weitere Kosten zu sparen, wird der Lagerbestand um ein Viertel gesenkt.

Wie lauten jetzt die einzelnen Zahlentripel?

kosten von Berta angibt, dann gibt das Zahlenpaar $(a_1 + b_1 | a_2 + b_2)$ die Flug- und Hotelkosten für beide Mädchen zusammen an und es liegt nahe, dieses Zahlenpaar mit $(a_1 | a_2) + (b_1 | b_2)$ zu bezeichnen. Wenn inzwischen alles mit dem Faktor r teurer geworden ist, dann ist $(r \cdot a_1 | r \cdot a_2)$ das neue Zahlenpaar mit Annas Flug- und Hotelkosten und es liegt nahe, dieses mit $r \cdot (a_1 | a_2)$ zu bezeichnen. Es gilt somit:

$$(a_1 | a_2) + (b_1 | b_2) = (a_1 + b_1 | a_2 + b_2)$$

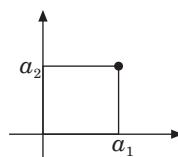
$$r \cdot (a_1 | a_2) = (r \cdot a_1 | r \cdot a_2)$$

In analoger Weise kann man eine Subtraktion für Zahlenpaare einführen.

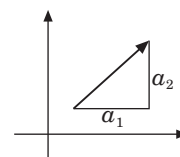
Damit sind wir eigentlich schon mitten in der Vektorrechnung, ohne dass das Wort „Vektor“ gefallen wäre. Der Begriff „Vektor“ sollte irgendwann ab Klasse 9 eingeführt werden. Auf der Basis der oben beschriebenen Vorkenntnisse ist es nur mehr ein kleiner Schritt, die Zahlenpaare als eigenständige Denkobjekte aufzufassen und etwa mit Großbuchstaben zu bezeichnen, also $A = (a_1 | a_2)$. Die Summe $A + B$ und das Vielfache $r \cdot A$ sind wie oben koordinatenweise definiert. Die Menge aller Paare reeller Zahlen bezeichnet man mit $\mathbb{R}^2$ (sprich: R zwei). Wenn die obigen Rechenoperationen mitbedacht werden, bezeichnet man die Elemente dieser Menge auch als Vektoren in $\mathbb{R}^2$.

Zahlenpaare

Geometrische Darstellung



Jedem Zahlenpaar entspricht genau ein Punkt in der Ebene und umgekehrt.



Jedem Zahlenpaar entsprechen unendlich viele Pfeile in der Ebene, die alle gleich lang und (vom Nullpfeil abgesehen) gleich gerichtet und gleich orientiert sind. Umgekehrt entspricht jedoch jedem Pfeil in der Ebene genau ein Zahlenpaar.

Rechengesetze für Zahlenpaare (Vektoren)

Für alle $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ und alle $r, s \in \mathbb{R}$ gilt:

- | | | | |
|---|-----------------------------|---|---|
| 1 | $A + B = B + A$ | 5 | $(r \cdot s) \cdot A = r \cdot (s \cdot A)$ |
| 2 | $(A + B) + C = A + (B + C)$ | 6 | $r \cdot (A + B) = r \cdot A + r \cdot B$ |
| 3 | $A + O = A$ | 7 | $(r + s) \cdot A = r \cdot A + s \cdot A$ |
| 4 | $A + (-A) = O$ | 8 | $1 \cdot A = A$ |

Dabei bezeichnet O das Zahlenpaar $(0 | 0)$ bzw. den Nullvektor.

Zu jedem Zahlenpaar (Vektor) $A = (a_1 | a_2)$ bezeichnet $-A = (-a_1 | -a_2)$ den Gegenvektor.

Rechengesetze formulieren

Die Frage, welche Rechengesetze für Zahlenpaare bzw. Vektoren in $\mathbb{R}^2$ gelten, kann durch eine Aufgabe der folgenden Art vorbereitet werden:

Man berechne

$$2 \cdot (B + A) - (A + 2 \cdot B)$$

für $A = (1|3)$ und $B = (4|1)$.

Eine Möglichkeit, diese Aufgabe zu lösen, besteht darin, die gegebenen Vektoren einzusetzen und den Ausdruck zu berechnen:

$$\begin{aligned} & 2 \cdot (B + A) - (A + 2 \cdot B) \\ &= 2 \cdot [(4|1) + (1|3)] - [(1|3) + 2 \cdot (4|1)] \\ &= 2 \cdot (5|4) - [(1|3) + (8|2)] \\ &= (10|8) - (9|5) \\ &= (1|3) \end{aligned}$$

Einfacher wird die Rechnung jedoch, wenn wir den Ausdruck zuerst umformen:

$$\begin{aligned} & 2 \cdot (B + A) - (A + 2 \cdot B) \\ &= 2 \cdot B + 2 \cdot A - A - 2 \cdot B \\ &= A \\ &= (1|3) \end{aligned}$$

Derartige Umformungen sind aber nur erlaubt, wenn für Vektoren in $\mathbb{R}^2$ Rechengesetze gelten, die den Rechengesetzen für reelle Zahlen analog sind. Dies ist tatsächlich der Fall, wie man sich auf eine einfache Weise überlegen kann:

Jede Rechnung, die man mit Zahlenpaaren ausführt und in der nur Additionen, Subtraktionen und Vervielfachungen vorkommen, lässt sich in zwei Rechnungen zerlegen: Eine Rechnung mit den ersten Koordinaten und eine Rechnung mit den zweiten Koordinaten. Man könnte diese beiden Rechnungen getrennt voneinander aufschreiben, einfacher und übersichtlicher ist es jedoch, wenn man sie in Form von Zahlenpaaren in einem Zug hinschreibt. Aus dieser Überlegung folgt unmittelbar, dass alle Rechengesetze für die Addition, Subtraktion und Vervielfachung, die für die einzelnen Koordinaten gelten, auf die Zahlenpaare übertragen werden können. (Unterschiede gibt es natürlich auch, zum Beispiel kann man Vektoren nicht dividieren.)

Zur Vervollständigung der Rechengesetze führen wir noch den Nullvektor $O = (0|0)$ und zu jedem Vektor $A = (a_1|a_2)$ den Gegenvektor $-A = (-a_1|-a_2)$ ein. Eine genauere Betrachtung der Rechengesetze für Vektoren in $\mathbb{R}^2$ zeigt, dass sich diese aus gewissen Grundgesetzen herleiten lassen, die im Kasten 2 auf Seite 5 angeführt sind. Diese Grundge-

setze lassen sich leicht durch koordinatenweises Nachrechnen beweisen.

Bekanntlich nennt man eine nichtleere Menge, in der eine Addition und eine Vervielfachung definiert sind, in der außerdem ein ausgezeichnetes Element O und zu jedem Element A ein Element $-A$ existiert und in der schließlich die im Kasten 2 auf Seite 5 angeführten Gesetze gelten, einen (reellen) Vektorraum. Die Vektoren in $\mathbb{R}^2$ bilden also einen Vektorraum. Die Grundgesetze eines Vektorraums geben die unabdingbaren Forderungen an einen schulischen Vektorbegriff an, wie immer dieser auch aussehen mag. Daraus folgt aber nicht zwingend, dass der abstrakte Vektorraumbegriff in der Schule behandelt werden muss. Dieser Begriff sollte meiner Meinung nach der Hochschule vorbehalten bleiben. In der Schule genügt es, die im Kasten 2 angeführten Gesetze für die Vektoren in $\mathbb{R}^2$ zu kennen, und das Wort „Vektorraum“ sollte gar nicht fallen.

Skalarprodukt von Vektoren

Auch das Skalarprodukt für Vektoren in $\mathbb{R}^2$ kann auf einfache Weise motiviert werden. Wenn eine Firma a Nägel zum Stückpreis b kauft, dann gilt für den Gesamtpreis:

$$G = \text{Stückzahl} \cdot \text{Stückpreis} = a \cdot b$$

Kauft die Firma a_1 Nägel zum Stückpreis b_1 und a_2 Schrauben zum Stückpreis b_2 , dann gilt:

$$G = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Es liegt nahe, einen Stückzahlvektor $(a_1|a_2)$ und einen Stückpreisvektor $(b_1|b_2)$ einzuführen und in Analogie zur ersten Formel zu schreiben:

$$\begin{aligned} G &= \\ &= \text{Stückzahlvektor} \cdot \text{Stückpreisvektor} \\ &= (a_1|a_2) \cdot (b_1|b_2) \end{aligned}$$

Damit diese Schreibweise einen Sinn ergibt, müssen wir aber zuerst ein Produkt der Vektoren $(a_1|a_2)$ und $(b_1|b_2)$ definieren. Aufgrund des vorliegenden Beispiels bietet sich als sinnvolle Definition an:

$$(a_1|a_2) \cdot (b_1|b_2) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Dass für das skalare Produkt im Prinzip dieselben Rechengesetze (Kommutativgesetz, Assoziativgesetz usw.) gelten wie für das gewöhn-

liche Produkt reeller Zahlen, ist zwar nicht unmittelbar einsichtig, kann aber leicht koordinatenweise nachgerechnet werden.

Verallgemeinerung auf mehrere Koordinaten

Wie schon festgestellt, kann für Zahlentripel alles analog aufgezo- gen werden. (Zur zeichnerischen Darstellung können Handskizzen oder computererzeugte Schrägbilder verwendet werden, vgl. S. 22.) Wenn man aber von der geometrischen Darstellung durch Punkte oder Pfeile ab- sieht, gibt es keinen vernünftigen Grund, sich auf Vektoren mit höchstens drei Koordinaten zu beschränken, denn in vielen Situationen bietet es sich an, mehr als drei Zahlen zu einem so genannten n -Tupel $(a_1|a_2|\dots|a_n)$ zusammenzufassen. Addition, Subtraktion, Vervielfachung und Skalarprodukt lassen sich entsprechend für Vektoren in $\mathbb{R}^n$ definieren und die Rechengesetze lassen sich analog beweisen. Diese Verallgemeinerungsschritte verlaufen erfahrungsgemäß unproblematisch. Die Menge aller n -Tupel reeller Zahlen bezeichnet man mit $\mathbb{R}^n$. Werden die Rechenoperationen mitbedacht, so nennt man die Elemente dieser Menge auch *Vektoren in $\mathbb{R}^n$* (womit wir auch gleich ein schöneres Wort für n -Tupel haben). Da man mit den Vektoren in $\mathbb{R}^n$ im Prinzip so wie mit reellen Zahlen rechnen kann, kann man sie als „verallgemeinerte Zahlen“ auffassen.

Zum Sinn der Vektoren

Durch die Einführung der Vektoren in $\mathbb{R}^n$ erspart man sich keine Rechenarbeit, denn um eine konkrete Rechnung auszuführen, muss man diese ja letztlich doch für jede Koordinate extra ausführen. Worin liegt also der Vorteil der Vektoren?

Darauf kann man folgende Antwort geben: Vektoren sind primär *Darstellungsmittel* und nicht *Rechenmittel*. Bei einem Vektor in $\mathbb{R}^n$ werden n reelle Zahlen zu einem neuen Denkobjekt zusammengefasst und dieses wird mit einem Symbol, etwa A , bezeichnet. Dies erlaubt, *Rechenanweisungen* (Vektortermine) und *Beziehungen* (Vektorformeln) in knapper und übersichtlicher Form anzuschreiben, ohne alle Einzelschritte

angeben zu müssen. Eine Rechenanweisung wie etwa $A + 2 \cdot (B + C)$ kann im Prinzip auch einem Rechner mitgeteilt werden, er führt dann für alle eingegebenen Vektoren A, B, C diese Rechnung koordinatenweise aus. Unter Umständen kann man einen Vektorterm zuerst vereinfachen, bevor die numerischen Rechnungen ausgeführt werden, wodurch man sich Rechenarbeit (Rechenzeit) erspart. Durch die Bezeichnung von Vektoren mit Buchstaben lassen sich insbesondere Formeln von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^n$ übertragen. Ist beispielsweise der Bruttopreis b einer Ware um 20% höher als der Nettopreis n , dann gilt in $\mathbb{R}$ die Formel: $b = 1,2 \cdot n$

Führt man für drei Waren den Bruttopreisvektor $B = (b_1|b_2|b_3)$ und den Nettopreisvektor $N = (n_1|n_2|n_3)$ ein, dann lässt sich diese Formel von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^n$ übertragen: $B = 1,2 \cdot N$

Es ist ein wichtiges Hilfsmittel in der modernen Mathematik, für komplexe Objekte Symbole einzuführen und beim Umgehen mit diesen Sym-

bolen zunächst die Details der dahinter stehenden Objekte außer Acht zu lassen. Damit sind diese Objekte die neuen „Bausteine“ des Denkens und können zur Bildung „höherer“ mathematischer Theorien verwendet werden.

Da Vektoren primär Darstellungsmittel sind, geht es bei Anwendungen der Vektorrechnung in außermathematischen Situationen nicht in erster Linie um numerisches Rechnen, sondern eher darum, Sachverhalte mit Vektoren zu beschreiben, d.h. *Vektorterm*e und *Vektorformeln* aufzustellen und zu interpretieren. Dies ist eine ganz natürliche Fortsetzung dessen, was in der eindimensionalen Algebra in den Klassen 5 bis 8 getan wird, wo man ja auch Terme und Formeln aufstellt und interpretiert. Leider wird dieser algebraische Teil der Vektorrechnung sehr vernachlässigt, weil die Vektorrechnung in der Schule fast ausschließlich in Zusammenhang mit Geometrie gesehen wird. In Hinblick auf die Bedeu-

tung in den Anwendungen müsste der algebraische Teil der Vektorrechnung jedoch gestärkt werden. Dazu eignen sich in erster Linie Aufgaben zum Aufstellen und Interpretieren von Vektortermen und Vektorformeln. Einige Beispiele für solche Aufgaben, die nichts mit Geometrie zu tun haben, sind im **Material 1** angeführt. Man beachte, dass in diesen Aufgaben absichtlich keine konkreten Zahlen als Vektorkoordinaten angegeben sind, um die Aufmerksamkeit auf die Zusammenhänge zwischen den Vektoren zu lenken. Viele weitere Aufgaben finden Sie in Malle u. a. (2004, 2005).

Literatur

Malle, G./Ramharter, E./Ulovec, A./Kandl, S. (2004, 2005): *Mathematik verstehen 5 und 6*. Schulbuch für die AHS-Oberstufe. Österreichischer Bundesverlag und Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 2004, 2005.

MATERIAL 1

Vektorterm und Vektorformeln aufstellen und interpretieren

► Auftrag 1: Warenlager

Eine Firma verkauft zwei Waren, die sie in zwei Lagern aufbewahrt. Der Vektor $A = (a_1|a_2)$ gibt die Stückzahlen der beiden Waren im ersten Lager, der Vektor $B = (b_1|b_2)$ die Stückzahlen der beiden Waren im zweiten Lager an. Der Vektor C gebe die Stückzahlen der beiden Waren in beiden Lagern zusammen an.

- Drücke C durch A und B aus.
- Was gibt der Vektor $B - A$ an?
- Was sagt die Gleichung $B = 2 \cdot A$ aus?
Drücke in diesem Fall C durch A aus.

► Auftrag 2: Rabatte

Die Verkaufspreise (in Euro) von vier Waren werden durch den Vektor $V = (v_1|v_2|v_3|v_4)$ angegeben. Bei Großabnahme erhält man 35% Rabatt. Es sei V' der Vektor der Preise bei Großabnahme und R der Vektor der Rabatte.

- Welche Beziehung besteht zwischen R und V ?
- Welche Beziehung besteht zwischen V' und V ?

► Auftrag 3: Zimmerpreise

Ein Hotel hat 25 Zimmer. Der Vektor $P \in \mathbb{R}^{25}$ gibt die Zimmerpreise an, der Vektor $B \in \mathbb{R}^{25}$ gibt an, wie oft jedes Zimmer im laufenden Monat belegt war.

- Drücke die Gesamteinnahmen G des Hotels im laufenden Monat durch P und B aus.
- Im nächsten Monat werden die Zimmerpreise um 5% erhöht. Drücke wiederum G durch P und B aus.

► Auftrag 4: Firmenbestellung

Eine Firma bestellt 100 Waren. Die Stückzahlen der bestellten Waren seien $s_1, s_2, \dots, s_{100}$, die Preise der Waren seien $p_1, p_2, \dots, p_{100}$. Schreibe einen Stückzahlvektor S und einen Preivektor P auf. Was bedeutet $S \cdot P$?



Gute Konzepte erleichtern
die Orientierung:
Bachstraße in H7

Neue Wege in der Vektor- geometrie

Wie hilfreich sind Vektoren in
der Analytischen Geometrie?
Die Antwort hängt wesentlich
vom verwendeten Vektorkonzept
ab.

Günther Malle

Professor für Mathematik und ihre Didaktik an
der Universität Wien
E-Mail: guenther.malle@univie.ac.at

Vektoren sind heute aus der Analytischen Geometrie der Schule nicht mehr wegzudenken. Das war jedoch nicht immer so. Vor der Einführung der Vektorrechnung in der Schule (ca. ab 1960) hat man auch schon Analytische Geometrie betrieben und konnte im Wesentlichen die gleichen Aufgaben lösen. Durch die Einführung der Vektoren hat man sich nicht einmal Rechenarbeit erspart, denn die konkreten Rechnungen müssen ja doch koordinatenweise ausgeführt werden. Worin liegt dann der Vorteil der Vektoren in der Analytischen Geometrie?

Darauf kann man zweierlei antworten:

- Der Formalismus der Vektorrechnung erlaubt eine *knappere und übersichtlichere Darstellung* von Rechnungen und Beziehungen als die bloße Koordinatengeometrie.
- Die Vektorgeometrie bietet gegenüber der bloßen Koordinatengeometrie einen *heuristischen Vorteil*. Sie liegt nämlich in vielen Fällen näher am tatsächlichen Denken beim Lösen von Aufgaben als die reine Koordinatengeometrie. In der Analytischen Geometrie denkt man nämlich in *Punkten und Pfeilen (Bewegungen)*. Dies kann man mit Vektoren besser beschreiben als mit bloßen Zahlen (wie in der Koordinatengeometrie).

Schon Leibniz (1646–1716) hat von einem solchen Formalismus geträumt, weil ihm die bloße Koordinatengeometrie zu statisch erschien. In seiner „Analysis situs“ hat er den ersten Versuch gestartet, einen solchen Kalkül zu entwickeln. Es hat aber bis

zum Ende des 19. Jahrhunderts gedauert, bis dieser Formalismus in Form der heutigen Vektorrechnung vorlag, und noch ein halbes Jahrhundert, bis er in die Schule vordrang. Eine Rückkehr zur bloßen Koordinatengeometrie würde diese Entwicklung negieren und erscheint heute kaum mehr denkbar.

Die Vektorrechnung kommt im Mathematikunterricht der Schule vorwiegend in der linearen Analytischen Geometrie zum Tragen (Geraden, Ebenen usw.). In der nichtlinearen Analytischen Geometrie (Kreis, Kugel, Kegelschnitte) kann man mit ihr weniger anfangen. Wie man dem Beitrag von Gerald Wittmann in diesem Heft (S. 50) entnehmen kann, kommt man bei den Kegelschnitten zur Not auch ohne Vektoren aus.

Was ist ein Vektor?

Auf diese Frage wurden im Lauf der Geschichte der Mathematik viele verschiedene Antworten gegeben (vgl. Malle 1998). Auf Hochschulebene wird der Vektorbegriff heute im Allgemeinen axiomatisch definiert: Ein Vektor ist ein Element eines Vektorraumes. Eine axiomatische Einführung des Vektorbegriffs in der Schule wäre aber sinnlos. Die Axiome eines Vektorraumes bilden zwar die Rahmenbedingungen, die ein schulischer Vektorbegriff erfüllen muss, es geht aber im Unterricht zunächst um etwas ganz anderes: Es müssen inhaltliche Vorstellungen von Vektoren entwickelt werden. Doch welche?

Ein nahe liegender Gedanke wäre, einen Vektor als Pfeil aufzufassen. Aber Pfeile bilden keinen Vektorraum. Man kann sie nicht einmal addieren, wenn sie nicht zufällig den gleichen Anfangspunkt haben oder aneinander hängen. Die ersten Ideen, diesen Mangel in Ordnung zu bringen, gehen auf den italienischen Mathematiker Giusto Bellavitis (1803–1880) zurück. Er nannte zwei Pfeile „*äquipollent*“, wenn sie gleich lang, parallel und gleich orientiert sind. Im Gegensatz zu den heutigen Schulbüchern fasste er jedoch *äquipollente Pfeile* nicht zu einer Klasse zusammen. Dies wurde anscheinend erst im 20. Jahrhundert durch den Einfluss der Mengenlehre getan.

Für Pfeilklassen kann man eine Addition und Vervielfachung so definieren, dass die Axiome eines Vektorraumes erfüllt sind. Dieses Pfeilklas-

senmodell war der Beginn der schulischen Vektorrechnung (etwa in dem Lehrbuch Köhler/Höwelmann/Krämer 1968) und ist heute noch das vorherrschende Vektormodell in den Schulbüchern, wenn auch manchmal in modifizierter Form. Es scheint sich allerdings nur in der Schulbuchliteratur vorzufinden. In die Hochschulmathematik hat dieses Modell nie wirklich Eingang gefunden. Da dieses Modell ziemlich bekannt ist, wollen wir es im Folgenden nur skizzenhaft beschreiben.

Das Pfeilklassenmodell

In diesem Modell wird ein Vektor als *Pfeilklass* aufgefasst, d.h. als eine Menge gleich langer, paralleler und gleich orientierter Pfeile (siehe **Kasten 1**). Jeder Pfeil einer solchen Pfeilklass wird *Repräsentant* der Pfeilklass genannt. Für diese Pfeilklassen werden Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Vervielfachung) definiert. Diese Rechenoperationen werden über Repräsentanten definiert (s. Kasten 1).

Dieses Vorgehen hat eine unangenehme Konsequenz: Bei jeder Definition muss die Unabhängigkeit von der Auswahl der Repräsentanten nachgewiesen werden. Betrachten wir etwa die Summe zweier Vektoren. Wenn man statt der gezeichneten Repräsentanten der beiden Pfeilklassen zwei andere Repräsentanten mit gemeinsamem Anfangspunkt auswählt, muss durch geometrische Argumente nachgewiesen werden, dass sich dieselbe Summenpfeilklass ergibt.

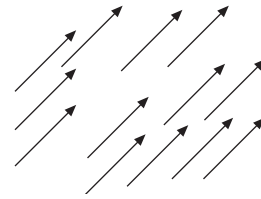
Auch alle weiteren Begriffe werden über Repräsentanten (Pfeile) definiert:

- Betrag eines Vektors (Länge eines Pfeils),
- Winkelmaß zweier Vektoren (Winkelmaß zweier Pfeile mit gleichem Anfangspunkt),
- Normalprojektion eines Vektors auf einen anderen (Normalprojektion eines Pfeils auf einen anderen) usw.

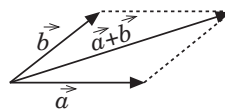
Auch in diesen Fällen muss stets die Unabhängigkeit von der Auswahl der Repräsentanten nachgewiesen werden. Das Skalarprodukt kann auf die Normalprojektion zurückgeführt werden und ist damit auch über Repräsentanten definiert, wenngleich nur indirekt. Die Beweise der Rechengesetze erfolgen ebenfalls durch (zum Teil sehr aufwändige) geometri-

Vektoren als Pfeilklassen

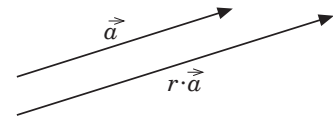
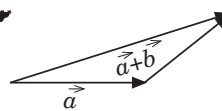
Ein Vektor ist eine Klasse gleich langer, paralleler und gleich orientierter Pfeile



Die Rechenoperationen für Pfeilklassen werden über Repräsentanten definiert.



Definition der Addition durch Repräsentanten

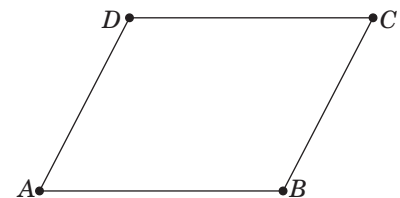


Definition der Vervielfachung (für $r > 0$)

Einen Eckpunkt bestimmen

► Aufgabe

Von einem Parallelogramm $ABCD$ kennt man die Eckpunkte A , B und D .
Ermittle die Koordinaten des Eckpunkts C .



sche Überlegungen anhand von Repräsentanten.

Didaktische Bewertung

Mathematisch betrachtet ist das Pfeilklassenmodell durchaus korrekt. Gegen seine Verwendung im Mathematikunterricht sprechen jedoch schwerwiegende didaktische Gründe. (Ähnliche Argumente kann man auch gegen das gelegentlich vorgeschlagene Translationsmodell oder Punktmodell anführen, doch kann darauf aus Platzgründen nicht eingegangen werden.)

- Das Pfeilklassenmodell ist *unbrauchbar für die Analytische Geometrie*.

Denn – wie schon festgestellt – denkt man in der Analytischen Geometrie grundsätzlich in Punkten und Pfeilen. Mit Pfeilen allein kommt man nicht aus und Pfeilklassen sind überhaupt unangebracht. Betrachten wir etwa die Grundaufgabe in **Kasten 2**.

Was denkt man sich bei der Ermittlung von C ? Jeder denkt hier wohl im Prinzip so: Ich gehe vom Punkt B aus und gehe längs des Pfeiles von B nach C bis zum Punkt C . Das kann man so (oder so ähnlich) anschreiben: $C = B + \overrightarrow{BC}$. Leider kenne ich $\overrightarrow{BC}$ nicht. Aber ich sehe an der Figur: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. Weil A und D gegeben sind, kann ich $\overrightarrow{AD}$ berechnen und erhalte $C = B + \overrightarrow{AD}$.

Ich wette: Jeder von uns denkt hier in Punkten und Pfeilen und nicht in Pfeilen allein und schon gar

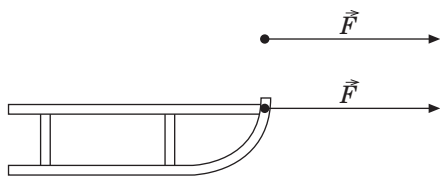


Abb. 1: Wo greift die Zugkraft an?

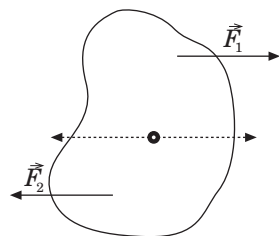


Abb. 2: Kraftpfeile dürfen nicht beliebig verschoben werden

nicht in Pfeilklassen. Oder denkt hier jemand an den zum Pfeil von B nach C parallelen Pfeil, der 100 000 km nach links oben verschoben ist?

■ Das Pfeilklassenmodell ist *unbrauchbar für die Physik*.

Praktisch alle in der Physik vorkommenden Vektoren sind *keine* Pfeilklassen. Die einzige Ausnahme, die mir einfällt, ist die Feldstärke in einem homogenen Feld. Sobald aber das Feld inhomogen ist, trifft das schon nicht mehr zu.

Betrachten wir als weitere Beispiele Kraftvektoren. Wenn etwa ein Schlitten über eine Eisfläche gezogen wird (Abb. 1), kann man die Zugkraft durch den unteren Pfeil darstellen. Es ergibt aber keinen Sinn, sie durch den oberen Pfeil darzustellen. Oder betrachten wir einen starren Körper, der um einen Punkt drehbar ist (Abb. 2). Wenn wir die beiden eingezeichneten Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ so verschieben, dass sie im Drehpunkt angreifen, dann dreht sich der Körper plötzlich nicht mehr. Viele Kraftvektoren der Physik sind also an ihren Angriffspunkt gebunden oder können bestenfalls in ihrer „Wirkungslinie“ verschoben werden. Aber man darf praktisch nie die Kraftpfeile beliebig in der Gegend herum schieben.

■ Ein Spezifikum des Pfeilklassenmodells besteht darin, dass man zwischen *Klassen* und *Repräsentanten* unterscheiden muss.

Die Rechenoperationen für Vektoren können nur über Repräsentanten eingeführt werden. Ebenso können die Beweise der Rechengesetze nur über Repräsentanten geführt werden. Dabei muss man jedes Mal (was

leider in den Schulbüchern und im Unterricht häufig unter den Tisch fällt) die Unabhängigkeit von der Auswahl der Repräsentanten nachweisen. Die Unterscheidung von Klasse und Repräsentant erzeugt bei Schülerinnen und Schülern oft den falschen Eindruck, dass dies eine notwendige Eigenschaft des Vektorbegriffes sei. Dies ist aber nur eine zufällige Eigenschaft des Pfeilklassenmodells und ansonsten überhaupt nicht typisch für Vektoren. In der Definition eines Vektorraumes ist keine Rede von Klasse und Repräsentant und bei fast allen Vektoren, die in der Mathematik vorkommen, ergibt diese Unterscheidung auch keinen Sinn.

■ Während die *Einführung der Rechenoperationen* und die *Beweise der Rechengesetze* für Zahlenpaare und Zahlentripel sehr einfach sind, ist dies im Pfeilklassenmodell (wie in allen anderen geometrischen Modellen) nicht der Fall.

Die Beweise sind im Pfeilklassenmodell vielfach sehr aufwändig, oft schon dadurch, dass viele Fälle unterschieden werden müssen. Man überlege sich dazu beispielsweise, wie viele Fälle für die Lage der Repräsentanten der drei Pfeilklassen $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ man betrachten müsste, um das Distributivgesetz

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

geometrisch zu beweisen. Für genauere Begründungen stehen auf Schulniveau nicht immer ausreichend viele geometrische Lehrsätze zur Verfügung. Im Gegensatz zur Einführung der Rechenoperationen auf algebraischer Basis bringt die Einführung der Rechenoperationen auf geometrischer Basis auch gewisse Probleme mit der Namensgebung mit sich. Dass man die koordinatenweise Addition von Zahlenpaaren als Addition bezeichnet, ist ziemlich einsichtig, aber warum wird die Zusammensetzung zweier Pfeile zu einem resultierenden Pfeil durch Aneinanderhängen oder nach der Parallelogrammregel als Addition bezeichnet? Analoges gilt für die Subtraktion und skalare Multiplikation.

■ Eine konsequente und saubere Anwendung des Pfeilklassenmodells findet oft nicht statt.

In einigen deutschen Schulbüchern um 1960–1970 wurde das Pfeilklassenmodell mathematisch sauber behandelt. Bei der Übernahme dieses Modells durch andere Autoren sind jedoch gelegentlich *Verwässerungen* eingetreten. Manchmal werden Vek-

toren als Pfeilklassen definiert, diese Definition hat aber nur eine Alibi-funktion, weil später mit ihr nicht mehr gearbeitet wird.

Ein extremes Beispiel findet sich in einem österreichischen Lehrbuch. Die Autoren definieren zunächst einen Vektor als Pfeilklass und weisen auf den Unterschied zwischen Vektor und Repräsentant hin. Nur wenige Zeilen später findet sich jedoch eine Konstruktionsbeschreibung, in der Folgendes zu lesen ist:

(1) Zunächst zeichnet man den Vektor r von C nach C' .

(2) Dann verschiebt man r parallel durch die Punkte A und B .

(3) Die Endpunkte der Vektoren sind in entsprechender Reihenfolge zu verbinden.

Was soll das alles bedeuten?

Ad (1): Was soll es heißen, eine Pfeilklass von einem Punkt nach einem anderen zu zeichnen (sie besteht ja aus unendlich vielen Pfeilen)?

Ad (2): Was bedeutet es, eine Pfeilklass parallel zu verschieben (sie ändert sich ja durch eine Parallelverschiebung nicht)?

Ad (3): Was sind die Endpunkte einer Pfeilklass (sie hat ja keine Endpunkte)? Es ist klar, dass hier nicht mehr von Pfeilklassen, sondern von Einzelpfeilen die Rede ist. Der Vektorbegriff hat in diesem Buch auf einer Strecke von nur wenigen Zeilen eine wundersame Wandlung von einer Pfeilklass zu einem Einzelpfeil durchgemacht, ohne dass es den Autoren wert wäre, auch nur ein Sterbenswörtchen dazu zu sagen.

■ Die Diskrepanz, dass Vektoren offiziell als Pfeilklassen eingeführt werden, beim praktischen Arbeiten jedoch als Einzelpfeile empfunden werden, bereitet den Schülerinnen und Schülern große *Schwierigkeiten*.

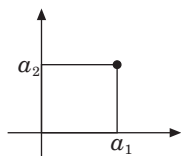
In der Tat haben empirische Untersuchungen gezeigt, dass viele Schülerinnen und Schüler enorme Schwierigkeiten mit dem Pfeilklassenmodell haben. Diese Schwierigkeiten sind ab Seite 16 genauer beschrieben.

Algebraische Vektoren mit geometrischer Deutung

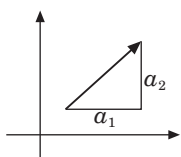
Im Gegensatz zu den vielen Problemen, die das Pfeilklassenmodell bereitet, bereitet das Vektormodell der n -Tupel (Zahlenpaare, Zahlentripel usw.) kaum nennenswerte Schwierigkeiten. Wir haben dieses Modell im vorangegangenen Artikel auf Seite 5

Vektoren als Zahlentupel

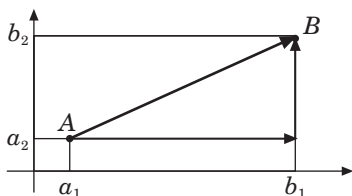
Nach dem hier propagierten Konzept sind Vektoren algebraische Objekte, nämlich Zahlenpaare (Zahlentripel). Die Zahlenpaare können als Punkte oder Pfeile geometrisch gedeutet werden.



$A = (a_1 | a_2)$ als Punkt in der Ebene



$\vec{a} = (a_1 | a_2)$ als Pfeil in der Ebene



Vektor, gegeben durch Anfangs- und Endpunkt. Es gilt:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (b_1 - a_1 | b_2 - a_2) \\ &= (b_1 | b_2) - (a_1 | a_2) \\ &= B - A\end{aligned}$$

genauer beschrieben (vgl. auch **Kasten 3**) und haben dort bereits Zahlenpaare (Zahlentripel) geometrisch als Punkte oder Pfeile in der Ebene (im Raum) geometrisch gedeutet. Das war unproblematisch. Was wir allerdings noch nicht durchgeführt haben, war eine geometrische Deutung der Rechenoperationen für Zahlenpaare (Zahlentripel). Um aber Analytische Geometrie betreiben zu können, müssen wir eine Verbindung zwischen den algebraischen Rechenoperationen (Addition, Vervielfachung) und der Geometrie herstellen. Da

wird die Sache spannend, denn das ist das eigentlich schwierige, aber auch didaktisch interessante Problem der Analytischen Geometrie in der Schule. Das Pfeilklassenmodell (sowie auch das Translations- oder Punktmodell) erweisen sich hier als wenig brauchbar, wie wir gesehen haben. Im Folgenden plädiere ich für ein didaktisches Konzept, dessen erste Ideen in Bürger u. a. (1980) publiziert wurden und das in Form verschiedener Lehrbücher konkretisiert und weiter entwickelt wurde. Die ausgereifteste Form findet man in Malle u. a. (2004, 2005).

Die Grundidee des Konzepts

Vektoren sind nach diesem Konzept *algebraische Objekte*, nämlich *Zahlenpaare (Zahlentripel)*. Für diese werden Rechenoperationen definiert (vgl. S. 5). Die Zahlenpaare (Zahlentripel) und ihre Rechenoperationen werden in der Ebene (im Raum) mithilfe von Punkten oder Pfeilen lediglich *geometrisch gedeutet*, für die Punkte bzw. Pfeile selbst werden aber keine Rechenoperationen definiert. Die Ebene (der Raum) wird dabei mit einem fixen Koordinatensystem versehen.

Aus Gründen der Einfachheit beschränken wir uns bei den folgenden Ausführungen auf die Analytische Geometrie der Ebene und somit auf Zahlenpaare. Im Raum verläuft alles analog. Wir wissen schon, dass man ein Zahlenpaar $(a_1 | a_2)$ als *Punkt* oder *Pfeil* in der Ebene geometrisch darstellen kann. Da der Anfangspunkt des Pfeils beliebig gewählt werden darf, kann man ein Zahlenpaar $(a_1 | a_2)$ durch unendlich viele Pfeile in der Ebene darstellen. Alle diese Pfeile sind aber gleich lang, parallel und gleich gerichtet. Eine Zusammenfassung dieser Pfeile zu einer Klasse erfolgt nicht.

Bezeichnung von Vektoren

Ein wesentlicher Punkt des Vorschlags ist nun der folgende: Die *Bezeichnung von Vektoren* richtet sich nach ihrer *geometrischen Deutung*. Werden Vektoren als Punkte gedeutet, bezeichnen wir sie mit $A, B, C, \dots$; werden sie als Pfeile gedeutet, mit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$. Wird ein Vektor durch einen Pfeil von A nach B gedeutet, so bezeichnen wir ihn mit $\overrightarrow{AB}$. Aus einer entsprechenden Skizze (vgl. Kasten 3 unten) kann man ablesen:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (b_1 - a_1 | b_2 - a_2) \\ &= (b_1 | b_2) - (a_1 | a_2) = B - A.\end{aligned}$$

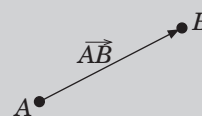
Da dies für alle möglichen Lagen der

Punkte A und B gilt, gilt allgemein: $\overrightarrow{AB} = B - A$. (Man beachte: $\overrightarrow{AB}$ sowie A und B sind Zahlenpaare, es handelt sich also um eine Gleichung zwischen Zahlenpaaren, nicht um eine Gleichung zwischen Punkten und Pfeilen.)

Aus der Formel $\overrightarrow{AB} = B - A$ ergibt sich $A + \overrightarrow{AB} = B$. Deutet man A als Punkt, $\overrightarrow{AB}$ als Pfeil und B wiederum als Punkt, lässt sich sagen:

Punkt-Pfeil-Darstellung der Vektoraddition

Wird ein Vektor aus $\mathbb{R}^2$ durch einen Punkt in der Ebene und ein zweiter Vektor aus $\mathbb{R}^2$ durch einen an diesen Punkt angehängten Pfeil dargestellt, so entspricht die Summe der beiden Vektoren dem Endpunkt des angehängten Pfeils.



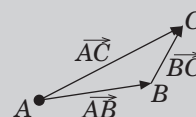
Mithilfe der Formel $\overrightarrow{AB} = B - A$ ergibt sich außerdem:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} &= (B - A) + (C - B) \\ &= C - A = \overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Deutet man die Vektoren als Pfeile, lässt sich sagen:

Pfeildarstellung der Vektoraddition

Werden zwei Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ durch aneinander gehängte Pfeile in der Ebene dargestellt, so entspricht die Summe der beiden Vektoren dem Pfeil vom Anfangspunkt des ersten Pfeils zum Endpunkt des zweiten Pfeils.



Die beiden Darstellungen der Addition und Vervielfachung von Vektoren sind zweidimensionale Verallgemeinerungen entsprechender Darstellungen im Eindimensionalen. Für die Addition reeller Zahlen gibt es zwei grundlegende Darstellungen auf der Zahlengeraden (**Abb. 3a**, S.12). Analoge Darstellungen erhält man im Zweidimensionalen (**Abb. 3b**).

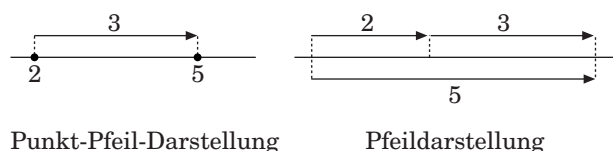


Abb. 3a: Darstellungen der Addition im Eindimensionalen

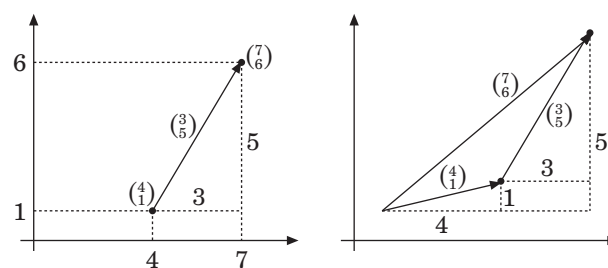


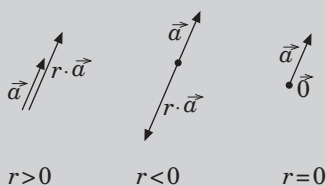
Abb. 3b: Darstellungen der Addition im Zweidimensionalen

Für diese beiden Darstellungsmöglichkeiten der Vektoraddition sind bereits vor dem Beginn der Vektorrechnung (etwa in Klasse 7 oder 8) gewisse Vorübungen unter Einbeziehung des Computers möglich (siehe dazu den Beitrag von Andreas Ulovec, S. 20).

Auch für die Vervielfachung von Vektoren lässt sich eine geometrische Deutung finden (einen genaueren Beweis dafür findet man in Malle u. a. 2004, S. 184):

Streckungsdarstellung der Vervielfachung

Der Multiplikation eines (vom Nullvektor verschiedenen) Vektors a mit einer reellen Zahl r entspricht eine Streckung jedes zugehörigen Pfeils mit dem Faktor r .



Die Schreibweisen, die sich aus diesem Konzept ergeben, erlauben es, Beziehungen zwischen Vektoren koordinatenfrei in knapper und eleganter Weise darzustellen. Dadurch werden Argumentationen einfacher und übersichtlicher. In dem Artikel „Vektorbeweise in der Dreiecksgeometrie“ von Maria Koth ab S. 44 ist dies schön zu sehen. Darüber hinaus kann man die „Macht des Kalküls“ elegant ausnutzen. Man führt dabei Umformungen gemäß den Rechengesetzen aus, ohne alle Schritte geometrisch zu begründen. Dies illustriert die einfache Aufgabe in **Kasten 4**.

Die hier verwendeten Schreibweisen mögen für manche ungewohnt erscheinen, weil man sich vom Alltagsgebrauch lösen kann. Man kann aber mit diesen Schreibweisen

alle Aufgaben der linearen Analytischen Geometrie (bis hin zu den Abituraufgaben) elegant erledigen. Der Kernpunkt der Kritik ist die ungewohnte Schreibweise $A + \overline{AB} = B$. Es wird eingewandt, dass man Punkte und Pfeile nicht addieren könne und man daher schreiben müsse: $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$ (Äpfel-Birnen-Argument). Wer so argumentiert, hat das Konzept nicht verstanden. Denn wie oben erklärt wurde, sind A , B und $\overline{AB}$ lauter Zahlenpaare und eine Gleichung zwischen Zahlenpaaren ist völlig in Ordnung. Nur werden diese Zahlenpaare unterschiedlich geometrisch gedeutet: das Zahlenpaar A als Punkt, das Zahlenpaar $\overline{AB}$ als Pfeil und das Zahlenpaar B wieder als Punkt. Man darf daraus keinesfalls schließen, dass Punkte und Pfeile addiert werden. Eine Addition für Punkte und Pfeile wurde ja gar nicht eingeführt. Unsere empirischen Untersuchungen zeigen übrigens, dass Schülerinnen und Schüler diese Probleme nicht haben. Es scheint vielmehr ein Problem jener Lehrerinnen und Lehrer zu sein, die die Vektorrechnung anhand älterer Lehrbücher auf andere Weise erlernt haben. In Österreich hat diese Schreibweise schon vor ca. 15 Jahren Eingang in die Schulbücher gefunden. Auch dort erzeugte sie anfänglich Verwirrung. Heute wird sie allseits akzeptiert und funktioniert bestens.

Wozu Ortsvektoren?

Welche Rolle spielen nun die so genannten *Ortsvektoren*? Zunächst sei festgestellt, dass man diese besser als „Ortspfeile“ benennen sollte, denn es handelt sich um Einzelpfeile, die an den Ursprung als Anfangspunkt gebunden sind. Aber braucht man diese überhaupt? Ich behaupte: Ortspfeile sind in der Analytischen Geometrie schlicht und einfach überflüssig. Ja mehr noch: sie sind schädlich.

Dies sei an einem Beispiel illustriert, nämlich an der Herleitung der Formel für den Schwerpunkt eines Dreiecks. Im **Kasten 5** findet man links eine Herleitung mit Ortspfeilen, rechts eine Herleitung nach dem hier propagierten Konzept.

Man kann Folgendes erkennen:

1. Die linke Skizze ist wegen der vielen eingezeichneten Pfeile äußerst unübersichtlich. Wenn die Lernenden die Lage des Dreiecks ungünstig wählen, gibt es auf jeden Fall Probleme. Die rechte Skizze hingegen ist übersichtlich.
2. Die linke Rechnung ist wegen der Pfeilschreibweisen komplizierter als die rechte.
3. Die linke Rechnung liefert gar nicht das, was man eigentlich möchte (nämlich S). Man erhält nur den Ortspfeil $\overline{OS}$, dessen Koordinaten man dann erst extra in die Koordinaten von S umschreiben muss (warum eigentlich?). Die rechte Rechnung hingegen liefert direkt das gewünschte S .
4. Die linke Rechnung entspricht einem gekünstelten, unnatürlichen Denken. Niemand denkt bei der Lösung dieses Problems an die Ortspfeile (es sei denn, er ist durch den Unterricht schon verbildet worden), sondern man denkt in Punkten und Pfeilen, was die rechte Rechnung perfekt wiedergibt. Die linke Rechnung stellt also für Schülerinnen und Schüler keine Hilfe dar, sondern eine heuristische Erschwernis. Sie müssen die Sache anders hinschreiben als sie denken. (Wenn man von München nach Hamburg fährt, fährt man auch nicht zuerst vom Ursprung Berlin nach München, dann von München nach Hamburg und dann wiederum von Ursprung Berlin nach Hamburg, sondern mit Verlaub gesagt: Man fährt schlicht von München nach Hamburg.)

Beispiel Geradengleichung

Verbietet man die rechte Schreibweise, so kann man Punktmengen in $\mathbb{R}^2$

Teilung einer Strecke

► Aufgabe

Die Strecke AB wird durch den Punkt T im Verhältnis $1:2$ geteilt. Drücke T durch A und B aus.

1. Lösungsmöglichkeit:

$$\begin{aligned} T &= A + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} \\ \Leftrightarrow T &= A + \frac{1}{3} \cdot (B - A) \\ \Leftrightarrow T &= \frac{1}{3} \cdot (2A + B) \end{aligned}$$

2. Lösungsmöglichkeit:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AT} &= \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} \\ \Leftrightarrow T - A &= \frac{1}{3} \cdot (B - A) \\ \Leftrightarrow T &= \frac{1}{3} \cdot (2A + B) \end{aligned}$$

nicht darstellen. Man kann zwar schreiben:

$$g = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid X = P + t \cdot \vec{g}\};$$

aber man kann nicht schreiben:

$$g = \{\overrightarrow{OX} \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{g}\}.$$

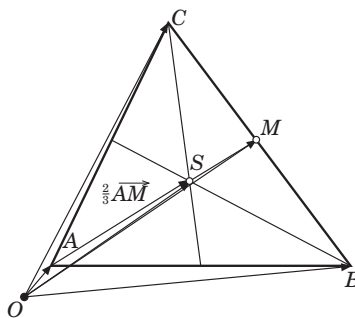
Bei der Parameterdarstellung einer Geraden gibt es noch ein weiteres Problem:

In der Schreibweise $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{g}$ ist $\overrightarrow{OP}$ ein Ortspfeil. Er ist an den Ursprung gebunden, denn würde man ihn parallel verschieben, würde es sich nicht mehr um eine Darstellung derselben Geraden handeln. Der Richtungsvektor $\vec{g}$ aber ist offensichtlich kein Ortspfeil, man bezeichnet ihn meist als „freien Vektor“. Eine Addition eines Ortspfeiles mit einem freien Vektor wird aber in keinem Schulbuch definiert. Was haben sich die Schulbuchautoren dabei wohl gedacht? Die Sache ließe sich natürlich mathematisch in Ordnung bringen, aber das würde Kunstgriffe erfordern, die jenseits der Schulmathematik liegen.

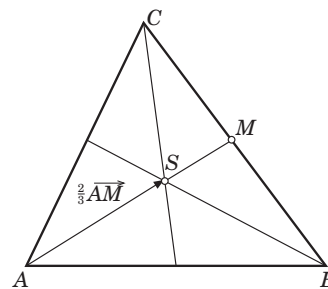
Zum Verhältnis von Algebra und Geometrie

Nach dem hier propagierten Konzept sind Vektoren algebraische Objekte, nämlich Zahlenpaare (Zahlentripel). Manchmal wird eingewandt, dass durch die dauernde Verwendung von Zahlenpaaren und ihrer Rechenope-

Zwei Wege zum Schwerpunkt eines Dreiecks



$$\begin{aligned} \overrightarrow{OS} &= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AM} \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \overrightarrow{OM} \\ &= \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \right) = \\ &= \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \\ &= \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} S &= A + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AM} \\ &= A + \frac{2}{3} (M - A) \\ &= \frac{1}{3} A + \frac{2}{3} M \\ &= \frac{1}{3} A + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} (B + C) \right) = \\ &= \frac{1}{3} A + \frac{1}{3} (B + C) \\ &= \frac{1}{3} (A + B + C) \end{aligned}$$

rationen in der Geometrie der ursprüngliche algebraische Vektorbegriff eine *schleichende Geometrisierung* erfährt, d.h. nach und nach zu einem geometrischen Objekt wird. Dies ist in der Tat der Fall. Die Lernenden identifizieren sehr bald einen Vektor mit dem zugeordneten Punkt oder Pfeil. Sie reden dann etwa vom Punkt P statt vom „Punkt, der dem Vektor P zugeordnet ist“; oder vom Vektor von A nach B statt von dem „Vektor, der dem Pfeil von A nach B zugeordnet ist“.

Diese Identifizierungen treten ganz von selbst ein und sind auch völlig in Ordnung. Sie sind sogar erwünscht, denn sie erleichtern das Sprechen ungemein und sind von großem heuristischen Wert. Die schleichende Geometrisierung des Vektorbegriffs ist in Wirklichkeit ein Vorteil. Dabei kann es in der Hitze des Gefechts schon einmal vorkommen, dass ein Schüler den Ausdruck $A + \overrightarrow{AB}$ so liest: Zum Punkt A wird der Pfeil $\overrightarrow{AB}$ addiert. Das ist zwar streng genommen nicht erlaubt, aber nicht tragisch und hat keine negativen Auswirkungen.

Was jedoch wichtig ist und in diesem Zusammenhang bei den Lernenden unbedingt erreicht werden sollte, ist die Fähigkeit, eine Sachlage aufzuklären, wenn eine Verständnisschwierigkeit auftaucht. Wenn man gefragt wird, warum in einem Parallelogramm $ABCD$ die Gleichung

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ gilt, obwohl die Pfeile unterschiedlich sind, sollte man nicht kapitulieren, sondern erklären können, dass es sich um zwei einander gleiche Zahlenpaare handelt, die durch unterschiedliche Pfeile geometrisch dargestellt werden.

In der klassischen Linearen Algebra der Hochschule wird das Verhältnis zwischen Algebra und Geometrie anders gesehen: In der Algebra gibt es den Vektorraum $\mathbb{R}^2$, also den Vektorraum der Zahlenpaare. In der Geometrie gibt es Vektorräume für geometrische Objekte, z.B. den Vektorraum der Pfeilklassen. Die Beziehung zwischen diesen beiden Vektorräumen ist eine Isomorphie im Sinne der Linearen Algebra.

Im Konzept der algebraischen Vektoren mit geometrischer Deutung wird jedoch nicht so vorgegangen. Es wird zwar ebenfalls der Vektorraum $\mathbb{R}^2$ betrachtet (wenngleich ohne Nennung des Wortes „Vektorraum“), es werden jedoch keine Rechenoperationen für irgendwelche geometrischen Objekte eingeführt, weder für Punkte noch Pfeile noch irgendetwas anderes. Deshalb erhält die Ebene bei diesem Aufbau auch keine Vektorraumstruktur. Die Beziehung zwischen $\mathbb{R}^2$ und Ebene kann daher nicht als Isomorphie im Sinne der Linearen Algebra aufgefasst werden, sondern nur im Sinne einer *anschaulichen geometrischen Deutung* algebraischer Sachverhalte

bzw. umgekehrt als eine *anschauliche algebraische Beschreibung* geometrischer Sachverhalte. Das ist weniger als das, was an der Hochschule gelehrt wird, reicht aber für die Analytische Geometrie der Schule völlig aus.

Die Einschränkung des schulischen Vektorbegriffs auf die Vektoren in $\mathbb{R}^n$ anstelle eines allgemeinen Vektorbegriffs (Vektor als Element eines Vektorraums) stellt keine ernsthafte Einschränkung dar. Ein Satz der Linearen Algebra besagt ja, dass jeder n -dimensionale Vektorraum isomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist. Nach Einführung einer Basis kann man jeden Vektor

aus einem n -dimensionalen Vektorraum durch den dazugehörigen Koordinatenvektor, also einen Vektor in $\mathbb{R}^n$ angeben. Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ ist also der typische Vertreter eines n -dimensionalen Vektorraumes schlechthin. Die Verallgemeinerung von $\mathbb{R}^n$ zum allgemeinen Vektorraum bereitet an der Hochschule keinerlei Probleme. Insofern ist das hier vorgeschlagene Vektorkonzept auch „aufwärtskompatibel“ und eine gute Vorbereitung für die Hochschule.

Literatur

- Bürger, H./Fischer, R./Malle, G./Reichel, H.-C.: *Einführung des Vektorbegriffes: Arithmetische Vektoren mit geometrischer Deutung*. Journal für Mathematik-Didaktik, Bd. 1, Heft 3, 1980, S. 171–187.
 Köhler, J./Höwelmann, R./Krämer, H.: *Analytische Geometrie in vektorieller Darstellung*. Salle/Diesterweg, Frankfurt 1968.
 Malle, G.: *Was ist ein Vektor? – Antworten aus der Geschichte der Mathematik*. Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Höheren Schulen, Heft 29, S. 112–123. Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wien, 1998.
 Malle, G./Ramharter, E./Ulovec, A./Kandl, S.: *Mathematik verstehen 5 und 6*. Schulbuch für die AHS-Oberstufe. Österreichischer Bundesverlag und Holder-Pichler-Tempsky, Wien, 2004, 2005.

Anzeige

Reihe: SINUS Transfer

Lernen und Lehren mit dynamischen Arbeitsblättern Mathematik



Ausgezeichnet mit dem digita 2005, dem Deutschen Bildungssoftware-Preis.

Die **Dynamischen Arbeitsblätter** bieten Ihren Schülerinnen und Schülern Lernumgebungen, in denen sie Gesetzmäßigkeiten durch eigenes Experimentieren entdecken können. Das Ausprobieren und Experimentieren am Bildschirm ergänzt dabei das Zeichnen mit Bleistift und Geodreieck.

Durch dieses Visualisieren und Dynamisieren können Ihre SchülerInnen viele Zusammenhänge selbst erkennen oder eigene Vermutungen anstellen.

Die Inhalte der Arbeitsblätter: Dreiecke, Vierecke, Achsensymmetrie. Inklusive Arbeitsaufträgen, Hilfen und weiterführenden Links.

Die Lernumgebungen basieren auf der Mathematiksoftware GEONExT.

Paket

Einzelplatz-Lizenz (CD-ROM)
mit Handbuch
Bestell-Nr. 92355, € 49,80

Handbuch

ISBN 3-617-92354-2
€ 16,80

Einzelplatz-Lizenz

CD-ROM
Bestell-Nr. 92352, € 39,-

Geeignet für:

Windows 98/ME/NT/2000/XP
128 MB Arbeitsspeicher
ab 800x600 Pixel Auflösung



BESUCHEN SIE UNS AUCH IM INTERNET:

www.friedrichonline.de

E-Mail: leserservice@friedrich-verlag.de

Für Ihre Bestellung wenden Sie sich bitte an unseren Leserservice.

Telefon: 05 11 / 4 00 04-150, Fax: -170

Preise zzgl. Versandkosten, Stand 2005.

(Preise in Klammern für Nicht-Abonnenten)

FRIEDRICH VERLAG
Pädagogische Zeitschriften in Zusammenarbeit mit Klett



Fit für die nächste Klassenarbeit

Mit den neuen Lambacher Schweizer Klassenarbeiten können Ihre Schülerinnen und Schüler selbstständig das Gelernte wiederholen, auffrischen und überprüfen.

Langsam einsteigen und die Anforderungen schrittweise erhöhen – so wird das selbstständige Lernen erleichtert. Jedes Kapitel ist gewohnt klar und übersichtlich aufgebaut und enthält vielfältige Hilfestellungen zum Üben und Wiederholen:

- zwei Seiten Basiswissen und einen Kurztest für einen leichten Einstieg ins Thema
- vier Klassenarbeiten mit zunehmendem Schwierigkeitsgrad
- ausführliche Lösungen für alle Klassenarbeiten
- Tutorlösungen mit Hinweisen auf zentrale Arbeitstechniken

Abgerundet wird der Band durch Jahresarbeiten, die den gesamten Stoff des Schuljahres abfragen und sich im Aufbau an den neuen Standards und Jahrgangsarbeiten orientieren.



**Lambacher Schweizer
Klassenarbeiten
für Klasse 5**
Schülerheft mit Lösungen,
120 Seiten, flexibler Einband
3-12-734055-9 € 10,20 ●

Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Foto: bilderbox



■ SEKUNDARSTUFE I/II
9. – 13. Schuljahr

Schwierigkeiten mit Vektoren

Vektoren scheinen für uns Lehrerinnen und Lehrer eine klare Sache zu sein. Aber was stellen sich die Schülerinnen und Schüler darunter vor?

Günther Malle

Professor für Mathematik und ihre Didaktik an der Universität Wien
E-Mail: guenther.malle@univie.ac.at

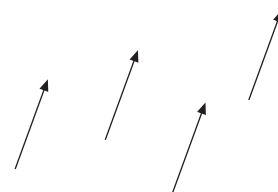
Mit dem Ziel, die Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern zu Vektoren und zur Analytischen Geometrie zu erforschen, haben wir im letzten Jahrzehnt zahlreiche schriftliche Befragungen und mündliche Interviews an der Fakultät für Mathematik der Universität Wien durchgeführt. (Insgesamt wurden ca. 700 Schülerinnen und Schüler erfasst, die Ergebnisse liegen in Form von Diplomarbeiten vor.) Dabei wurden einerseits ziemlich unerwartete Vorstellungen der Befragten sichtbar, andererseits ließen sich aber auch die Auswirkungen eines undurchdachten Vektorkonzepts und anderer unterrichtlicher Mängel erkennen. Von der Fülle der Resultate kann hier klarerweise nur ein winziger Ausschnitt wiedergegeben werden. Ich möchte damit erreichen, Sie als Leserinnen und Leser für solche Fragen zu sensibilisieren und Sie anzuregen, derartige Befragungen vielleicht auch in den eigenen Klassen durchzuführen.

Die im Folgenden vorgestellten Ausschnitte stammen aus Interviews mit 15-jährigen Schülerinnen und Schülern der Gymnasien. Man beachte dabei, dass in Österreich die Vektorrechnung und Analytische Geometrie in den Klassenstufen 9 bis 12 unterrichtet wird. Alle interviewten Schülerinnen und Schüler hatten die untersuchten Inhalte im Unterricht bereits kennen gelernt. Vektoren wurden dabei als Pfeilklassen eingeführt, gearbeitet wurde anschließend jedoch vorwiegend mit Zahlenpaaren, Zahlentripeln usw., die ebenfalls als „Vektoren“ bezeichnet wurden.

Schwierigkeiten mit Pfeilklassen

Die Probleme der Schülerinnen und Schüler liegen im Allgemeinen in dem unaufgeklärten Widerspruch, dass Vektoren im Unterricht als Pfeilklassen eingeführt wurden, beim praktischen Gebrauch jedoch als Einzelpfeile aufgefasst werden. Betrachten wir dazu den folgenden Ausschnitt aus dem Interview mit Alexandra (15):

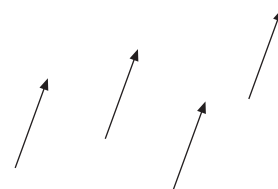
- I: Was stellst du dir unter einem Vektor vor?
A: Einen Pfeil in einem Raum.
I: Jemand sagt: „Ein Vektor ist die Gesamtheit dieser Pfeile.“ Was sagst du dazu?



- A: Stimmt nicht!
I: Warum?
A: Ein Vektor ist etwas Einzelnes. Es gibt natürlich mehrere Vektoren, das sind dann mehrere Pfeile, aber eine Gesamtheit? Das kann ich mir nicht vorstellen.
I: Was ist für dich ein Vektor?
A: Etwas Einzelnes, womit man rechnen kann oder eben zeichnen. Jeder Einzelne dieser vier Pfeile ist ein Vektor.
I: Diese Pfeile sind gleich lang, parallel und gleich orientiert. Handelt es sich immer um ein und denselben Vektor?
A: Nein! Wenn es ein und derselbe Vektor wäre, dann würde ja nur ein Vektor [gemeint: Pfeil] da sein.

Ein ähnlicher Ausschnitt aus dem Interview mit Richard (15):

- I: Jemand sagt: „Ein Vektor ist die Gesamtheit dieser Pfeile.“ Was sagst du dazu?

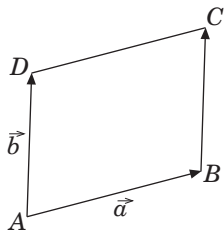


- R: Diese vier Vektoren kann man aneinander reihen und kommt dann auf einen Vektor, einen Gesamtvektor.
I: Bitte zeichne das auf!
R (fertigt eine Zeichnung an);



Alle befragten Schülerinnen und Schüler zeigten eine deutliche Aversion gegen Pfeilklassen. Bei manchen hatte man den Eindruck, dass sie sich eine solche Klasse als Denkobjekt, mit dem man operieren kann, gar nicht vorstellen konnten, weil ihnen das zu abstrakt war.

Die Identifikation eines Vektors mit einem Einzelpfeil zieht nun einige Folgeprobleme nach sich. Wenn wir in einem Parallelogramm $ABCD$ die Gleichung $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ anschreiben, ergibt sich das Problem, wieso zwei offenkundig verschiedene Pfeile einander gleich sind. Dazu ein weiterer Ausschnitt aus dem Interview mit Alexandra:



A: Ich würde Vektor $\vec{b}$ auf Vektor $\vec{a}$ so lange verschieben, bis ich zum Punkt B komme, und dann habe ich den Vektor $\vec{BC}$... Das ist eigentlich genau derselbe Vektor wie $\vec{b}$, nur von einem anderen Punkt zu einem anderen Punkt.

I: Kann man behaupten: $\vec{BC} = \vec{b}$?

A: Nein, weil $\vec{BC}$ geht von einem anderen Punkt als $\vec{b}$ aus.

Merken Sie den Widerspruch in diesem Interviewausschnitt? Einerseits sagt Alexandra, dass $\vec{BC}$ eigentlich genau derselbe Vektor wie $\vec{b}$ ist, andererseits sagt sie, dass man nicht $\vec{BC} = \vec{b}$ setzen kann. Dieser Widerspruch wurde für Alexandra vermutlich nie aufgeklärt; sie muss damit leben. Angesichts solcher begrifflicher Verwirrungen darf man sich aber auch über die folgende Antwort von Michaela (15) nicht wundern:

I: Was stellst du dir unter einem Vektor vor?

M: Ich weiß nicht. Ich habe überhaupt keine Ahnung. Ein Vektor ist für mich nur ein Buchstabe mit oben einem Pfeil.

Die algebraische Auffassung von Vektoren

Die Identifikation eines Vektors mit einem Pfeil sitzt bei manchen Schülern so tief, dass sie diese Assoziation auch dann heranziehen, wenn sie absolut nicht passend ist. Kommt in einer Aufgabe das Wort „Vektor“ vor, wird sozusagen der Knopf auf „Geometrie“ gestellt und gar nicht mehr gefragt, ob dies auch sinnvoll ist.

Wir haben beispielsweise gefragt, ob die Vektoren $(150|70)$ und $(70|150)$ gleich oder verschieden sind. Kaum jemand hat mit der paarweisen Übereinstimmung der Koordinaten argumentiert. Die meisten haben die Vektoren aufgezeichnet und erst nach Fertigstellung der Zeichnung geantwortet, dass die beiden Vektoren verschieden seien. Dazu ein bezeichnender Ausschnitt aus dem Interview mit Alexandra (15):

Welche Vorstellung haben die Lernenden von Vektoren?

Aufgabe

Bei den vier Spielen eines Fußballcups wurden von folgenden Spielern Tore geschossen.

1. Spiel: Müller (2), Schmid (1), Kaiser (2)
2. Spiel: Maier (3), Schmid (2), Eder (1)
3. Spiel: Müller (1), Eder (2), Schmid (1)
4. Spiel: Kaiser (4)

Ordne jedem Spieler einen Vektor zu, der angibt, wie viele Tore er in jedem Spiel geschossen hat.

Einige Lösungsbeispiele

Richard (15)

Müller 1. $\rightarrow$ 2. $\circledast$ 3. $\rightarrow$ 4.

Alexandra (15)

1 cm 1 cm S: 1 cm K: 2 cm 1 cm

Sandra (15)

M S K

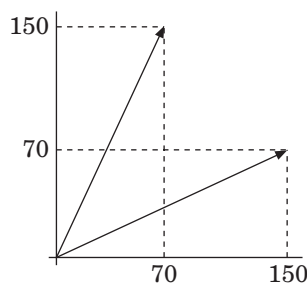
Natascha (15)

1. Spiel H: $\nearrow$ Sch: $\downarrow$ 2. Spiel Maier $\nearrow \nearrow \nearrow$

Christian (15)

1. 2. 3. 4.
Müller
Maier
Kaiser
Schmid

Y + Tore
X + Spiele
GT = NoT



I: Du erkennst die Ungleichheit dieser Vektoren aufgrund einer Zeichnung. Kannst du dies auch ohne Zeichnung begründen?

A: Nein!

Einige der Befragten haben zunächst behauptet, dass die Vektoren gleich wären, weil sie die gleichen Zahlen beinhalten. Nach Anfertigung einer Zeichnung behaupteten sie jedoch das Gegenteil.

Schlimmer noch waren die Ergebnisse bei der Aufgabe in **Kasten 1**, Seite 17. Mag sein, dass diese Aufgabe etwas gekünstelt wirkt (eine Tabelle wäre hier wahrscheinlich eine angemessenere Darstellung). Aber darum geht es hier nicht. Die Aufgabe sollte dazu dienen, festzustellen, ob die befragten Schülerinnen und Schüler mit dem Wort „Vektor“ eher etwas Algebraisches oder eher etwas Geometrisches verbinden.

Die Ergebnisse waren überraschend. Obwohl alle Befragten im Unterricht ausgiebig mit Zahlenquadrupeln gearbeitet hatten und diese Objekte beim praktischen Arbeiten auch immer wieder als „Vektoren“ bezeichnet wurden, hat kein einziger ein Quadrupel von Zahlen hingeschrieben, sondern alle haben versucht, den einzelnen Fußballern irgendwelche Pfeile zuzuordnen (s. Kasten 1). Christians Darstellung soll wohl eine Art Stabdiagramm sein.

Deutung von Zahlenpaaren als Pfeile

Wenn sie danach gefragt wurden konnten die meisten Schülerinnen und Schüler ein Zahlenpaar als Punkt deuten. Forderte man sie jedoch auf, ein Zahlenpaar als Pfeil zu deuten, gab es manchmal Schwierigkeiten. Dazu ein Ausschnitt aus dem Interview mit Natascha (15):

N: $(3|4)$ sind die Koordinaten von einem Punkt im ebenen Koordinatensystem im Zweidimensionalen.

I: Kann dieses Zahlenpaar auch einen Pfeil darstellen?

N: Nein, da bräuchte ich noch ein zweites Koordinatenpaar, um den Pfeil darzustellen. Aber ich habe nur eines gegeben, also kann es nur einen Punkt darstellen.

Natascha ist offensichtlich der Meinung, dass man einen Pfeil nur durch Angabe der Koordinaten seines Anfangs- und Endpunktes angeben können.

Ein Ausschnitt aus dem Interview mit Christian (15):

I: Stellt das Zahlenpaar $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ einen Pfeil oder einen Punkt dar?

Ch: So wie es da steht mit dieser Spaltenform ist es ein Pfeil.

Wenn $(3|4)$ da stehen würde, wäre es ein Punkt.

Dies haben wir des Öfteren beobachtet. Wurde es möglicherweise so unterrichtet? (Wenn dies da und dort üblich sein sollte, dann sollte man dieses nicht sinnvolle Vorgehen überdenken.)

Schwierigkeiten mit dem Nullvektor

Der Nullvektor ist ein Grenzfall eines Vektors. Er entspricht einem entarteten Pfeil der Länge 0. Aber ein Pfeil der Länge 0 ist kein Pfeil mehr, sondern ein Punkt. Weil viele Schülerinnen und Schüler einen Vektor mit einem Pfeil identifizieren, ist somit der Nullvektor kein Vektor. Dazu zunächst ein Ausschnitt aus dem Interview mit Kathi (15):

Kathi schreibt: $0 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

K: Dann ist es ein Punkt.

I: Dann ist es ein Punkt?

K: Ja, der Nullpunkt.

I: Kann es auch ein Pfeil sein?

K: Nein!

I: Warum nicht?

K: Es ist kein Pfeil. Es steckt keine Verbindung drinnen.

I: Das wäre also ein Zahlenpaar, das man nicht als Pfeil interpretieren kann.

K: Ja.

Ein Ausschnitt aus dem Interview mit Daniel und Christoph (beide 15), in dem es um den Vektor $r \cdot \vec{a}$ geht:

I: Und wenn $r = 0$?

D: Dann gibt's den Vektor nicht.

Ch: Es ist der Nullpunkt.

I: Es ist der Nullpunkt?

Ch: Ja.

D: ... Ja, er muss im Koordinatenursprung liegen. Ah nein, es ist ein Vektor!!!! Richtig. D.h. es ist der Punkt, wo der Vektor $\vec{a}$ weggehen würde, also der Schaft ... Ja der kann auch irgendwo anders liegen, aber der Punkt muss da liegen [er zeichnet ein Achsenkreuz und zeigt auf den Ursprung]. Aber nein, der kann überall liegen. Denn wenn der Vektor überall liegen kann, kann der Punkt überall liegen.

Daniel ist ganz verwirrt. Liegt der Nullvektor jetzt im Ursprung oder kann er auch woanders liegen? Er schwankt zwischen diesen beiden Auffassungen hin und her. Sein Problem kann man prägnant so beschreiben: Der Nullvektor $(0|0)$ ist ein zur Länge 0 entarteter Pfeil, also ein Punkt. Der Punkt $(0|0)$ liegt aber im Ursprung. Wie kann er da woanders liegen?

Learning without Understanding

Dieses geflügelte Wort stammt aus der Didaktik der elementaren Algebra und geht auf P. C. Rosnick und J. Clement zurück. Diese haben als erste nachgewiesen, dass viele Menschen Variablen benutzen, ohne zu verstehen, wie diese in der Mathematik verwendet werden. Diese Beobachtung im Eindimensionalen lässt sich nahtlos im Zweidimensionalen fortsetzen. Viele Schülerinnen und Schüler gebrauchen Vektoren ohne zu verstehen, was sie tun. Dies demonstrieren die folgenden Beispiele zur Parameterdarstellung einer Geraden. Viele der hier vorgestellten Schülerinnen und Schüler konnten die schulüblichen Grundaufgaben zur Parameterdarstellung einer Geraden so recht und schlecht lösen. Doch sehen wir uns an, wie viel Verständnis dahinter liegt.

Ausschnitt aus dem Interview mit Michaela (15):

I: Kennst du die Parameterdarstellung einer Geraden?

M: Ja! (sie schreibt:)

$$g = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Das ist zum Beispiel irgendein Punkt, zum Beispiel $(2|4)$ plus Lambda mal $(5|6)$ ist gleich die Gerade g.

I: Warum stellt das eine Gerade dar?

M: Weiß ich nicht!

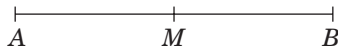
Wie stellt man eine Formel mit Vektoren auf?

► Aufgabe

Stelle eine Formel für den Mittelpunkt M einer Strecke AB auf.

Einige Lösungsbeispiele

Alle Befragten gingen von derselben Skizze aus, schrieben jedoch Unterschiedliches an.



Izabela (15): $\frac{A + E}{2} = M$

Florian (15): $M = \frac{\overline{AB}}{2}$

Martin (15): $M = \frac{A + \overline{AB}}{2}$

Karin (15): $M = \frac{A - B}{2}$

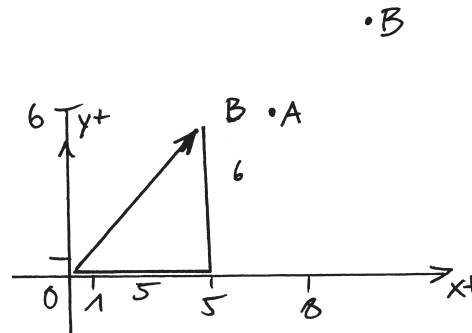
Umgang mit Ortsvektoren

► Aufgabe

Berechne den Vektor $\overline{AB}$ und veranschauliche ihn an einer Skizze: $A = (8|7)$, $B = (13|12)$.

Ein Lösungsbeispiel

Christian rechnet richtig: $B - A = (5|6)$. Er zeichnet die Punkte A und B einigermaßen richtig in ein Koordinatensystem ein, stellt aber dann den Vektor $\overline{AB}$ als Ortspfeil dar:



I: Was bedeutet $(5|6)$? Ist das auch ein Punkt?

M: Das ist der Parameter.

I: Was ist das Lambda?

M: Das Lambda gehört eben dazu. Da gibt es auch eine Normalform. Die ist halt ohne Lambda.

I: Aber warum stellt das eine Gerade dar?

M: Ich weiß es nicht!

Ausschnitt aus dem Interview mit Florian (15):

I: Kennst du die Parameterdarstellung einer Geraden?

F: Ich glaube, das hat etwas mit diesem großen X zu tun. X ist gleich irgendeinem Punkt A plus t mal $\overline{AB}$. (Er schreibt:)

$$X = A + t \overline{AB}$$

I: Warum stellt das eine Gerade dar?

F: Für t kann man auch Lambda schreiben.

I: Warum stellt das eine Gerade dar?

F: Weiß ich nicht.

im Zweidimensionalen wieder, wie man am Beispiel in **Kasten 2** sieht.

Das Problem der Schülerinnen und Schüler liegt nicht darin, dass sie falsch gedacht hätten. Man spürt, dass sie alle im Prinzip so gedacht haben: „Ich gehe von A aus, gebe die Hälfte von $\overline{AB}$ dazu und komme zu M “. Sie wissen jedoch nicht, wie sie ihren Gedankengang mit Hilfe der Vektorsymbolik anschreiben sollen (ein Phänomen, das in analoger Form aus der elementaren Algebra bekannt ist). Allerdings spricht aus den angebotenen Schreibweisen auch ein gewisses Unverständnis des Vektorbegriffs. Wer einigermaßen verstanden hat, was ein Vektor ist und wie man die Addition von Vektoren geometrisch deuten kann, muss bei diesen Schreibweisen stutzig werden. Es fehlt hier etwas, was man mit der „Dimensionskontrolle“ der Physiker vergleichen könnte. Zum Beispiel stellt bei Florian die linke Seite einen Punkt, die rechte einen Pfeil dar, das müsste ihn doch stören.

viewstellen schädlich ausgewirkt. Ein Beispiel ist der Lösung der Aufgabe in **Kasten 3**.

Die nächstliegende Veranschaulichung wäre hier wohl gewesen, einen Pfeil von A nach B zu zeichnen. Dies tut Christian jedoch erst, nachdem ihn der Interviewer dazu auffordert. Offensichtlich schlägt bei ihm in einem unpassenden Moment die im Unterricht praktizierte Gepflogenheit durch, Vektoren als Ortspfeile mit dem Anfangspunkt im Ursprung darzustellen.

Literatur

Hartmann, K.: *Inhaltliche Vorstellungen von Vektoren*. Diplomarbeit, Universität Wien 1993.

Jarmer, M.: *Empirische Untersuchungen zur Vektorrechnung in der Schule*. Diplomarbeit, Universität Wien, 1995.

Waldmann, A.: *Vektoren im Mathematikunterricht – Grundlegendes Wissen*. Diplomarbeit, Universität Wien, 1994.

Vektorformeln aufstellen

Auch die aus der eindimensionalen Algebra bekannten Schwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern beim Aufstellen von Formeln finden sich

Problem: Ortsvektoren

Die verbreitete Verwendung von „Ortsvektoren“ im Unterricht (siehe auch S. 12) hat sich an vielen Inter-

■ SEKUNDARSTUFE I
7.–8. Schuljahr

Heiß oder kalt?

Eine Software zur Vorübung für den Vektorbegriff und die Vektoraddition

Mit zwei einfachen Java-Applets gehen die Schülerinnen und Schüler auf Schatzsuche. Nebenbei sammeln sie erste Erfahrungen mit Koordinaten und Vektoren.

Andreas Ulovec

Wissenschaftlicher Mitarbeiter der Fakultät für Mathematik der Universität Wien.
E-Mail: Andreas.Ulovec@univie.ac.at

Wärmer, wärmer, kälter – Uih, ganz heiß! Diese Suche nach versteckten Dingen ist ein bekanntes Kinderspiel. Durch Zurufen wird der Suchende auf die heiße Fährte gesetzt und zum Ziel dirigiert. Auf dieser Idee basiert das Programm „Heiß oder kalt“. Wir stellen das Programm hier in zwei Varianten vor, die als Vorübung zur Punkt-Pfeil-Darstellung von Vektoren sowie zur Pfeildarstellung von Vektoren dienen (unter Vektoren verstehen wir in diesem Zusammenhang immer Zahlenpaare). Näheres zu diesen Darstellungen der Addition von Vektoren findet man in den Basisartikeln (S. 5, S. 8).

Beide Programme erfordern keine besonderen Vorkenntnisse, keine lange Einführung, und sind leicht und selbsterklärend zu bedienen. Sie dienen nur zur Vorübung für den Vektorbegriff und die Vektoraddition – daher werden die Begriffe „Vektor“, „Zahlenpaar“ etc. in der Software nicht verwendet.

Die Schatzsuche ist ein einfaches Spiel. Die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler können im späteren Unterricht gewinnbringend aufgegriffen werden.

Die beiden hier vorgestellten Programme HeissOderKalt.java und HeissOderKalt2.java sind auf unserer Homepage (www.mathematik-lehren.de) zu finden und können kostenlos heruntergeladen werden.

Punkt-Pfeil-Darstellung

Eine Schatzsucherin steht inmitten einer Ebene. Sie hat keine Ahnung, wo sich der gesuchte Schatz befindet, nur eine elektronische Karte hat man ihr mitgegeben. Auf dieser ist zwar ein Koordinatensystem eingezeichnet und viele Punkte, an denen sich der Schatz verbergen könnte – nur leider verrät ihr die Karte nicht, wo der Schatz genau liegt. Ein kleiner roter Kreis zeigt an, wo sich die Schatzsucherin gerade aufhält. In der linken Spalte kann sie ihre Position auch ablesen (Abb. 1). Damit sie aber nicht völlig hilflos herumsuchen muss, verrät ihr die Karte die ungefähre Entfernung zum Schatz – von „kalt“ (Du bist ganz weit weg) bis „heiß“ (Du bist ganz nah dran).

Um den Schatz zu finden, bewegt sie sich einige Schritte nach links, rechts, oben oder unten. Diese Schritte werden in der mittleren Spalte eingegeben: Negative Zahlen führen nach links bzw. unten, positive Zah-

len führen nach rechts bzw. oben. Ein Klick auf OK zeichnet einen Pfeil von der bisherigen zur neuen Position und gibt die neue Position auch in der rechten Spalte an. Diese Position wird automatisch in die erste Spalte der nächsten Zeile übertragen. Nach einigen Schritten sieht die Sache schon erfreulicher aus (Abb. 2). Da die Schatzsucherin nur einen kleinen Wasservorrat mit sich trägt, muss sie – falls sie den Schatz nicht nach sechs Versuchen findet – aufgeben und zum Basislager zurückkehren. Falls sie aber ihr Ziel erreicht, wird sie mit einem Schatz belohnt (Abb. 3).

Pfeil-Darstellung

Die Ausgangssituation im zweiten Programm ist ganz ähnlich zur obigen. Allerdings bewegt man sich nun, indem man einen neuen Pfeil an einen bereits vorhandenen Pfeil anhängt. Die bereits erreichten Punkte werden durch kleine graue Kreise gekennzeichnet. Bei jedem Schritt werden nur die beiden letzten aneinander gehängten Pfeile sowie der Summenpfeil dargestellt, die früher gezeichneten Pfeile verschwinden wieder (Abb. 4).

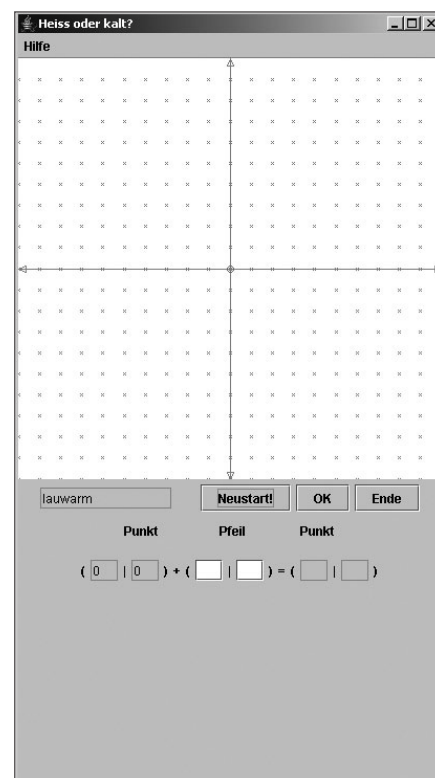


Abb. 1: Ausgangspunkt im Ursprung

Auf Schatzsuche

Eine Schatzsucherin hofft auf deine Hilfe! Sie steht inmitten einer Ebene und hat keine Ahnung, wo sich der gesuchte Schatz befindet, nur eine elektronische Karte hat man ihr mitgegeben. Auf dieser ist zwar ein Koordinatensystem eingezeichnet und viele Punkte, an denen sich der Schatz verbergen könnte – nur leider verrät ihr die Karte nicht, wo sich der Schatz befindet. Ein kleiner roter Kreis zeigt an, wo sie sich gerade aufhält, und sie kann ihre Position auch in der linken Spalte ablesen. Damit sie aber nicht völlig hilflos herumsuchen muss, verrät ihr die Karte die ungefähre Entfernung zum Schatz – von „kalt“ (Du bist ganz weit weg) bis „heiß“ (Du bist ganz nah dran). Da die Schatzsucherin nur einen kleinen Wasservorrat mit sich trägt, muss sie – falls sie den Schatz nicht nach sechs Versuchen findet – aufgeben und zum Basislager zurückkehren. Falls sie aber ihr Ziel erreicht, wird sie mit einem Schatz belohnt.



Auftrag

Deine Aufgabe ist es, ihr zu helfen, den Schatz zu finden. Du kannst sie einige Schritte nach links, rechts, oben, oder unten gehen lassen, indem du diese Schritte in der mittleren Spalte eingibst – negative Zahlen für nach links bzw. unten, positive für rechts bzw. oben. Ein Klick auf OK zeichnet einen Pfeil von der bisherigen Position zur neuen Position und gibt die neue Position auch in der rechten Spalte an. Diese Position wird automatisch in die erste Spalte der nächsten Zeile übertragen.

Heiß oder kalt?

Hilfe

heiß

Neustart! OK Ende

Punkt Pfeil Punkt

$(0 | 0) + (1 | 1) = (1 | 1)$

$(1 | 1) + (-2 | 1) = (-1 | 2)$

$(-1 | 2) + (-3 | 4) = (-4 | 6)$

$(-4 | 6) + (|) = (|)$

Abb. 2: Näher dem Ziel

Heiß oder kalt?

Hilfe

Schatz gefunden!

Neustart! OK Ende

Punkt Pfeil Punkt

$(0 | 0) + (1 | 1) = (1 | 1)$

$(1 | 1) + (-2 | 1) = (-1 | 2)$

$(-1 | 2) + (-3 | 4) = (-4 | 6)$

$(-4 | 6) + (-3 | -2) = (-7 | 4)$

$(-7 | 4) + (2 | 0) = (-5 | 4)$

$(-5 | 4) + (|) = (|)$

Abb. 3: Schatz gefunden

Heiß oder kalt?

Hilfe

heiß

Neustart! OK Ende

Pfeil Pfeil Pfeil

$(1 | 1) + (-4 | 5) = (-3 | 6)$

$(-3 | 6) + (-4 | -3) = (-7 | 3)$

$(-7 | 3) + (1 | -6) = (-6 | -3)$

$(-6 | -3) + (3 | 5) = (-3 | 2)$

$(-3 | 2) + (|) = (|)$

Abb. 4: Pfeile kennzeichnen den Weg

■ SEKUNDARSTUFE I
6.–10. Schuljahr

Koordinaten zum Zeichnen geometrischer Körper nutzen

Schrägbilder mit EXCEL

Das Zeichnen von Schrägbildern schult nicht nur das räumliche Denken, auch der Nutzen von Koordinaten wird erfahrbar: Ein Unterrichtsgang von den ersten Anfängen bis zur Darstellung am Computer.

Exel-Arbeitsblätter unter ML133
bei www.mathematik-lehren.de



Heinz Klaus Strick

Mathematiklehrer und Schulleiter am Landrat-Lucas-Gymnasium, Leverkusen
E-Mail: strick.lev@t-online.de

Quader, Pyramide, Prisma, Zylinder, Kegel, Kugel – Wie sehen diese Körper aus und wo kommen sie überall vor? Im Rahmen des einführnden Geometrieunterrichts in der Unterstufe beschäftigen sich die Schülerinnen und Schüler mit unterschiedlichen geometrischen Körpern. Dabei lernen sie einige Grundformen kennen und entdecken diese Formen auch in ihrer Umwelt wieder. In diesem Zusammenhang lernen sie auch, wie man Schrägbilder von einfachen Körpern (z.B. Würfeln) zeichnet, damit sie die räumlichen Gebilde besser erfassen können. Wie können diese Schrägbilder erst mit einfachen Mitteln bis hin zum späteren Einsatz des Rechners erstellt werden?

Da die Lernenden anfangs noch nicht mit dem Winkelmesser umgehen können, benutzt man für die Darstellung der nach hinten (senkrecht zur Gesichtsebene) verlaufenden Linien die Diagonalen der Rechenkästchen auf der Tafel oder im Schulheft.

Die Schülerinnen und Schüler erkennen durch Vergleich verschiedener Varianten, dass ein angemessenes Bild des Körpers entsteht, wenn man die nach hinten verlaufenden Strecken in der Länge verkürzt zeichnet. Ein solches Bild eines Würfels mit einer Kantenlänge von 4 Einheiten entsteht, wenn für die nach hinten verlaufenden Kanten die Diagonalen von 2 Rechenkästchen verwendet werden (**Abb. 1**).

Bereitet die Benutzung des Winkelmessers keine Probleme mehr, so kann auf die Rechenkästchen verzichtet werden. Bei den Schrägbildern, die dann entstehen, können unterschiedliche Winkel gegenüber der Gesichtsebene sowie unterschiedliche Kürzungsfaktoren für die nach hinten verlaufenden Strecken berücksichtigt werden, beispielsweise statt eines Winkels von 45° wird ein Winkel von 30° gewählt. Die zur Gesichtsebene senkrecht verlaufenden Strecken werden auf die Hälfte der tatsächlichen Länge verkürzt (s. **Abb. 2**).

Wenn man den Würfel um 45° dreht, so dass nicht eine Fläche, sondern eine Kante nach vorn weist, wird das Zeichnen eines Schrägbilds komplizierter: Die vordere Kante und die zu ihr parallelen Kanten werden unverzerrt gezeichnet, aber nicht die Flächen „vorn“ und „hinten“. Jedoch müsste das Rechteck, welches von je einer der beiden Diagonalen in Grund- und Deckfläche und der beiden Kanten (links und rechts) begrenzt wird, unverzerrt gezeichnet werden.

Ein gedrehter Würfel lässt sich daher wie folgt zeichnen (s. **Kasten 1**, Beispiel 1): Zunächst zeichnet man die quadratische Grundfläche unverzerrt und misst – da in Klasse 6 die Kenntnisse des Satzes von Pythagoras nicht vorliegen – die Diagonalen in der gezeichneten Figur.

Wenn $a = 6\text{ cm}$ ist, ergibt sich für die Diagonalen ungefähr eine Länge von $d \approx 8,5\text{ cm}$.

Dann zeichnet man ein Schrägbild dieser Grundfläche. Zunächst erstellt man ein Schrägbild der beiden Diagonalen (eine Diagonale unverzerrt, da parallel zur Gesichtsebene, die andere vom Mittelpunkt der Diagonalen aus unter einem Winkel von 30° mit halber Länge, da orthogonal zur Gesichtsebene), dann verbindet man die Endpunkte der Diagonalen und erhält ein Schrägbild der Grundfläche des Würfels. Dann zeichnet man die senkrecht verlaufenden Kanten (unverzerrt) und ergänzt die Deckfläche des Würfels.

Ein Prisma zeichnen

In der 7. oder 8. Klasse können die Schülerinnen und Schüler ein gleichseitiges, dreiseitiges Prisma zeichnen: Ausgangspunkt ist das unverzerrte gleichseitige Dreieck (Grundriss des Körpers, s. **Beispiel 2**). Nun wird die Flächenhöhe in der gezeichneten

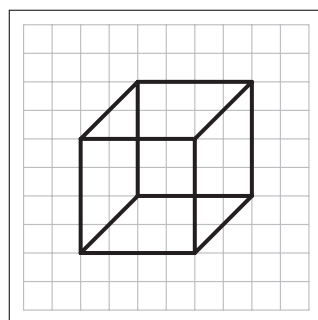


Abb. 1: Schrägbild eines Würfels mithilfe der Rechenkästchen zeichnen

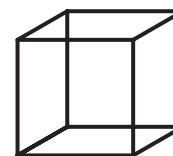


Abb. 2: Schrägbild eines Würfels (30° -Linien, Verkürzungsfaktor $\frac{1}{2}$)

neten Figur gemessen. Wenn die Dreiecksseite $a = 4\text{ cm}$ ist, ergibt sich für die Dreieckshöhe ungefähr eine Länge von $h \approx 3,4\text{ cm}$.

Für das Schrägbild dieser Grundfläche des Prismas zeichnet man eine Grundseite der Länge $a = 4\text{ cm}$ und als Hilfslinie eine Strecke von ungefähr $1,7\text{ cm}$ von der Mitte der Grundseite aus unter einem Winkel von 30° . Anschließend verbindet man die beiden Endpunkte der Grundseite mit dem Endpunkt der „schräg“ eingezeichneten Höhe und ergänzt die Figur zum Schrägbild des Prismas.

Eckpunkt-Koordinaten benutzen

Schrägbilder von Quadern und Prismen sowie von Pyramiden lassen sich wie beschrieben zeichnen. Alternativ kann man auch die Koordinaten der vorhandenen Eckpunkte in einem geeigneten 3-dimensionalen Koordinatensystem ermitteln. Man bestimmt deren Lage in einem Schrägbild und verbindet die entsprechenden Eckpunkte miteinander.

Wir wollen diesen Weg am Beispiel eines Würfels erläutern (Abb. 3). Die Ecken eines Würfels bestimmen ein 3-dimensionales Koordinatensystem: Eine Ecke (in der Abbildung links unten) liegt im Koordinatenursprung, die drei unmittelbar benachbarten Eckpunkte bestimmen die Einheiten auf den Koordinatenachsen.

Die Eckpunkte des Würfels haben dann die Koordinaten

$A = (0|0|0)$, $B = (1|0|0)$, $C = (1|1|0)$,
 $D = (0|1|0)$, $E = (0|0|1)$, $F = (1|0|1)$,
 $G = (1|1|1)$, $H = (0|1|1)$.

Das Schrägbild des 3-dimensionalen Würfels wird in ein 2-dimensionales Koordinatensystem gezeichnet. Die Bestimmung der 2-dimensionalen Koordinaten der Eckpunkte der

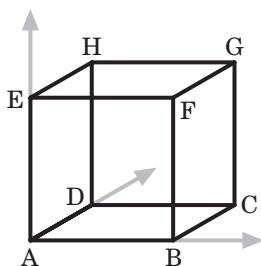


Abb. 3: Schrägbild eines Würfels in einem 3-dimensionalen Koordinatensystem

Anleitung zum Zeichnen eines Schrägbildes

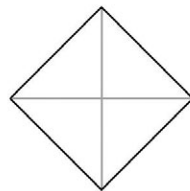
Für das Zeichnen eines Körpers unterscheiden wir zwei Typen von Strecken:

- Strecken, die in der Gesichtselebene liegen oder parallel zu ihr verlaufen, werden im Schrägbild unverkürzt gezeichnet.
- Strecken, die orthogonal (senkrecht) zur Gesichtselebene verlaufen, werden unter einem Winkel von 30° (gegenüber „horizontalen“ Strecken) abgetragen; ihre Länge wird auf die Hälfte verkürzt.

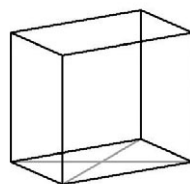
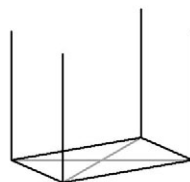
Für Kanten, die weder parallel noch senkrecht zur Gesichtselebene liegen, gibt es keine einfache Regel zum Zeichnen. Um solche Kanten zeichnen zu können, müssen die Eckpunkte dieser Strecken mithilfe paralleler oder orthogonaler Hilfslinien konstruiert werden.

Beispiel 1: Gedrehter Würfel

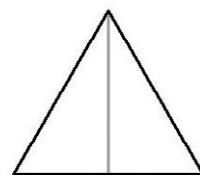
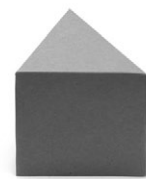
Beispiel 2: Gleichseitiges Prisma



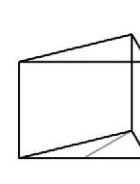
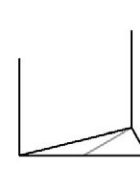
Grundriss



Vom Schrägbild des Grundrisses zum vollständigen Schrägbild eines gedrehten Würfels



Grundriss

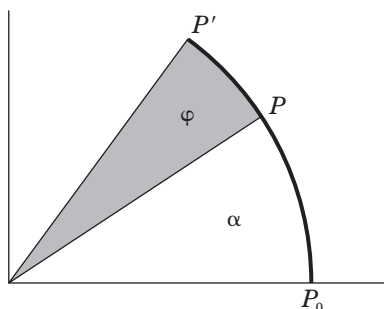


Vom Schrägbild des Grundrisses zum vollständigen Schrägbild eines Prismas

Drehung eines Punktes um den Winkel φ

Ein Punkt $P = (a|b|0)$ der Ebene, die durch die 1. und 2. Koordinatenachse aufgespannt wird, geht durch die Drehung um φ in den Punkt $P' = (a \cos \varphi - b \sin \varphi | a \sin \varphi + b \cos \varphi | 0)$ über; dessen Bild im Schrägbild ist dann

$$P'' = \left((a \cos \varphi - b \sin \varphi) + \frac{1}{4}\sqrt{3} (a \sin \varphi + b \cos \varphi) \middle| \frac{1}{4}(a \sin \varphi + b \cos \varphi) \right).$$



Man kann sich einen Punkt $P = (a|b)$ der Ebene durch Drehung eines Punktes $P_0 = (r|0)$ um einen Winkel α entstanden denken; dabei gilt $a = r \cos \alpha$ und $b = r \sin \alpha$ sowie $a^2 + b^2 = r^2$.

Wird nun die Strecke OP um einen Winkel φ gedreht, so hat der Bildpunkt P' die Koordinaten

$$P' = (r \cos(\alpha + \varphi) | r \sin(\alpha + \varphi))$$

oder nach Anwendung der Additionstheoreme

$$P' = (r (\cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi) | r (\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi)).$$

Wegen $a = r \cos \alpha$ und $b = r \sin \alpha$ ergibt sich die obige Darstellung der Koordinaten von P' .

Kantenmodelle

Das Grafik-Menue des Tabellenkalkulationsprogramms EXCEL enthält die Option, Punkte in ein Koordinatensystem einzutragen und diese Punkte auch durch einen Streckenzug miteinander zu verbinden (Befehl: Datenreihen formatieren, Option: Linie benutzerdefiniert). Setzt man an das Ende einer Folge von Wertepaaren noch einmal das am Anfang angegebene Wertepaar, dann erhält man einen geschlossenen Streckenzug (wie in Abb. 5).

Entsprechend kann man auch eine geeignete Folge von Eckpunkten eines 3-dimensionalen Körpers eingeben. Aber Achtung: Mit dem Streckenzug müssen tatsächlich alle Kanten des Körpers durchlaufen werden! Aus den Koordinaten der Eckpunkte des 3-dimensionalen Körpers werden zunächst jedoch (wie oben dargestellt) die 2-dimensionalen Bilder der Punkte des Schrägbilds berechnet und dann der zugehörige Streckenzug in der Grafik erzeugt (Abb. 6). Dabei erweist sich das drag&drop-Verfahren der Übertragung von Befehlen in EXCEL als arbeits erleichternd.

Entsprechend kann man Kantenmodelle von anderen Körpern darstellen (vgl. Abb. 7 und 8).

Je mehr Kanten zu einem Körper gehören, umso schwieriger wird es, „vorn“ und „hinten“ liegende Kanten zu unterscheiden. Man kann dies dadurch verbessern, dass man die „vorn“ liegenden Seiten mit dickeren Strichen zeichnet als die „hinten“ liegenden (Anklicken der betreffenden Strecken, dann Option „Datenpunkt formatieren“).

Rotation um eine Koordinatenachse

Wir wissen jetzt, wie man aus den 3-dimensionalen Koordinaten von Punkten die Koordinaten ihres 2-dimensionalen Schrägbildes erzeugt. Bei der Rotation eines Körpers um eine Koordinatenachse genügt es daher, zunächst das 3-dimensionale Bild eines Punktes nach der Drehung um den Drehwinkel φ zu bestimmen, aus dem dann – wie oben gezeigt – das 2-dimensionale Schrägbild bestimmt wird. Zur Berechnung benötigen wir Kenntnisse über die trigonometrischen Funktionen aus Klasse 9/10.

Wir beschränken uns hier auf eine Rotation um die 3. Koordinatenachse

vorderen Seitenfläche des Würfels ist einfach: Der Punkt $A = (0|0|0)$ geht dabei über in den Punkt $A' = (0|0)$, der Punkt $B = (1|0|0)$ über in $B' = (1|0)$ – die 1. Koordinate des Punktes bleibt also unverändert. Der Punkt $E = (0|0|1)$ hat im 2-dimensionalen Koordinatensystem des Schrägbilds die Koordinaten $E' = (0|1)$ – die 3. Koordinate von E wird zur 2. Koordinate von E' . Beim Punkt $F = (1|0|1)$ fällt die 2. Koordinate weg; die Koordinaten im 2-dimensionalen Koordinatensystem sind $F' = (1|1)$.

Bei den Eckpunkten der hinteren Seitenfläche des Würfels muss die von 0 verschiedene 2. Koordinate berechnet werden: Der Punkt $D = (0|1|0)$ wird zu $D' = (0,433|0,25)$, wie

man in einer Zeichnung näherungsweise abliest oder (ab Klasse 9) mithilfe des Satzes von Pythagoras berechnen kann (Abb. 4):

Da die 2. Achse im Schrägbild mit der 1. Achse einen Winkel von 30° bildet, entsteht hier ein „halbes“ gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 0,5 (die schräg nach hinten verlaufende Strecke AD wird auf die Hälfte verkürzt). Die 1. Koordinate des Punktes D berechnet sich daher zu $\frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \approx 0,433$ (Länge der Höhe); die 2. Koordinate ist gleich 0,25 (= halbe Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks). Entsprechend berechnen sich die Koordinaten anderer Punkte, z.B. wird

$C = (1|1|0)$ zu $C' = (1,433|0,25)$ und $G = (1|1|1)$ zu $G' = (1,433|1,25)$.

Allgemein wird also ein Punkt $P = (a|b|c)$ im 3-dimensionalen Raum durch das Schrägbild auf den Punkt $P' = (a + 0,433b|0,25b + c)$, genauer: $P'(a + \frac{1}{4}\sqrt{3}b|0,25b + c)$, abgebildet.

Eine solche Zuordnung kann auch automatisch durch ein Tabellenkalkulationsprogramm erfolgen.

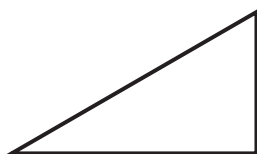


Abb. 4: Hilfsfigur zur Bestimmung der 2. Koordinate

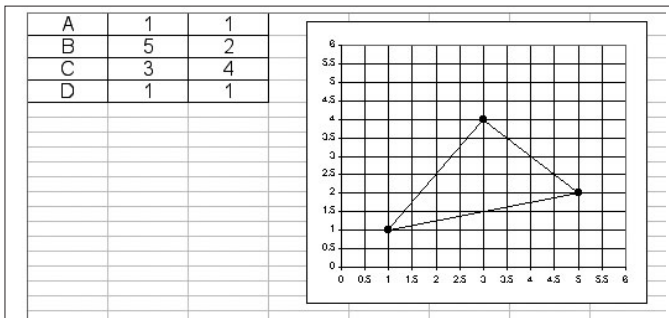


Abb. 5: Zeichnen eines Dreiecks als Streckenzug mithilfe einer Tabellenkalkulation

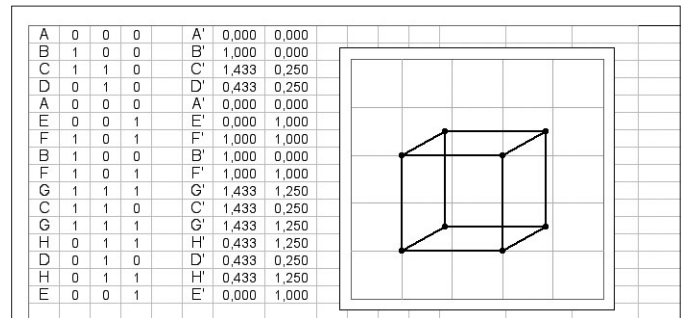


Abb. 6: Automatisches Umrechnen der 3-dimensionalen Koordinaten eines Würfels – Zeichnung des Würfels als Streckenzug

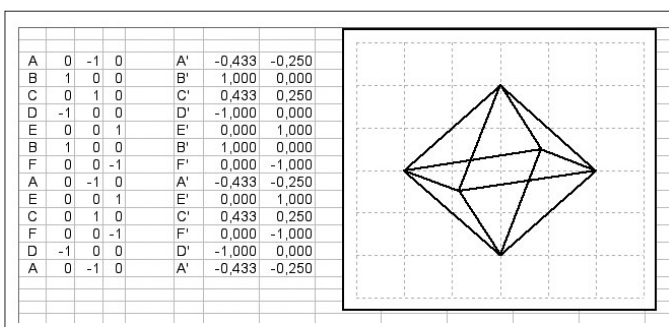


Abb. 7: Automatisches Umrechnen der 3-dimensionalen Koordinaten eines Oktaeders – Zeichnung des Oktaeders als Streckenzug

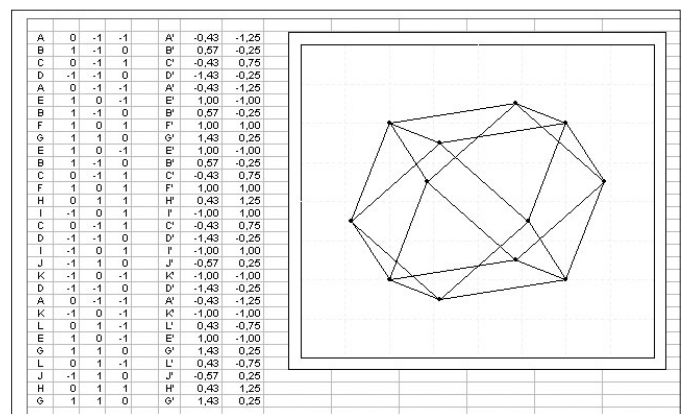


Abb. 8: Zeichnung des Würfelstumpfs als Streckenzug

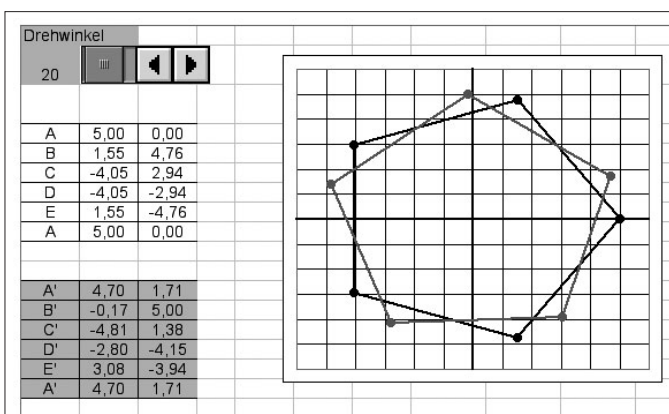


Abb. 9: Drehung eines regelmäßigen Fünfecks – Berechnung der Koordinaten

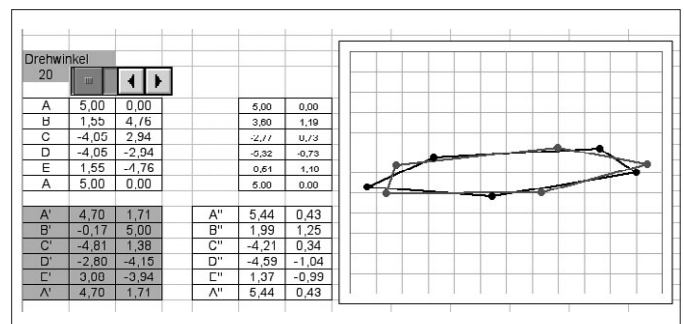


Abb. 10: Berechnung der 3-dimensionalen Koordinaten eines gedrehten regelmäßigen Fünfecks

se, bei der also die 3. Koordinate eines Punktes unverändert bleibt.

Die Berechnungen der Koordinaten des um den Winkel ϕ gedrehten Punktes (vgl. **Kasten 2**) lassen sich vom Tabellenkalkulationsprogramm durchführen. Man beachte, dass die Sinus- und Cosinusfunktion in EXCEL Eingaben im Bogenmaß verlangen.

Drehung eines regelmäßigen Fünfecks

Wir betrachten ein regelmäßiges Fünfeck im 2-dimensionalen Koordinatensystem.

Liegt der Punkt A auf der 1. Achse, z. B. $A = (5|0)$, dann haben die weiteren Punkte die Koordinaten

$$B = (5 \cos(72^\circ) | 5 \sin(72^\circ)),$$

$$C = (5 \cos(144^\circ) | 5 \sin(144^\circ)),$$

$$D = (5 \cos(216^\circ) | 5 \sin(216^\circ)) \text{ und } E = (5 \cos(288^\circ) | 5 \sin(288^\circ)).$$

Mithilfe der Abbildungsgleichungen der Drehung werden von der Tabellenkalkulation die Koordinaten der Punkte A' , B' , C' , D' und E' berechnet und in der Grafik als geschlossener Polygonzug gezeichnet (**Abb. 9**).

Mithilfe der Abbildungsgleichungen des Schrägbilds entsteht dann entsprechend das Schrägbild des ursprünglichen und des gedrehten Fünfecks; über dieser fünfeckigen Grundfläche lässt sich nun leicht ein fünfseitiges Prisma oder eine fünfseitige Pyramide erzeugen und drehen, also von allen Seiten anschauen (vgl. **Abb. 10**).

Mathe-Welt

... weil die Welt voller Mathematik steckt

Lieferbare Hefte:

Die vierte Dimension

Bestell-Nr. 32963

Wie groß? Wie hoch? Wie schwer? Wie viele?

Bestell-Nr. 32965

Dreiecke und Vierecke mit dem Computer

Bestell-Nr. 32966

Der Satz des Pythagoras mit Schere und Computer

Bestell-Nr. 32974

Mauern und Quadrate mit Zahlen

Bestell-Nr. 32975

Was stellst du dir unter dem Unendlichen vor?

Bestell-Nr. 32977

Sterne und Sternkörper

Bestell-Nr. 32979

Von der Landkarte zu Funktionen von zwei Variablen

Bestell-Nr. 32984



Von Zahlen und vom Zählen

Bestell-Nr. 32987

Reale Probleme modellieren

Bestell-Nr. 32988

Messen mit dem Sonnenring

Bestell-Nr. 32990

Optische Täuschungen II

Bestell-Nr. 32991

Rund um den Eiffelturm

Bestell-Nr. 32993

U-Bahnpläne und kurze Wege

Bestell-Nr. 32996

Design - schöne Kurven am Computer

Bestell-Nr. 32997

Hebel und Gelenke

Bestell-Nr. 32998

Grenzwerte

Bestell-Nr. 32999

Ein Einzelheft von Mathe-Welt kostet € 2,50.



BESUCHEN SIE UNS AUCH IM INTERNET:

www.friedrichonline.de

E-Mail: leserservice@friedrich-verlag.de

Für Ihre Bestellung nutzen
Sie bitte den Fax-Bestellschein.Telefon: 05 11 / 4 00 04-150, Fax: -170
Preise zzgl. Versandkosten, Stand 2005.

KOMMENTAR ZUR NACHFOLGENDEN AUSGABE

Bevor man im Mathematikunterricht Koordinatensysteme einführt, bringen die Schülerinnen und Schüler im Allgemeinen schon gewisse Vorerfahrungen über Koordinaten mit. Diese Vorerfahrungen kann man fördern, indem man schon vor der offiziellen Einführung von Koordinaten Beispiele aus der Umwelt der Schülerinnen und Schüler heranzieht. Das Mathe-Welt-Heft „Koordinaten“ enthält auf den ersten neun Seiten solche Beispiele für die Klassenstufen 5 und 6: Stadtplan, Labyrinth, Straßensystem, Schachbrett, Schiffspositionen. Die restlichen Seiten enthalten etwas anspruchsvollere Aufgaben zum Umgang mit ebenen und räumlichen Koordinatensystemen, die für die Klassenstufen 7 und 8 gedacht sind.

Positionsangaben erfolgen in den anfänglichen Beispielen zunächst durch Angabe eines Buchstabens und einer Zahl (Stadtplan, Schachbrett usw.), es ist aber nur ein kleiner Schritt zur Angabe von Positionen durch Zahlenpaare und damit zum Verständnis eines ebenen Koordinatensystems. Als Vorübung für die spätere Vektorrechnung wird auch gezeigt, wie man Zahlenpaare als Pfeile in einem ebenen Koordinatensystem darstellen kann und damit nicht nur Positionen, sondern auch Richtungen angeben kann.

Um den Umgang mit Koordinatensystemen etwas anregender zu gestalten, enthält das Heft einige Problemstellungen, zu deren Lösung man ein wenig nachdenken muss. In der Ebene handelt es sich um Aufgaben über Dreiecke, Vierecke und anderen Vielecke, im Raum geht es um einige interessante Körper. (Diese räumlichen Aufgaben können notfalls auch erst in höheren Klassen eingesetzt werden.)

Maria Koth, Günther Malle

Reinhold Wittig

CUBUS

Räumliches Denken entwickeln und fördern!

für 2–6 Spieler ab 8 Jahren

Der Klassiker –
neu aufgelegt
bei Kallmeyer!



48 Rautenplättchen,
methodischer Kommentar inkl. 8 Aufgabenkarten
Bestell-Nr. 3306, € 16,90*

Sie dachten bisher, Kisten bauen sei einfach? Bei CUBUS kommen auch Sie ins Grübeln!

48 rautenförmige Plättchen, auf denen Teile von Kisten zweidimensional abgebildet sind, werden der Reihe nach an 2–6 Mitspieler verteilt. Jeder Spieler versucht nun, mit möglichst wenig Rauten eine neue Kiste an die Startfigur anzubauen.

Die Spieler trainieren auf diese Weise, reale Würfelgebäude in ihrer Vorstellung in Schrägbilddarstellungen umzusetzen. Während des Spielens müssen die Spieler die entstehenden Bilder immer wieder neu deuten und so umformen, dass möglichst viele neue Kisten entstehen.

■ SEKUNDARSTUFE II
12.–13. Schuljahr

Vektorbeweise in der Dreiecks- geometrie

Viele interessante Eigenschaften von Dreiecken können mit der Vektorrechnung prägnant formuliert und elegant begründet werden.

Maria Koth

Professorin an der Pädagogischen Akademie des Bundes in Wien und wiss. Mitarbeiterin der Fakultät für Mathematik der Universität Wien
E-Mail: maria.koth@univie.ac.at

Günther Malle hat in dem Artikel *Neue Wege in der Vektorgeometrie* ein Vektorkonzept vorgestellt, das kurz so charakterisiert werden kann: Vektoren sind Zahlenpaare oder Zahlentripel. Für diese Vektoren werden Rechenoperationen eingeführt; die Vektoren und ihre Rechenoperationen werden geometrisch gedeutet. Dabei richtet sich die Bezeichnung der Vektoren nach ihrer geometrischen Deutung. Wird ein Vektor als Punkt gedeutet, so wird er mit $A, B, C, \dots$ bezeichnet, wird er als Pfeil von A nach B gedeutet, mit $\overrightarrow{AB}$. Dies führt zu Schreibweisen wie $\overrightarrow{AB} = B - A$ und $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ usw.

Diese Schreibweisen sind gut geeignet, Lagebeziehungen in Dreiecken durch prägnante Formeln darzustellen. So erhält man etwa für die Lagebeziehung zwischen den Eckpunkten A, B und C eines Dreiecks und seinen „merkwürdigen Punkten“ Schwerpunkt S , Höhenschnittpunkt H und Umkreismittelpunkt U die beiden Formeln

$$3 \cdot S = A + B + C$$

$$H + 2 \cdot U = 3 \cdot S.$$

Der Inkreismittelpunkt I kann unter Einbeziehung der Seitenlängen a, b, c einprägsam als

$$I = \frac{1}{a+b+c} \cdot (a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C)$$

beschrieben werden. Diese Schreibweisen erlauben auch elegante Beweise dieser und anderer Beziehungen, wie die folgenden Beispiele illustrieren. In Koth (2002) wurden einige dieser Dreieckseigenschaften ohne Vektoren mithilfe von Ähnlichkeitsbeziehungen begründet. Durch die Behandlung des Themenkreises mit Vektoren können solche Zusammenhänge kürzer und prägnanter dargestellt werden als mit Methoden der elementaren Geometrie. Auch kann man bei den Beweisen den Vektorkalkül verwenden, ohne alle Einzelschritte geometrisch begründen zu müssen.

In jedem der drei Beispiele (**Kasten 1–3**) wird zunächst eine bekannte Dreieckseigenschaft in Form eines Satzes vorgestellt und auch bewiesen. Das Nachvollziehen der vorgegebenen Beweisschritte soll die Lernenden mit grundlegenden Begründungsstrategien vertraut machen, und ihnen gleichzeitig helfen, die nachfolgenden Arbeitsaufträge (**Material 1–3**) selbstständig zu bearbeiten.

Literatur

Koth, M.: *Dreiecke erzeugen Dreiecke*. – In: *mathematik lehren* 110, Seite 47–51 (2002).

Lösungshinweise

Zum Schwerpunkt

1 bis 4: Die Behauptungen folgen unmittelbar aus der Beziehung $3 \cdot S = A + B + C$. Bei 4b) beachte man außerdem, dass, zum Beispiel $|\overrightarrow{PA}|^2 = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PA} = (A - P) \cdot (A - P) = A^2 - 2 \cdot A \cdot P + P^2$ und dass $A \cdot P + B \cdot P + C \cdot P = (A + B + C) \cdot P = 3 \cdot S \cdot P$

5: Wir setzen $A' = B + \frac{m_1}{m_1 + n_1} \overrightarrow{BC}$,

$$B' = C + \frac{m_2}{m_2 + n_2} \overrightarrow{CA}$$

und $C' = A + \frac{m_3}{m_3 + n_3} \overrightarrow{AB}$. Daraus folgt

$$S' = S \Leftrightarrow A' + B' + C' = A + B + C$$

$$\Leftrightarrow \frac{m_1}{m_1 + n_1} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) + \frac{m_2}{m_2 + n_2} \overrightarrow{CA} + \frac{m_3}{m_3 + n_3} \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{m_1}{m_1 + n_1} - \frac{m_3}{m_3 + n_3} \right) \cdot \overrightarrow{BA} = \left(\frac{m_1}{m_1 + n_1} - \frac{m_2}{m_2 + n_2} \right) \cdot \overrightarrow{CA}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m_1}{m_1 + n_1} - \frac{m_3}{m_3 + n_3} = 0 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_1 + n_1} - \frac{m_2}{m_2 + n_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow m_1 \cdot n_3 = m_3 \cdot n_1 \text{ und } m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1$$

$$\Leftrightarrow m_1 : n_1 = m_2 : n_2 = m_3 : n_3$$

Zum Höhenschnittpunkt und Umkreismittelpunkt

1 bis 3: folgen unmittelbar aus der Beziehung $H + 2 \cdot U = 3 \cdot S = A + B + C$.

4: Zunächst erhält man

$$A_1 = U + 2 \cdot \overrightarrow{UM}_{BC}$$

$$= U + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (B + C) - U \right)$$

$$= B + C - U \text{ und analog dazu}$$

$$B_1 = A + C - U \text{ und } C_1 = A + B - U.$$

Daraus folgt unmittelbar, dass

$$\overrightarrow{A_1 B_1} = \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{A_1 C_1} = \overrightarrow{CA} \text{ und } \overrightarrow{C_1 B_1} = \overrightarrow{BC} \text{ ist.}$$

Außerdem folgt

$$\overrightarrow{A_1 H} = H - (B + C - U) = H - (B + C + A - A - U)$$

$$= H - (H + 2 \cdot U - A - U) = A - U = \overrightarrow{UA} \text{ sowie}$$

$$\overrightarrow{B_1 H} = \overrightarrow{UB} \text{ und } \overrightarrow{C_1 H} = \overrightarrow{UC}.$$

Da $|\overrightarrow{UA}| = |\overrightarrow{UB}| = |\overrightarrow{UC}|$ ist, gilt also auch

$$|\overrightarrow{A_1 H}| = |\overrightarrow{B_1 H}| = |\overrightarrow{C_1 H}|.$$

Analog dazu kann man auch die übrigen Lagebeziehungen begründen.

5: Man setzt $A_2 = \frac{1}{2} \cdot (B + C)$, $B_2 = \frac{1}{2} \cdot (A + C)$ und $C_2 = \frac{1}{2} \cdot (A + B)$, und berücksichtigt, dass $H + 2 \cdot U = 3 \cdot S = A + B + C$.

6: Man setzt $A_3 = \frac{1}{2} \cdot (A + H)$, $B_3 = \frac{1}{2} \cdot (B + H)$ und $C_3 = \frac{1}{2} \cdot (C + H)$, und berücksichtigt, dass $H + 2 \cdot U = 3 \cdot S = A + B + C$.

Zum Inkreismittelpunkt

1: Analog zum Beweis in Kasten 3 bestimmt man den Schnittpunkt A' der Winkelhalbierenden w_a mit der Geraden

$$g_{BC}: X = B + u \cdot \overrightarrow{BC} = B + u \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \text{ auf der die Seite } BC \text{ liegt. Man erhält } A' = B + \frac{c}{b+c} \overrightarrow{BC}.$$

2: Wie im Beweis in Kasten 3 ermittelt man

$$I_a, I_b = \frac{1}{a-b+c} (a \cdot A - b \cdot B + c \cdot C) \text{ und}$$

$$I_c = \frac{1}{a+b-c} (a \cdot A - b \cdot B - c \cdot C).$$

3: Als Radien der Ankreise erhält man

$$\rho_a = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{-a+b+c}, \rho_b = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{a-b+c} \text{ und } \rho_c = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{a+b-c}.$$

Daraus folgt unmittelbar die Beziehung

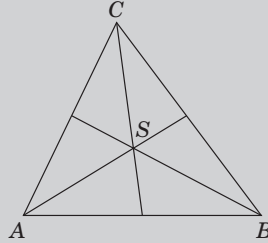
$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c}.$$

4: Jede Innenwinkelsymmetrale steht auf die zugehörige Außenwinkelsymmetrale senkrecht (das skalare Produkt der entsprechenden Richtungsvektoren ist null). Daher sind die Innenwinkelsymmetralen w_a, w_b und w_c die Höhenlinien des Dreiecks $I_a I_b I_c$. Daraus folgt aber unmittelbar, dass I der Höhenschnittpunkt dieses Dreiecks ist.

Schwerpunkt

Satz

- 1 In jedem Dreieck schneiden sich die drei Mittellinien in einem gemeinsamen Punkt S , dem *Schwerpunkt*.
- 2 Zwischen den Eckpunkten A, B, C und dem Schwerpunkt S besteht die Lagebeziehung $3 \cdot S = A + B + C$.



Beweis

- 1 Die Parameterdarstellungen der Mittellinien s_a und s_b sind gegeben durch

$$s_a: X = A + t \cdot \overrightarrow{AM_a} \quad \text{und} \quad s_b: X = B + u \cdot \overrightarrow{BM_b}.$$

Für den Schnittpunkt S dieser beiden Mittellinien gilt:

Es gibt reelle Zahlen t und u , so dass

$$A + t \cdot \overrightarrow{AM_a} = B + u \cdot \overrightarrow{BM_b}.$$

Wir drücken die Richtungsvektoren $\overrightarrow{AM_a}$ und $\overrightarrow{BM_b}$ als Linearkombinationen von $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$ aus:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM_a} &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= -\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BM_b} &= \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA} + \left(\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

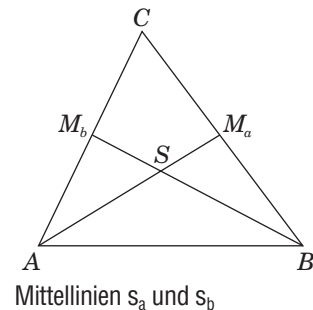
Wir erhalten damit:

$$\begin{aligned} A + t \cdot \overrightarrow{AM_a} &= B + u \cdot \overrightarrow{BM_b} \\ \Leftrightarrow A + t \cdot \left(-\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} \right) &= B + u \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} \right) \\ \Leftrightarrow A - B - t \cdot \overrightarrow{BA} - \frac{u}{2} \cdot \overrightarrow{BA} &= \frac{u}{2} \cdot \overrightarrow{BC} - \frac{t}{2} \cdot \overrightarrow{BC} \\ \Leftrightarrow \left(1 - t - \frac{u}{2} \right) \cdot \overrightarrow{BA} &= \left(\frac{u}{2} - \frac{t}{2} \right) \cdot \overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$

Weil $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$ nicht parallel sind, ist diese Bedingung nur dann erfüllt, wenn $1 - t - \frac{u}{2} = 0$ und $\frac{u}{2} - \frac{t}{2} = 0$.

Lösen dieses linearen Gleichungssystems ergibt $u = t = \frac{2}{3}$. Als Schnittpunkt S von s_a und s_b erhält man also $S = A + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AM_a} = A + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (B + C) - A \right) = \frac{1}{3} \cdot (A + B + C)$. Nachrechnen ergibt, dass außerdem $S = C + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{CM_c}$ erfüllt ist und S daher auch auf der dritten Mittellinie s_c des Dreiecks liegt.

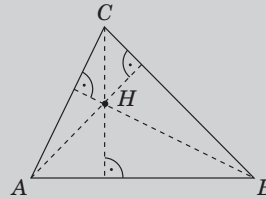
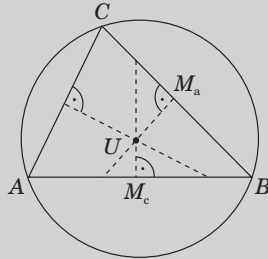
- 2 Dies folgt unmittelbar aus $S = \frac{1}{3}(A + B + C)$.



Höhenschnittpunkt und Umkreismittelpunkt

Satz

- 1 In jedem Dreieck schneiden die drei Mittelsenkrechten einander in einem gemeinsamen Punkt U (dem *Umkreismittelpunkt*) und die drei Höhenlinien in einem gemeinsamen Punkt H (dem *Höhenschnittpunkt*).



- 2 Zwischen den Punkten H , U und S besteht die Lagebeziehung $H + 2 \cdot U = 3 \cdot S$.

Beweis

- 1 Die Mittelsenkrechte m_c von AB verläuft durch den Mittelpunkt M_c von AB und steht auf AB senkrecht. Ein Punkt X der Ebene liegt daher genau dann auf m_c , wenn $\overrightarrow{M_c X} \perp \overrightarrow{AB}$ ist:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_c X} \perp \overrightarrow{AB} &\Leftrightarrow \overrightarrow{M_c X} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(X - \frac{1}{2} \cdot (A + B)\right) \cdot (B - A) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2 \cdot X - (A + B)) \cdot (B - X + X - A) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BX}) \cdot (\overrightarrow{AX} - \overrightarrow{BX}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AX}^2 - \overrightarrow{BX}^2 = 0 \Leftrightarrow |\overrightarrow{AX}| = |\overrightarrow{BX}| \end{aligned}$$

Analoges gilt für die Mittelsenkrechten m_b und m_a .

Für den Schnittpunkt U der Mittelsenkrechten m_c und m_b folgt daraus:

$|\overrightarrow{AU}| = |\overrightarrow{BU}|$ und $|\overrightarrow{AU}| = |\overrightarrow{CU}|$. Daher ist $|\overrightarrow{BU}| = |\overrightarrow{CU}|$ und U liegt auf m_a .

Analog zeigt man, dass der Schnittpunkt H der beiden Höhenlinien h_a und h_b auf der dritten Höhenlinie h_c liegt:

$$H \in h_a \Rightarrow \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$H \in h_b \Rightarrow \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CH}) \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

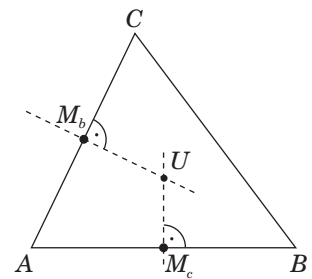
Da H der Schnittpunkt von h_a und h_b ist, gilt

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH}) \cdot \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CH}) \cdot \overrightarrow{AC} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{CH} \cdot (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}) = 0 \\ &\Rightarrow \overrightarrow{CH} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = 0 \\ &\Rightarrow \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BA} = 0 \\ &\Rightarrow \overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow H \in h_c \end{aligned}$$

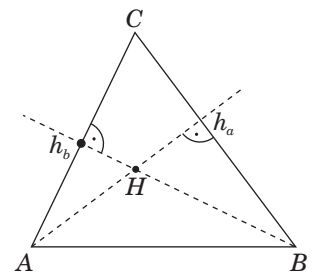
- 2 Aus $\overrightarrow{UM_a} \perp \overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{UM_b} \perp \overrightarrow{AC}$ folgt, dass der Punkt $A + 2 \cdot \overrightarrow{UM_a}$ auf der Höhenlinie h_a liegt und $B + 2 \cdot \overrightarrow{UM_b}$ auf der Höhenlinie h_b . Nun ist aber
- $$\begin{aligned} A + 2 \cdot \overrightarrow{UM_a} &= A + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (B + C) - U\right) = A + B + C - 2 \cdot U \\ &= B + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (A + C) - U\right) \\ &= B + 2 \cdot \overrightarrow{UM_b} \end{aligned}$$

Also ist dieser Punkt der Schnittpunkt H von h_a und h_b und es gilt

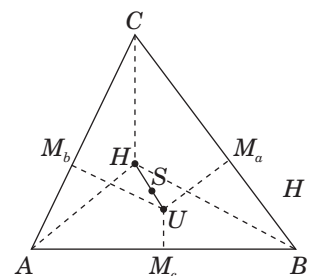
$$H = A + B + C - 2 \cdot U = 3 \cdot S - 2 \cdot U, \text{ also } H + 2 \cdot U = 3 \cdot S.$$



Die Mittelsenkrechten m_c und m_a



Höhenlinien h_a und h_b



Lagebeziehung von H , S und U

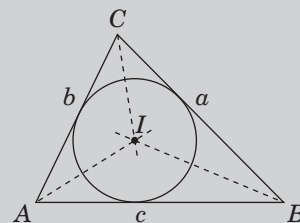
Inkreismittelpunkt

Satz

- 1 In jedem Dreieck ABC schneiden einander die drei Winkelhalbierenden im Punkt

$$I = \frac{1}{a+b+c} \cdot (a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C),$$

wobei $a = |\overrightarrow{BC}|$, $b = |\overrightarrow{AC}|$ und $c = |\overrightarrow{AB}|$ die Seitenlängen des Dreiecks bezeichnen.



- 2 Dieser Punkt I hat von allen drei Dreiecksseiten denselben Abstand $\rho = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{a+b+c}$.

Beweis:

- 1 Die Gleichungen der Winkelhalbierenden w_α und w_β sind gegeben durch:

$$w_\alpha: X = A + t \cdot \left(\frac{1}{c} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{b} \cdot \overrightarrow{AC} \right) \text{ und}$$

$$w_\beta: X = B + u \cdot \left(\frac{1}{c} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{1}{a} \cdot \overrightarrow{BC} \right) = B + u \cdot \left(\frac{1}{c} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{1}{a} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{1}{a} \cdot \overrightarrow{AC} \right)$$

Für den Schnittpunkt I von w_α und w_β gilt daher: Es gibt reelle Zahlen t und u , so dass

$$A + t \cdot \left(\frac{1}{c} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{b} \cdot \overrightarrow{AC} \right) = B + u \cdot \left(\frac{1}{c} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{1}{a} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{1}{a} \cdot \overrightarrow{AC} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{t}{c} - \frac{u}{c} - \frac{u}{a} \right) \cdot \overrightarrow{BA} = \left(\frac{u}{a} - \frac{t}{b} \right) \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{t}{c} - \frac{u}{c} - \frac{u}{a} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{u}{a} - \frac{t}{b} = 0$$

(weil die Seitenvektoren $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{AC}$ nicht zueinander parallel sind).

Lösen dieses Gleichungssystems in t und u führt auf $t = \frac{bc}{a+b+c}$ und $u = \frac{ac}{a+b+c}$.

Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} I &= A + \frac{b}{a+b+c} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{a+b+c} \cdot ((a+b+c) \cdot A + b \cdot (B-A) + c \cdot (C-A)) \\ &= \frac{1}{a+b+c} \cdot (a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C) \end{aligned}$$

Nachrechnen zeigt, dass dieser Punkt I auch auf der dritten Winkelhalbierenden w_γ liegt:

$$\text{Es ist } I = C + \frac{ab}{a+b+c} \left(\frac{1}{b} \cdot \overrightarrow{CA} + \frac{1}{a} \cdot \overrightarrow{CB} \right).$$

- 2 Der Normalabstand von I zur Dreiecksseite AB ist nach der Hesse'schen Abstandsformel gegeben durch:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \cdot |\overrightarrow{AI} \times \overrightarrow{AB}| &= \frac{1}{c} \cdot |(I-A) \times \overrightarrow{AB}| \\ &= \frac{1}{c} \cdot \left| \frac{1}{a+b+c} \cdot (b \cdot \overrightarrow{AB} + c \cdot \overrightarrow{AC}) \times \overrightarrow{AB} \right| \\ &= \frac{1}{c \cdot (a+b+c)} \cdot |b \cdot \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB} + c \cdot \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}| \\ &= \frac{1}{(a+b+c)} \cdot |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}| \quad (\text{denn } \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB} = \vec{0}). \end{aligned}$$

Analog dazu erhält man:

$$\frac{1}{b} \cdot |\overrightarrow{AI} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{(a+b+c)} \cdot |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}| \quad \text{und} \quad \frac{1}{a} \cdot |\overrightarrow{BI} \times \overrightarrow{BC}| = \frac{1}{(a+b+c)} \cdot |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}|$$

Zum Schwerpunkt

Auftrag

Seien A, B, C die Eckpunkte eines Dreiecks und S der Schwerpunkt dieses Dreiecks. Zeigen Sie:

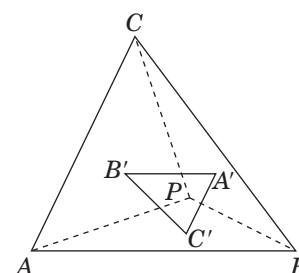
1 Der Schwerpunkt S teilt jede der drei Mittellinien AM_a , BM_b und CM_c im Verhältnis 2:1.

2 S ist auch Schwerpunkt des Dreiecks der Seitenmittelpunkte von ABC .

3 Sei P ein beliebiger Punkt der Dreiecksebene, und seien A', B', C'

die Schwerpunkte der Dreiecke BCP , CAP , ABP .

Dann sind die Seiten der Dreiecke $A'B'C'$ und ABC paarweise parallel zueinander, und die Längen entsprechender Seiten verhalten sich wie 1:3.



Inneres Dreieck $A'B'C'$

4 Für jeden Punkt P der Dreiecksebene gilt:

a) $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 3 \cdot \overrightarrow{PS}$

b) $|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 + |\overrightarrow{PC}|^2 = |\overrightarrow{SA}|^2 + |\overrightarrow{SB}|^2 + |\overrightarrow{SC}|^2 + 3 \cdot |\overrightarrow{PS}|^2$

Aus Eigenschaft b) folgt unmittelbar: Der Schwerpunkt ist jener Punkt der Ebene, für den die Summe der Quadrate der Abstände zu den drei Eckpunkten minimal ist.

5 Sei A' ein beliebiger Punkt der Dreieckseite BC , B' ein Punkt auf AC , und C' ein Punkt auf AB . Dann gilt:

$$S \text{ ist Schwerpunkt des Dreiecks } A'B'C' \Leftrightarrow \frac{AC'}{C'B} = \frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'A}$$

MATERIAL 3

Zum Inkreismittelpunkt

Auftrag

Begründen Sie die folgenden Dreieckseigenschaften:

1 Die Winkelsymmetrale w_α schneidet die Dreieckseite BC in jenem Punkt A' , der BC im Verhältnis $c:b$ teilt. Analog dazu teilt die Winkelsymmetrale w_β die Seite AC im Verhältnis $c:a$, und w_γ teilt AB im Verhältnis $b:a$.

2 Die Geraden

$$w'_\alpha: X = A + t \cdot \left(\frac{1}{c} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{1}{b} \cdot \overrightarrow{AC} \right), \quad w'_\beta: X = B + u \cdot \left(\frac{1}{c} \cdot \overrightarrow{BA} - \frac{1}{a} \cdot \overrightarrow{BC} \right) \text{ und}$$

$$w'_\gamma: X = C + s \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot \overrightarrow{CA} - \frac{1}{a} \cdot \overrightarrow{CB} \right)$$

sind Winkelsymmetralen der Außenwinkel α' , β' und γ' des Dreiecks ABC . Die Winkelsymmetrale w_α und die beiden Außenwinkelsymmetralen w'_β und w'_γ schneiden einander

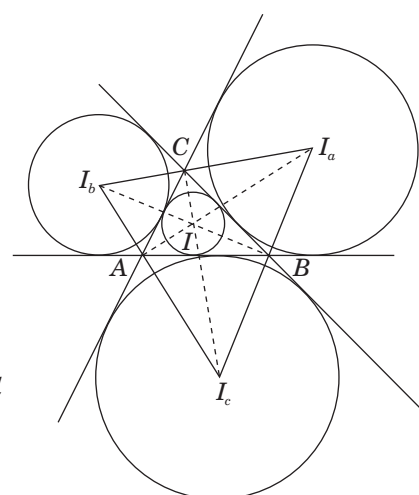
$$\text{im Punkt } I_a = \frac{1}{-a + b + c} (-a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C)$$

Bestimmen Sie außerdem den Schnittpunkt I_b von w_β , w'_α und w'_γ , sowie den Schnittpunkt I_c von w_γ , w'_α und w'_β . Jeder der Punkte I_a , I_b und I_c ist Mittelpunkt eines Kreises, der die Trägergeraden der drei Dreieckseiten berührt. (Man nennt diese Kreise die **Ankreise** des Dreiecks ABC .)

3 Zwischen den Ankreisradien ρ_a , ρ_b und ρ_c und dem Inkreisradius ρ besteht die Beziehung

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c}.$$

4 Der Inkreismittelpunkt I des Dreiecks ABC ist der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $I_a I_b I_c$.



Inkreis und Ankreise

Zum Höhenschnittpunkt

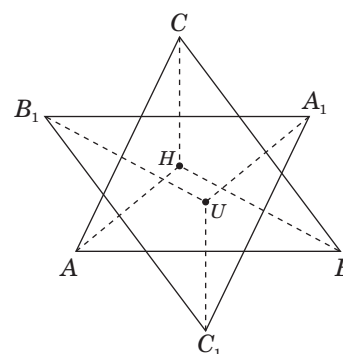
Auftrag

Begründe die folgenden Dreieckseigenschaften.

- 1 Der Höhenschnittpunkt ist von jedem Dreieckseckpunkt genau doppelt so weit entfernt wie der Umkreismittelpunkt von der gegenüberliegenden Seite. Fällt insbesondere der Höhenschnittpunkt mit einem Dreieckseckpunkt zusammen, so ist U der Mittelpunkt der gegenüberliegenden Dreieckseite.
- 2 Entweder gilt $U = H = S$, oder U , H und S sind drei voneinander verschiedene Punkte einer Geraden, wobei S die Strecke HU im Verhältnis 2:1 teilt.
(Diese Gerade wird als **eulersche Gerade** des Dreiecks ABC bezeichnet.)

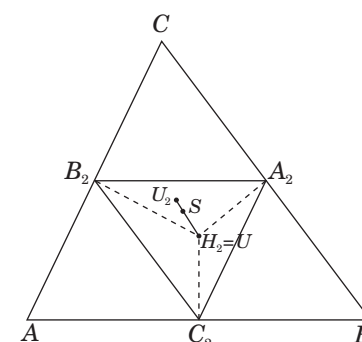
- 3 Sind H und H' die Höhenschnittpunkte zweier Dreiecke ABC und ABC' mit gemeinsamem Umkreismittelpunkt U , dann ist $\overline{HH'} = \overline{CC'}$.

- 4 Durch Spiegelung des Umkreismittelpunktes U an den drei Dreieckseiten BC , AC und AB erhält man die Punkte A_1 , B_1 und C_1 . Zeigen Sie:
Die Dreiecke $A_1B_1C_1$ und ABC sind zueinander kongruent, und die Seiten liegen paarweise parallel.
Das Dreieck $A_1B_1C_1$ hat den Umkreismittelpunkt $U_1 = H$ und den Höhenschnittpunkt $H_1 = U$.
Die Dreiecke BCH , CAH und ABH haben die Umkreismittelpunkte A_1 , B_1 und C_1 und die Höhenschnittpunkte A , B und C .
Die Dreiecke B_1C_1U , C_1A_1U und A_1B_1U haben die Umkreismittelpunkte A , B und C und die Höhenschnittpunkte A_1 , B_1 und C_1 .



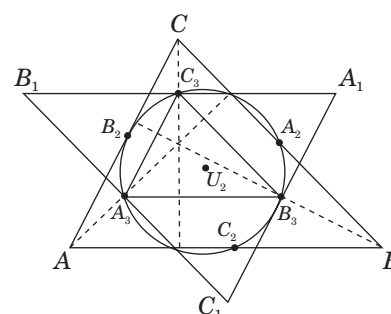
Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$

- 5 Seien $A_2 = M_a$, $B_2 = M_b$ und $C_2 = M_c$ die Seitenmittelpunkte eines Dreiecks ABC .
Die Seiten der Dreiecke ABC und $A_2B_2C_2$ liegen paarweise parallel, und entsprechende Seitenlängen stehen im Verhältnis 2:1.
Das Mittendreieck $A_2B_2C_2$ hat den Umkreismittelpunkt $U_2 = \frac{1}{2}(U + H)$ und den Höhenschnittpunkt $H_2 = U$.

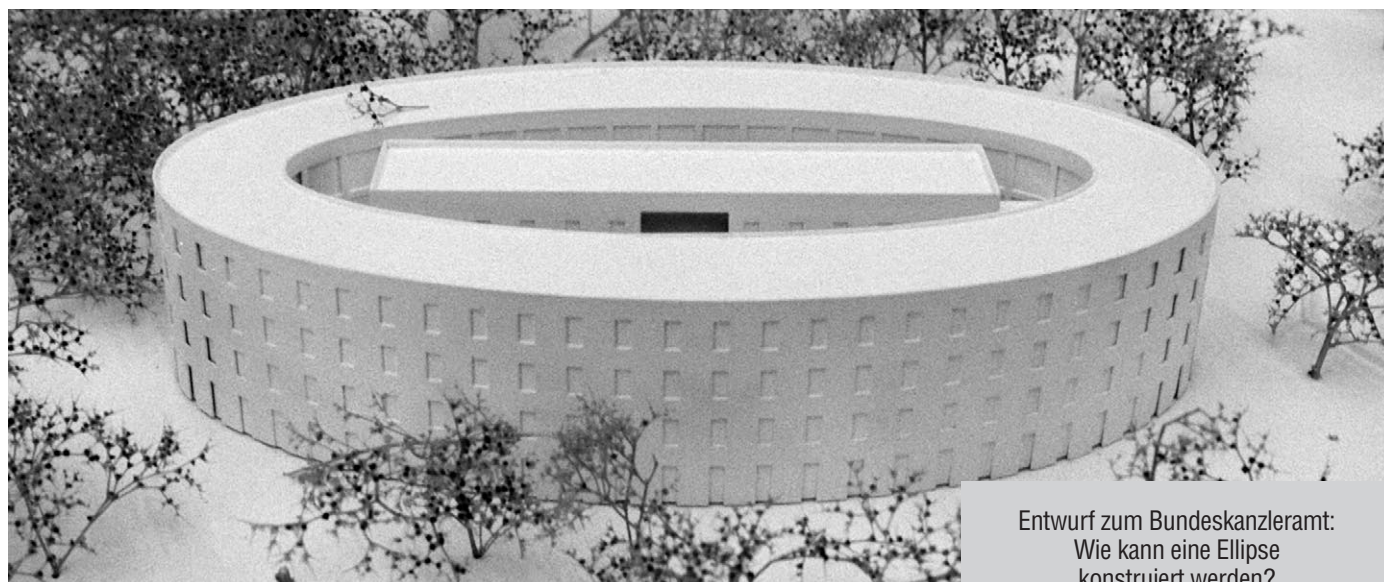


Mittendreieck $A_2B_2C_2$

- 6 Seien A_3 , B_3 und C_3 die Mittelpunkte der Strecken AH , BH und CH .
Die Seiten der Dreiecke ABC und $A_3B_3C_3$ liegen paarweise parallel, und entsprechende Seitenlängen stehen im Verhältnis 2:1.
Das Dreieck $A_3B_3C_3$ ist das Mittendreieck von Dreieck $A_1B_1C_1$.
Die Strecken A_2A_3 , B_2B_3 und C_2C_3 sind Durchmesser des Umkreises des Mittendreiecks $A_2B_2C_2$.
Das Dreieck $A_3B_3C_3$ hat den Umkreismittelpunkt $U_3 = U_2 = \frac{1}{2}(U + H)$ und den Höhenschnittpunkt $H_3 = H$.



Dreieck $A_3B_3C_3$



Entwurf zum Bundeskanzleramt:
Wie kann eine Ellipse
konstruiert werden?

■ SEKUNDARSTUFE I/II
9.–13. Schuljahr

Ellipse, Hyperbel, Parabel – Koordinaten- geometrie ohne Vektoren

In der Analytische Geometrie geht manches auch ohne Vektoren. Sie kann als Koordinatengeometrie schon ab Klasse 9 sinnvoll unterrichtet werden.

Gerald Wittmann

Professor für Mathematik und ihre Didaktik an der Pädagogischen Hochschule Schwäbisch Gmünd
E-Mail: gerald.wittmann@ph-gmuend.de

Die Analytische Geometrie ist ein fester Bestandteil des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II: Geraden und Ebenen sowie ihre Schnitt- und Lagebeziehungen, teilweise auch Kreise und Kugeln, werden mithilfe von Vektoren beschrieben. Generationen von Schülerinnen und Schülern haben dies seit den 80er Jahren so erlebt.

Der Status quo stellt allerdings viele nicht zufrieden. So währt schon seit langem eine intensive Diskussion um die Analytische Geometrie (für einen Überblick vgl. Tietze 2000, S. 93 ff.). Curriculare Alternativen werden gefordert: Keine weitgehende Beschränkung auf Geraden und Ebenen, lautet das Motto, sondern eine Behandlung unterschiedlicher Kurven, Flächen und Körper! Das Ziel ist eine „Re-Geometrisierung“ der oftmals noch stark von der Linearen Algebra geprägten Analytischen Geometrie.

Zahlreiche Vorschläge greifen den Ansatz der *Objektstudien* auf: Im Zentrum des Unterrichts sollen an Eigenschaften reiche und damit interessante geometrische Objekte (Kurven, Flächen, Körper) stehen, die mit verschiedenen Methoden untersucht und somit zum Ausgangspunkt für vielfältige Schüleraktivitäten werden können.

In Bezug auf die Unterrichtsinhalte zeichnet sich eine Renaissance der *Kegelschnitte* ab. Diese waren in der Zeit nach dem Zweiten Weltkrieg ein zentraler Gegenstand der Analytischen Geometrie in der gymnasialen Oberstufe, bis in den 1970er Jahren die Analytische Geometrie von der Linearen Algebra verdrängt wurde. Sie wurden damals räumlich be-

trachtet (als Kegelschnitte im Wort-sinn) und systematisch dargestellt – meist in einer vollständigen Klassifikation. Neuere Vorschläge sehen Ellipse, Hyperbel und Parabel (die nicht entarteten Kegelschnitte) als Gegenstand exemplarisch orientierter Objektstudien, die auch Querverbindungen beispielsweise zur Physik oder anderen außermathematischen Anwendungen einbeziehen.

Zusätzliche Bedeutung erhält diese Diskussion durch aktuelle schulpolitische Entwicklungen: Die Auflösung von Grund- und Leistungskursen sowie die Verkürzung der gymnasialen Schulzeit von neun auf acht Jahre erfordern eine Neuordnung der Lerninhalte auch in der Sekundarstufe II: Ein „Vorziehen“ von Elementen der Analytischen Geometrie, die bislang in Jahrgangsstufe 12/13 ihren Platz hatten, in 10/11 ist unvermeidlich. Da die Anzahl der für die Analytische Geometrie zur Verfügung stehenden Unterrichtsstunden eher geringer wird als höher, ist zudem eine stärkere Vernetzung mit anderen Teilgebieten (wie der Analysis oder der Elementargeometrie) erforderlich.

Dies muss kein Problem darstellen – im Gegenteil! In diesem Beitrag wird gezeigt, dass daraus auch eine Chance für die Analytische Geometrie erwachsen kann. Wesentlich ist in jedem Fall eine Besinnung auf den Kern der Analytischen Geometrie, auf ihre zentralen Ideen (Wittmann 2003): die *Algebraisierung geometrischer Objekte* und die *Geometrisierung algebraischer Gleichungen*.

Die Lage eines Punktes (in der Ebene oder im Raum) lässt sich nach der Einführung eines Koordinaten-

systems durch Koordinaten, also durch reelle Zahlen erfassen (*Algebraisierung*). Mittels dieser Koordinaten wiederum können geometrische Objekte (Kurven oder Flächen) durch Gleichungen beschrieben und vermutete Eigenschaften algebraisch nachgewiesen werden. Algebraische Darstellungen lassen häufig auch übergreifende Aspekte (Gemeinsamkeiten oder Unterschiede) stärker hervortreten. Umgekehrt können algebraische Gleichungen geometrisch gedeutet werden, woraus sich häufig neue Folgerungen über die Eigenschaften geometrischer Objekte ziehen lassen (*Geometrisierung*). Der Erkenntnisprozess in der Analytischen Geometrie gestaltet sich deshalb typischerweise als Wechselspiel von algebraischen und geometrischen Überlegungen.

Alle diese Aktivitäten können schon ab Klasse 9 altersangemessen und motivierend angeregt werden.

Ein Unterrichtsgang

Der folgende Unterrichtsgang in die Analytische Geometrie ist als Koordinatengeometrie (ohne Vektoren) ab Klasse 9 konzipiert: Ellipse, Hyperbel und Parabel werden zunächst einzeln als ebene Kurven behandelt. Eine erste Vereinheitlichung kann über die Leitlinien- oder Leitkreiseigenschaften erfolgen, eine weitere durch die Einordnung als Kegelschnitte. Dabei werden Anregungen von Bürger u. a. (1991, S. 169 ff.), Meyer (1995) und Tietze (2000, S. 224 ff.) aufgegriffen.

Die *Unterrichtsgestaltung* zeichnet sich durch ein Wechselspiel verschiedener Methoden aus: Der Unterricht ist einerseits über weite Phasen problemorientiert und entdeckend. Die Schülerinnen und Schüler erhalten viel Zeit, um eigene mathematische Erfahrungen zu sammeln. Eine große Rolle spielen dabei das Arbeiten mit Realmodellen und der Computereinsatz. In anderen Phasen agiert die Lehrkraft stärker vortragend und darstellend. Dies soll die Denkmuster der Schülerinnen und Schüler erweitern und das Herausarbeiten von Vereinheitlichungen und zentralen Ideen unterstützen.

Der *Computereinsatz* wiederum umfasst zwei Varianten mit unterschiedlichen Zielrichtungen. Dynamische Geometriesoftware (DGS; hier Euklid DynaGeo 2.6) erlaubt ein gezieltes Verändern von Parametern

in der Ausgangskonstruktion und das Erzeugen von Spezialfällen, unterstützt also das Herausarbeiten geometrisch-struktureller Beziehungen. Ein Computeralgebra-System (CAS; hier Derive 5.0) ermöglicht das gezielte Variieren von Parametern in der Gleichung einer Kurve. Die damit erzeugten Bilder einer Kurve unterstützen das Verständnis der geometrischen und algebraischen Strukturen. Alternativ kann auch die DGS als Funktionenplotter verwendet werden (eine Anleitung findet man in Seebach 2005).

Ellipse

Den Einstieg in das Thema bildet das klassische Problem der so genannten „Gärtnerkonstruktion“: Wie kann ein ovals Blumenbeet im Freien angelegt werden? Schließlich muss gewährleistet sein, dass der Umriss des Beetes auch wirklich „gleichmäßig“ verläuft. Im Gartenbau ist die alte Methode des Seilspannens auch heute noch verbreitet. Dahinter steht die Suche nach einem Verfahren, um eine Ellipse zu konstruieren.

Konstruktion

Die so motivierte „Gärtnerkonstruktion“ der Ellipse wird nun von der Lehrkraft vorgeführt als eine Erweiterung der Kreiskonstruktion. Dies ist umso eindrucksvoller, je größer die Ellipse ausfällt, und sollte deshalb möglichst im Freien oder notfalls in der Pausenhalle stattfinden. Als Brennpunkte fungieren hierbei Metallhaken, die in die Fugen der Pflasterung gesteckt werden, oder Saughaken auf glatten Bodenbelägen.

Beim Verstehen der Konstruktion kann ein ähnliches Problem helfen: das Ziehen der Kreise auf einem Fußballfeld (**Material 1**, S. 56). Warum dieses Verfahren einen Kreis liefert, bedarf einer Erläuterung – erfahrungsgemäß ist vielen Schülerinnen und Schülern das mathematische Prinzip eines Zirkels nicht bewusst.

An dieser Stelle zeigt sich eine erste Verbindung von Ellipse und Kreis:

- Ein Kreis ist die Menge aller Punkte, die denselben Abstand von einem Punkt (dem Mittelpunkt) besitzen.
- Eine Ellipse ist die Menge aller Punkte, die dieselbe Abstandsumme zu zwei Punkten (den Brennpunkten) besitzen.

Wege im Unterricht

Ellipse

Konstruktion

- Gärtnerkonstruktion (Material 1 und 2)
- Experimente: Variation der Fadenlänge und der Brennpunkte (Material 3)
- Konzentrische Kreise: Konstruktion diskreter Punkte (Material 4)
- Konstruktion mit DGS

Charakterisierung

Eine Ellipse ist die Menge aller Punkte, die dieselbe Abstandsumme zu zwei Punkten (den Brennpunkten) besitzen.

Herleitung der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hyperbel

Ausgangsfrage

Welche Gestalt besitzt die Menge aller Punkte, die denselben Abstandsunterschied zu zwei gegebenen Punkten hat?

Konstruktion

- Über konzentrische Kreise (Material 5)
- Fadenkonstruktion (Material 6)
- Konstruktion mit DGS

Herleitung der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Parabel

Ausgangsfrage

Welche Gestalt besitzt die Menge aller Punkte, die denselben Abstand von einer Geraden und einem Punkt, der dieser nicht angehört, haben?

Konstruktion

- Leitgeradenkonstruktion (Material 7)
- Parabelzirkel (Material 8)
- Konstruktion mit DGS

Herleitung der Gleichung

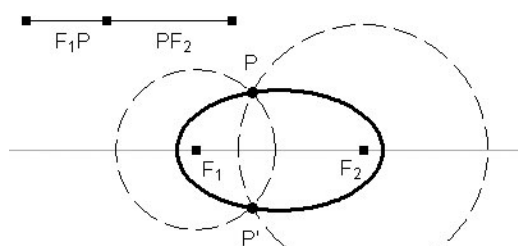
$$y^2 = 2px$$

Ellipsenkonstruktion mit DGS

Konstruktion mittels Streckenabtragung:

Die beiden Längen $\overline{F_1P}$ und $\overline{F_2P}$ werden außerhalb der eigentlichen Konstruktion so vorgegeben, dass ihre Summe $\overline{F_1P} + \overline{F_2P}$ konstant ist, und als Radien zweier Kreise um F_1 und F_2 abgetragen.

Die Spuren der beiden Schnittpunkte P und P' ergeben zusammen die Ellipse.



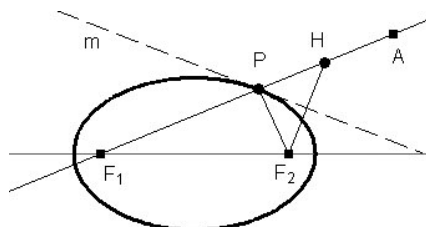
Konstruktion durch Streckenabtragung

Konstruktion über die Mittelsenkrechte:

Konstruiert wird zunächst eine Gerade durch F_1 und einen beliebigen weiteren Punkt A .

Der Punkt H wird dann so auf F_1A gewählt, dass $\overline{F_1H} = l > \overline{F_1F_2}$. Alle Punkte der Mittelsenkrechten m zu F_2 und H haben denselben Abstand von F_2 und H . Dies gilt insbesondere für den Schnittpunkt P von m mit F_1A , woraus folgt:

$$\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = \overline{F_1P} + \overline{PH} = \overline{F_1H} = l = \text{konstant.}$$



Konstruktion über die Mittelsenkrechte

Was hier noch wie eine Analogie erscheint, entpuppt sich später als ein Sonderfall.

Die Lernenden können nun die Ellipsenkonstruktion selbst ausprobieren (**Material 2**, S. 57). Es gilt, die Gestalt der Ellipse genauer zu ergründen und – durch Fragen angeleitet – eigenständig zu experimentieren. Wesentliche Ergebnisse lauten:

- Die Länge des Fadens muss stets größer sein als der Abstand der beiden Punkte. Sie ist gleich der größeren Achse der damit konstruierten Ellipse.
- Je weiter die beiden Punkte voneinander entfernt liegen, desto größer wird die Differenz der zwei Achsenlängen der Ellipse. Fallen umgekehrt die beiden Punkte zusammen, entsteht ein Kreis; sein Radius ist gleich der halben Fadenlänge.

Die Fadenkonstruktion kann – auch als Hausaufgabe – ergänzt werden durch die Konstruktion diskreter Punkte einer Ellipse als Schnittpunkte vorgegebener Kreise um die beiden Brennpunkte (**Material 3**). Dabei wird die konstante Abstandssumme als charakterisierende Eigenschaft einer Ellipse vertiefend behandelt. Legt man Transparentpapier über eine kopierte Vorlage, lässt sich systematisch die „Fadenlänge“ verändern. Um den Abstand beider Punkte zu variieren, sind entweder unterschiedliche Vorlagen erforderlich, oder man verschiebt zwei Trans-

parentfolien gegeneinander, auf denen jeweils eine Schar konzentrischer Kreise abgebildet ist.

Auch die Konstruktion mit DGS bietet sich an. Hierbei bereitet allerdings die Umsetzung der konstanten Fadenlänge gewisse Schwierigkeiten – ein Konstruktionswerkzeug „Faden“ existiert dort leider nicht. Als Lösung dieses Problems gibt es im Wesentlichen die beiden Möglichkeiten aus **Kasten 2**.

Beim Arbeiten mit DGS lassen sich insbesondere die für die Algebraisierung wichtigen Spezialfälle leicht erzeugen und untersuchen, wie später deutlich wird.

Gleichung

Der nächste Schritt ist die Herleitung einer Gleichung für die Ellipse (vgl. auch **Kasten 3**). Die Koordinatisierung im kartesischen x - y -Koordinatensystem unter Nutzung der offensichtlichen Symmetrieachsen ist dabei naheliegend. Wie kann man eine Gleichung für die Ellipse gewinnen? Schon das Verständnis der Bedeutung der Gleichung einer geometrischen Figur fällt Schülerinnen und Schülern oft schwer. Eine solche Gleichung wird von den Koordinaten x und y aller Punkte der Figur erfüllt, nicht jedoch von den Koordinaten der „restlichen“ Punkte der Ebene.

Zu diesem Zweck muss die Eigenschaft, die die Ellipse als Punktmenge charakterisiert, in eine Gleichung „übersetzt“ werden. Für jeden Punkt

$P = (x|y)$ einer Ellipse ist die Summe der Abstände zu den beiden Brennpunkten F_1 und F_2 gleich einer Konstanten l :

$$\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = l = \text{konstant.}$$

Nun werden die beiden Koordinaten x und y eines beliebigen Punktes P der Ellipse durch die Betrachtung rechtwinkliger Dreiecke ins Spiel gebracht; hierbei bezeichnet e den Abstand eines Brennpunkts vom Koordinatenursprung:

$$l_1^2 = (e + x)^2 + y^2 \quad \text{und}$$

$$l_2^2 = (e - x)^2 + y^2.$$

Die Längen der beiden Halbachsen gewinnt man jeweils aus der Betrachtung von Spezialfällen – hier kommt eine wichtige heuristische Strategie der Analytischen Geometrie zum Tragen: Die Beziehung $l = l_1 + l_2 = 2a$ für die große Halbachse ist offensichtlich, wenn P auf der x -Achse liegt; sie kann auch schon beim Arbeiten mit der Fadenkonstruktion oder einem DGS entdeckt werden. Analog kann die Beziehung $a^2 = b^2 + e^2$ für die kleine Halbachse abgelesen werden, wenn P auf der y -Achse liegt. Geschicktes zweimaliges Quadrieren der Wurzelgleichung und weitere Umformungen bzw. Ersetzungen führen zur Ellipsengleichung (**Kasten 3**):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Streng genommen bleibt zu prüfen, dass umgekehrt auch alle Gleichungen dieser Form mit $a, b > 0$ eine Ellipse beschreiben, da Quadrieren im

Allgemeinen keine Äquivalenzumformung, sondern eine Gewinnumformung ist, also zusätzliche Lösungen liefern kann. Hierzu wird gezeigt, dass in den Schritten, in denen quadriert wird, jeweils beide Seiten der Gleichung ≥ 0 sind.

Eine Gegenüberstellung der Ellipsengleichung mit der geometrischen Ausgangssituation, der Fadenkonstruktion, zeigt: In der Fadenkonstruktion sind zwei Größen frei wählbar, die Fadenlänge l und der Abstand der beiden Befestigungspunkte $2e$. Auch die Gleichung weist zwei Parameter auf, die Längen der beiden Halbachsen a und b . Mit $l = 2a$ und $e^2 = a^2 - b^2$ lassen sich die Parameter transformieren.

Mit einem CAS kann nun gezielt untersucht werden, welchen Einfluss a und b auf die Gestalt der Ellipse haben. Auch hier wird wieder einer der beiden Parameter konstant gehalten und der andere verändert. Insbesondere wird so deutlich, dass ein Kreis eine spezielle Ellipse ist, denn für $a = b = r$ erhält man die Gleichung $x^2 + y^2 = a^2$ eines Kreises mit Radius a .

Andere Konstruktionen der Ellipse können ergänzend in ähnlicher Weise behandelt werden (vgl. Schupp 2000; Winter 2005):

- die Papierstreifenkonstruktion, die auch die Bahn eines Punktes auf einer rutschenden Leiter beschreibt,
 - die so genannte „Klasmühle“, ein Scherzartikel, der die Mechanik eines Ellipsenzirkels benutzt,
 - die Scheitelkreiskonstruktion.
- Hier öffnet sich ein weites Feld für selbstständige Übungen der Schülerinnen und Schüler.

Hyperbel

Den Zugang zur Hyperbel bildet nun ein innermathematisches Problem. Die für die Ellipse charakteristische Bedingung wird abgeändert:

Welche Gestalt besitzt die Menge aller Punkte, die denselben Abstandsunterschied zu zwei gegebenen Punkten hat?

Konstruktion

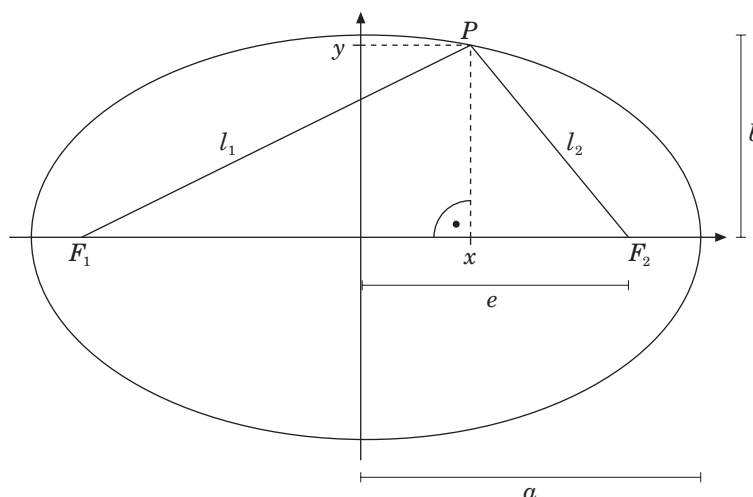
Erste Erfahrungen liefert hier das Konstruieren diskreter Punkte (vgl. **Material 4**): Es existieren offenbar unendlich viele derartige Punkte, und sie bilden zwei getrennte Äste.

Auch für die Hyperbel gibt es eine Fadenkonstruktion, die sich allerdings – anders als bei der Ellipse –

Herleitung der Ellipsengleichung

Für jeden Punkt $P = (x|y)$ einer Ellipse ist die Summe der Abstände zu den beiden Brennpunkten F_1 und F_2 gleich einer Konstanten l : $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = l = \text{konstant}$.

Geeignete Wahl des Koordinatensystems



Die beiden Brennpunkte haben die Koordinaten

$$F_1 = (-e|0) \text{ und } F_2 = (e|0).$$

Für die große Halbachse a gilt

$$2a = l_1 + l_2 = l.$$

(Dies ist offensichtlich, wenn P auf der x -Achse liegt.)

Für die kleine Halbachse b gilt

$$a^2 = b^2 + e^2.$$

(Dies ist offensichtlich, wenn P auf der y -Achse liegt.)

Damit folgt für einen Punkt $P = (x|y)$ der Ellipse:

$$\begin{aligned} l_1 + l_2 &= \overline{PF_1} + \overline{PF_2} \\ &= \sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a \end{aligned}$$

und damit

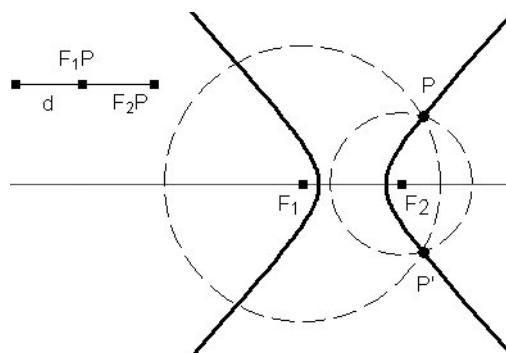
$$\begin{aligned} \sqrt{(x+e)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} \\ (x+e)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + (x-e)^2 + y^2 \\ 4ex - 4a^2 &= -4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} \\ a^4 - a^2e^2 &= a^2x^2 - e^2x^2 + a^2y^2 \\ a^2(a^2 - e^2) &= x^2(a^2 - e^2) + a^2y^2 \\ a^2b^2 &= x^2b^2 + a^2y^2 \\ 1 &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \end{aligned}$$

Hyperbelkonstruktion mit DGS

Konstruktion mittels Streckenabtragung:

Die beiden Längen $\overline{F_1P}$ und $\overline{F_2P}$ werden außerhalb der eigentlichen Konstruktion so vorgegeben, dass ihre Differenz $\overline{F_1P} - \overline{F_2P}$ konstant ist, und als Radien zweier Kreise um F_1 und F_2 abgetragen.

Die Spuren der beiden Schnittpunkte P und P' ergeben zusammen beide Hyperbeläste.



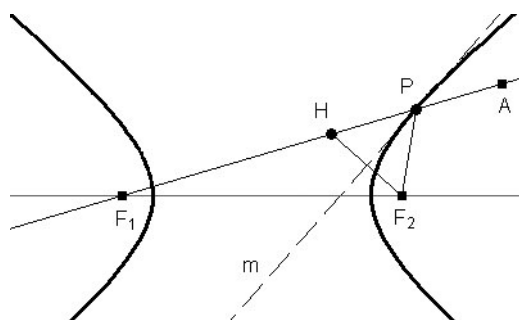
DGS-Konstruktion durch Streckenabtragung

Konstruktion über die Mittelsenkrechte:

Konstruiert wird zunächst eine Gerade durch F_1 und einen beliebigen weiteren Punkt A . Der Punkt H wird dann so auf F_1A gewählt, dass $\overline{F_1H} = d < \overline{F_1F_2}$.

Alle Punkte der Mittelsenkrechten m zu F_2 und H haben denselben Abstand von F_2 und H . Dies gilt insbesondere für den Schnittpunkt P von m mit $\overline{F_1A}$, woraus folgt:

$$\overline{F_1P} - \overline{F_2P} = \overline{F_1P} - \overline{HP} = \overline{F_1H} = d = \text{konstant.}$$



DGS-Konstruktion über die Mittelsenkrechte

in der Regel nicht auf Anhieb erschließt. Eine „Low-cost-Variante“ des Hyperbelzirkels, die sich an historische Vorbilder anlehnt (vgl. Weigand 1997), lässt sich auch aus fester Pappe und Faden herstellen. Damit können die Schülerinnen und Schüler experimentieren und Erfahrungen sammeln (**Material 5**). Eine stabilere Konstruktion des Hyperbelzirkels aus Holzleisten ermöglicht wiederum das Arbeiten im Freien.

Auch die beiden DGS-Konstruktionen lassen sich auf die Hyperbel übertragen (s. **Kasten 4**).

Gleichung

Bei der Herleitung der Gleichung bildet die Beziehung

$$|\overline{F_1P} - \overline{F_2P}| = \text{konstant}$$

den Ausgangspunkt. Die Umformungen verlaufen analog zur Ellipsengleichung und münden in die Hyperbelgleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Für Schülerinnen und Schüler verblüffend ist die ähnliche „Bauform“ beider Gleichungen.

Die CAS-Darstellung ermöglicht eine interessante Entdeckung: Beim Zoomen nach außen ähneln die Hyperbeläste jeweils Halbgeraden (**Abb. 3a**). Unterstützt werden kann der Entdeckungs- und Formulie-

rungsprozess durch das Abdecken des zentralen Bereichs der Darstellung (**Abb. 3b**). Dieses Phänomen lohnt eine genauere Untersuchung. Zeichnerisches Experimentieren mit einem Ausdruck der CAS-Darstellung erlaubt zwei Erfahrungen:

- Je zwei Halbgeraden gehören zur selben Ursprungsgeraden. Es handelt sich also um ein Asymptotenpaar, das symmetrisch zur x -Achse ist.
- Eine graphische Ermittlung der Steigungen und das Vergleichen mit den Parametern a und b führt zur Vermutung, dass diese den Wert $\pm \frac{b}{a}$ besitzen.

Die Asymptoten sind die Diagonalen im zur Hyperbel gehörigen „Achsenrechteck“ (**Abb. 3c**); hiermit erfahren a und b eine geometrische Deutung. An dieser Stelle bietet sich ein Blick zurück zur Ellipse an: Auch dort lassen sich a und b als Seitenlängen eines – in diesem Fall die Kurve begrenzenden – „Achsenrechtecks“ deuten.

Die Vermutung über die Steigung der Asymptoten lässt sich durch folgende Überlegung verifizieren: Betrachtet man einen Punkt $P = (x|y)$ des Hyperbelastes im ersten Quadranten und den „unmittelbar darüber liegenden“ Punkt $\tilde{P} = (x|\tilde{y})$ der Asymptoten, so gilt:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \text{ und}$$

$$\tilde{y} = \frac{b}{a}x$$

Hieraus folgt:

- Es gilt $\sqrt{x^2 - a^2} \rightarrow \sqrt{x^2} = |x| = x$ für $x \rightarrow \infty$. Die Hyperbel nähert sich also der Asymptoten mit wachsendem x immer stärker an.
- Allerdings schneidet oder berührt sie die Asymptote nicht. Vielmehr gilt $\sqrt{x^2 - a^2} > \sqrt{x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Die Hyperbel verläuft also im ersten Quadranten stets unterhalb der Asymptoten.

Analoge Überlegungen gelten auch für die anderen Quadranten. Sie können von den Schülerinnen und Schülern selbstständig formuliert werden.

Leitkreiskonstruktionen

Die Leitkreiskonstruktionen schaffen eine erste Vereinheitlichung von Ellipse und Hyperbel. Der Arbeitsauftrag ist rein innermathematisch als Suche nach einer neuen Punktmenge formuliert:

Welche Gestalt besitzt die Menge aller Punkte, die denselben Abstand von einer Kreislinie und einem Punkt, der dieser nicht angehört, haben?

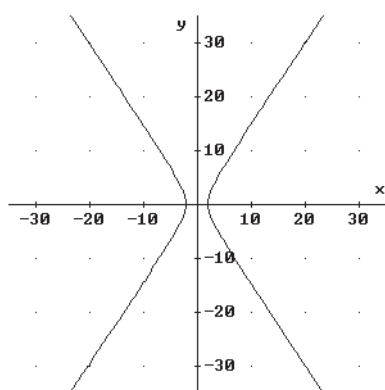


Abb. 3a: CAS-Darstellung der Hyperbel mit der Gleichung $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$

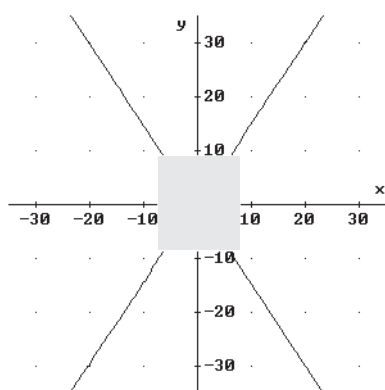


Abb. 3b: Hyperbel mit abgedecktem Bereich

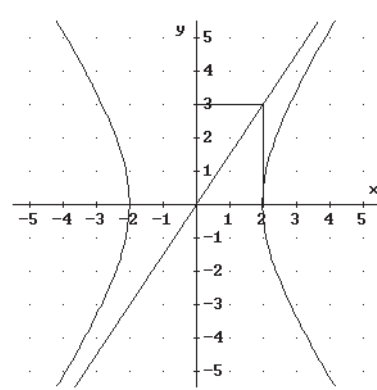


Abb. 3c: Hyperbel mit Asymptote und „Achsenrechteck“

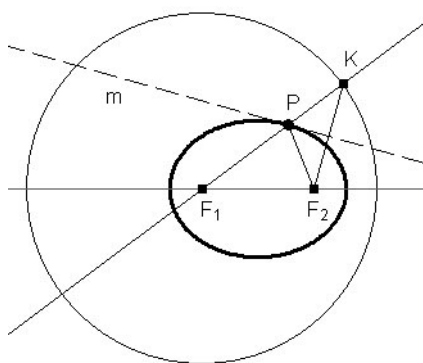


Abb. 4a: DGS-Leitkreiskonstruktion der Ellipse

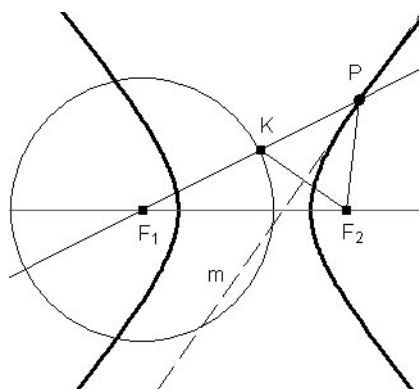


Abb. 4b: DGS-Leitkreiskonstruktion der Hyperbel

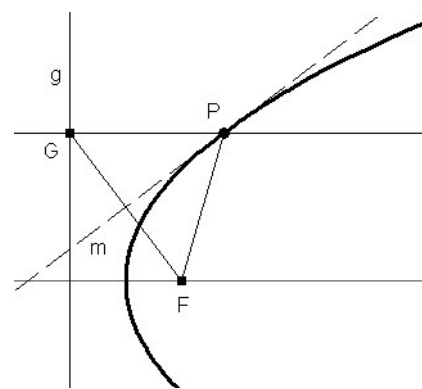


Abb. 5: DGS-Leitlinienkonstruktion der Parabel

Zunächst gilt es zu klären, was unter dem Abstand eines Punktes von einer Kreislinie zu verstehen ist: die Länge der kürzesten Verbindung von diesem Punkt zur Kreislinie. Diese kürzeste Verbindung verläuft immer radial, sowohl für Punkte innerhalb als auch außerhalb des Kreises.

Für den Unterricht ergeben sich nun zwei Varianten:

- Durch die zusätzliche Anweisung, dass der Punkt innerhalb des Kreises liegen soll, wird der Unterricht enger geführt.
- Ohne diese Vorgabe verläuft er offener und das Feld für Entdeckungen ist weiter.

Zunächst soll der Punkt innerhalb des Kreises mit Radius r liegen. Die Konstruktion diskreter Punkte zeigt rasch, dass in diesem Fall eine Ellipse entsteht. Wenn man sich die Konstruktion noch einmal genauer anschaut oder einige Spezialfälle betrachtet, wird bestätigt, dass letztlich dieselben elementaren Schritte wie bei der eingangs dargestellten Ellipsenkonstruktion durchgeführt werden. Auch die Beziehung $r = 2a$ und der Abstand $2e$ der beiden Brennpunkte vom Mittelpunkt lassen sich dort wiederfinden.

Die DGS-Konstruktionen sind jeweils relativ einfach (**Abb. 4a** und **4b**). Ein wesentlicher Konstruktions-schritt ist wiederum die Mittelsenkrechte m von K und F_2 . Das Ziehen an F_2 zeigt zunächst das „Umspringen“ von der Ellipse zur Hyperbel, sobald F_2 die Kreislinie überquert. Voraussetzung hierfür ist, dass F_2K als Gerade konstruiert wurde und nicht nur als Strecke. Darüber hinaus taucht die Frage auf, was im Grenzfall passiert – diese Diskussion kann zu einer nochmaligen Vertiefung des Abstandsbegriffs führen.

Die Ellipsengleichung folgt sofort aus den Beziehungen $\overline{PK} = \overline{PF_2}$ und $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PF_1} + \overline{PK} = r = \text{konstant}$.

Parabel

Der Zugang zur Parabelkonstruktion erfolgt wiederum innermathematisch durch eine Variation der vorhergehenden Leitliniencharakterisierung:

Welche Gestalt besitzt die Menge aller Punkte, die denselben Abstand von einer Geraden und einem Punkt, der dieser nicht angehört, haben?

Konstruktion

Die Konstruktion diskreter Punkte kann einen ersten Eindruck liefern (**Material 6**); die Scharen konzentrischer Kreise werden nun durch Scharen paralleler Geraden ersetzt.

Der Parabelzirkel greift wesentliche Ideen des Hyperbelzirkels auf (**Material 7**) und ist eine unmittelbare Vorlage für das Arbeiten mit DGS (**Abb. 5**).

Gleichung

Zur Herleitung der Parabelgleichung ist eine geeignete Koordinatisierung der Konstruktion nötig. Die algebraisch einfachste Gleichung erhält man, wenn die y -Achse durch den Scheitel der Parabel verläuft; weniger optimale Koordinatisierungen können der Anlass für entsprechende Vergleiche sein. Bezeichnet man den Abstand von F zur Leitgeraden mit p , so gilt für $P = (x|y)$:

$$x = \overline{PG} - \frac{p}{2} = \overline{PF} - \frac{p}{2} \quad \text{und} \quad y^2 = \overline{PF}^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2$$

Das Ersetzen von $\overline{PF}$ in der zweiten Gleichung liefert $y^2 = 2px$. Die Parabelgleichung weist also nur einen Parameter auf. Dies lässt sich in Bezug auf die Leitlinienkonstruktion geo-

metrisch deuten (wird der Abstand des Brennpunktes von der Geraden frei gewählt, ergibt sich die Öffnung automatisch), und taucht auch später bei der Betrachtung der Kegelschnitt-Eigenschaft wieder auf (soll eine Parabel entstehen, muss man – anders als bei Ellipse und Hyperbel – parallel zu einer Mantellinie des Kegels, also unter einem bestimmten Winkel schneiden).

Die Parabel liefert mehrfache Anknüpfungspunkte zur Analysis:

- Die Frage nach einer Gleichung in der Form $y = f(x)$ wird im Unterricht häufig gestellt, da der Terminus Parabel aus der Algebra bekannt ist. Sie lässt sich durch ein Vertauschen der Variablen x und y klären. Eine Veranschaulichung wird durch das Arbeiten mit Foliensätzen, die denselben Graphen in verschiedenen Lagen relativ zum Koordinatensystem zeigen, erleichtert.
- Das Ermitteln einer Tangentengleichung kann (wie bei Ellipse und Hyperbel) ein zusätzlicher, eventuell auch differenzierender Lerninhalt sein. Dass die Mittel-

senkrechte zu P und G stets auch die Tangente an die Parabel ist, folgt aus der Konstruktion (Eindeutigkeit des Schnittpunkts mit der Parabel). Steigung und Achsenabschnitt lassen sich jeweils durch geometrische Überlegungen ermitteln.

- Die Graphen von Hyperbel und Parabel sehen auf den ersten Blick sehr ähnlich aus. Das Herausarbeiten der Unterschiede (etwa anhand der Frage, ob auch die Parabel Asymptoten besitzt) spricht die Steigung eines Graphen an.

Ein Zusammenstellen der wesentlichen Eigenschaften von Ellipse, Hyperbel und Parabel rundet diesen Teil der Unterrichtssequenz ab.

Eine weiter reichende Vereinheitlichung erfolgt durch die Einordnung dieser Kurven als räumliche Schnitte einer Ebene mit einem Doppelkegel (eine fachlich orientierte Darstellung liefert Schupp 2000, S. 4 ff.). Zu Beginn hat hier wieder das Experimentieren – das Anschneiden von Plastilin-Kegeln mit einer Rasierklinge – seinen Platz. Anschließend kann über eine Zwei-Tafel-Projektion eine

ebene Darstellung der Kegelschnitte generiert werden, aus der sich dann auch die charakterisierenden Abstandsbeziehungen ablesen lassen.

Literatur

- Bürger, H. u.a.: *Mathematik Oberstufe 3*. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1991.
 Kroll, W.: *Kegelschnitte – eine Neubestimmung*. – In: *mathematica didactica* 28(1), 2005, S. 79–97.
 Meyer, J.: *Kegelschnitte: Ein entdeckender Zugang*. – In: *Der Mathematikunterricht* 41(1), 1995, S. 34–42.
 Schupp, H.: *Kegelschnitte*. Franzbecker, Hildesheim 2000.
 Seebach, G.: *Funktionenplotter*. Online unter www.dynamische-geometrie.de (letzter Aufruf am 12.09.2005)
 Tietze, U.-P. (unter Mitarbeit von Schroth, P./Wittmann, G.): *Didaktik der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie*. Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Band 2. Vieweg, Braunschweig 2000.
 Weigand, H.-G.: *Mechanisches und computerunterstütztes Zeichnen von Kegelschnitten*. – In: *mathematik lehren* 82, 1997, S. 14–18.
 Winter, H.: *Kreis und Ellipse. Ein Kapitel unvergänglicher Geometrie*. – In: *mathematik lehren* 130, 2005, S. 14–19.
 Wittmann, G.: *Zentrale Ideen der Analytischen Geometrie*. – In: *mathematik lehren* 119, 2003, S. 47–51.

MATERIAL 1

Fußball-Arena

► Aufgabe

Wie werden die Kreise auf einem Fußballfeld gezogen?
 Notiere deine Vermutungen.



„Gärtnerkonstruktion“ der Ellipse

Du brauchst: ein Stück Pappe als Unterlage, weißes Papier, einen Faden und zwei Reißnägeln oder Tesafilm. Markiere die beiden Punkte auf dem Papier und befestige den Faden mit zwei Reißnägeln oder je einem Streifen Tesafilm. Zeichne nun eine Ellipse nach der „Gärtnerkonstruktion“, indem du den Faden beim Zeichnen immer straff gespannt hältst.

Fadenlänge verändern

Halte die beiden Punkte fest und verändere die Länge des Fadens systematisch. Was beobachtest du? Folgende Fragen können dir dabei helfen:

► Aufgabe

Welchen Einfluss hat die Länge des Fadens auf die Gestalt der Ellipse?

Wie lang muss er mindestens sein?

Lässt sich die Länge des Fadens auch durch Größen der Ellipse ausdrücken?

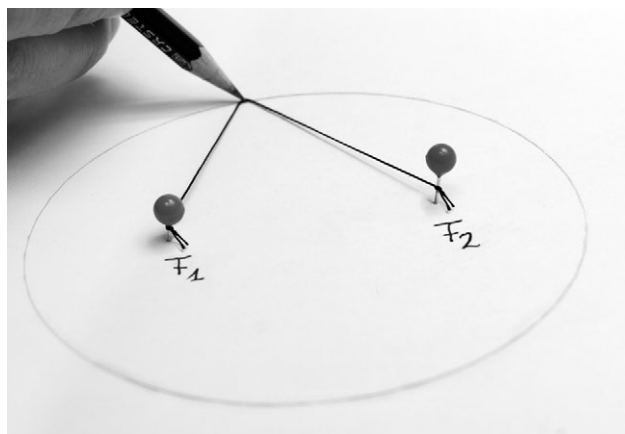
Punktabstand verändern

Halte nun die Länge des Fadens konstant und variiere den Abstand der beiden Punkte. Was beobachtest du? Folgende Fragen können dir dabei helfen:

► Aufgabe

Welchen Einfluss hat der Abstand der beiden Befestigungspunkte auf die Gestalt der Ellipse?

Was geschieht, wenn sie immer weiter zusammen rücken?

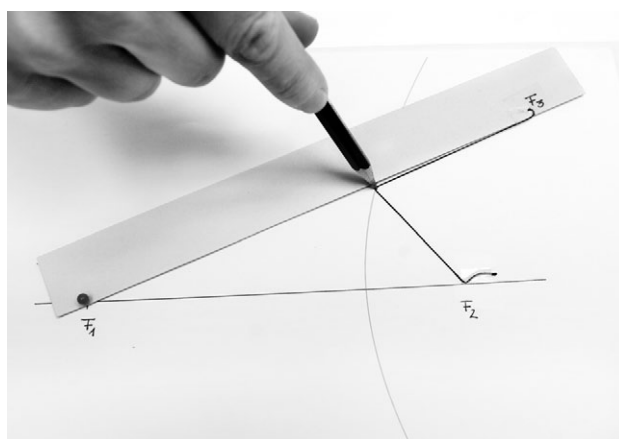


Fadenkonstruktion der Hyperbel

Du brauchst: eine Unterlage (ein Stück Pappe oder Styropor), eine Schiene aus fester Pappe (z.B. die Rückseite des Zeichenblocks; es geht auch ein Lineal), Papier zum Zeichnen (am besten im Format DIN-A3), Nylonfaden, Reißnägeln, Schere.

Die Abbildung zeigt einen einfachen Hyperbelzirkel. In dem Punkt F_1 ist ein Lineal (Pappstreifen) drehbar gelagert (Reißzwecke). Ein Faden wird im Punkt F_2 der Zeichenebene und in einem Punkt T auf der Kante des Lineals befestigt.

Du kannst damit eine Hyperbel zeichnen, indem du das Lineal um F_1 drehst und dabei den Stift so am Lineal entlang führst, dass der Faden immer gespannt ist.



► Aufgaben

1 Baue einen Hyperbelzirkel und zeichne damit eine Hyperbel.

2 Erkläre die Funktionsweise des Hyperbelzirkels.

3 Welche charakteristischen Größen der Hyperbelkonstruktion findest du dort wieder?

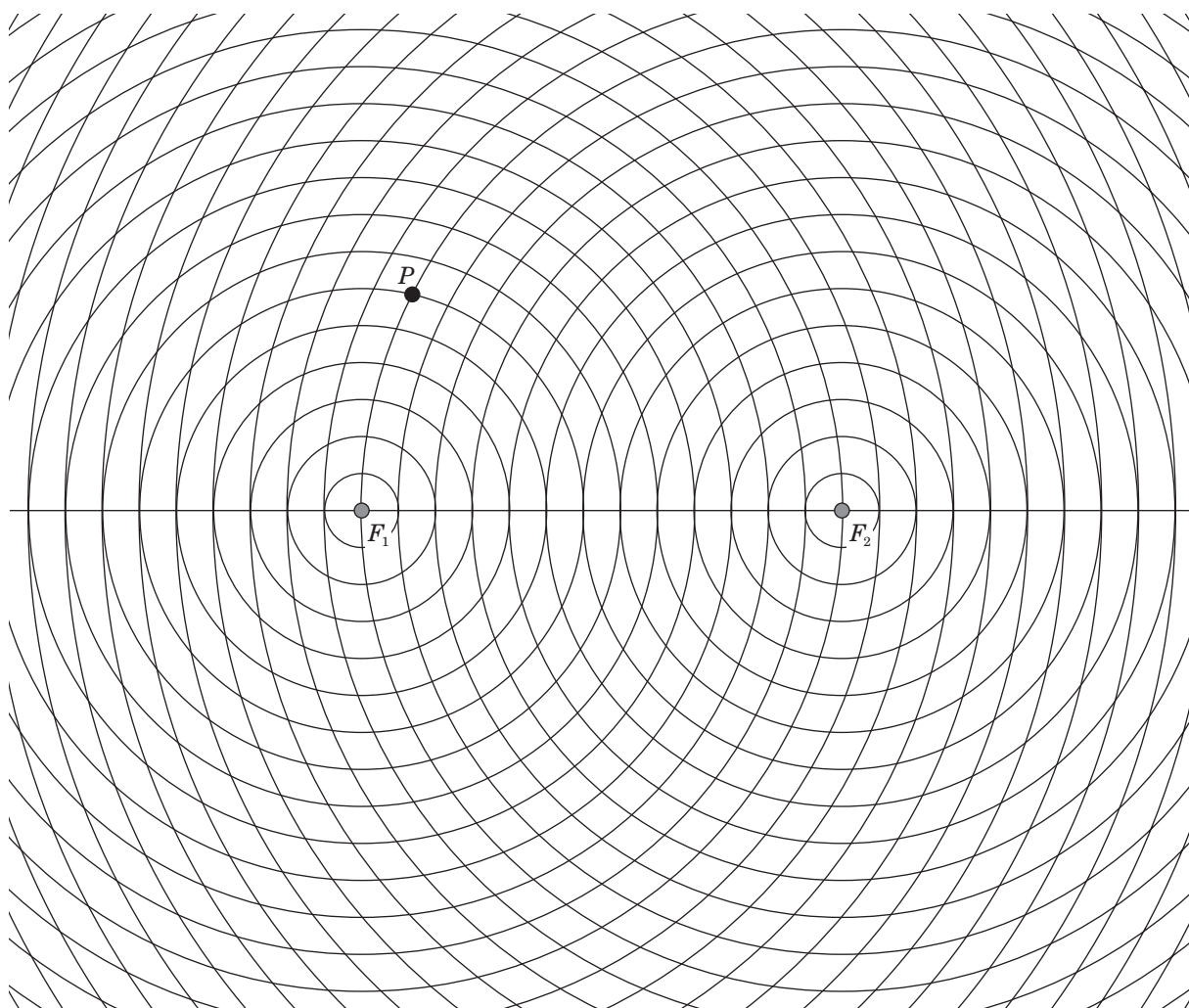
4 Variiere nun systematisch diese Größen. Welchen Einfluss hat dies auf die Hyperbel? Notiere deine Beobachtungen.

Konstruktion diskreter Punkte einer Ellipse

In der Abbildung sind konzentrische Kreise um F_1 und F_2 dargestellt. Ihre Radien nehmen jeweils um 0,5 cm zu.

► Aufgaben

- 1 Welche Abstandssumme besitzt der Punkt P zu den beiden Punkten F_1 und F_2 ?
- 2 Zeichne weitere Punkte mit derselben Abstandssumme bezüglich F_1 und F_2 ein. Begründe dein Vorgehen.
- 3 Zeichne alle Punkte mit der Abstandssumme 8,5 cm von F_1 und F_2 ein.
- 4 Konstruiere auf einem weiteren Blatt Punkte einer Ellipse mit einem größeren Abstand von F_1 und F_2 .

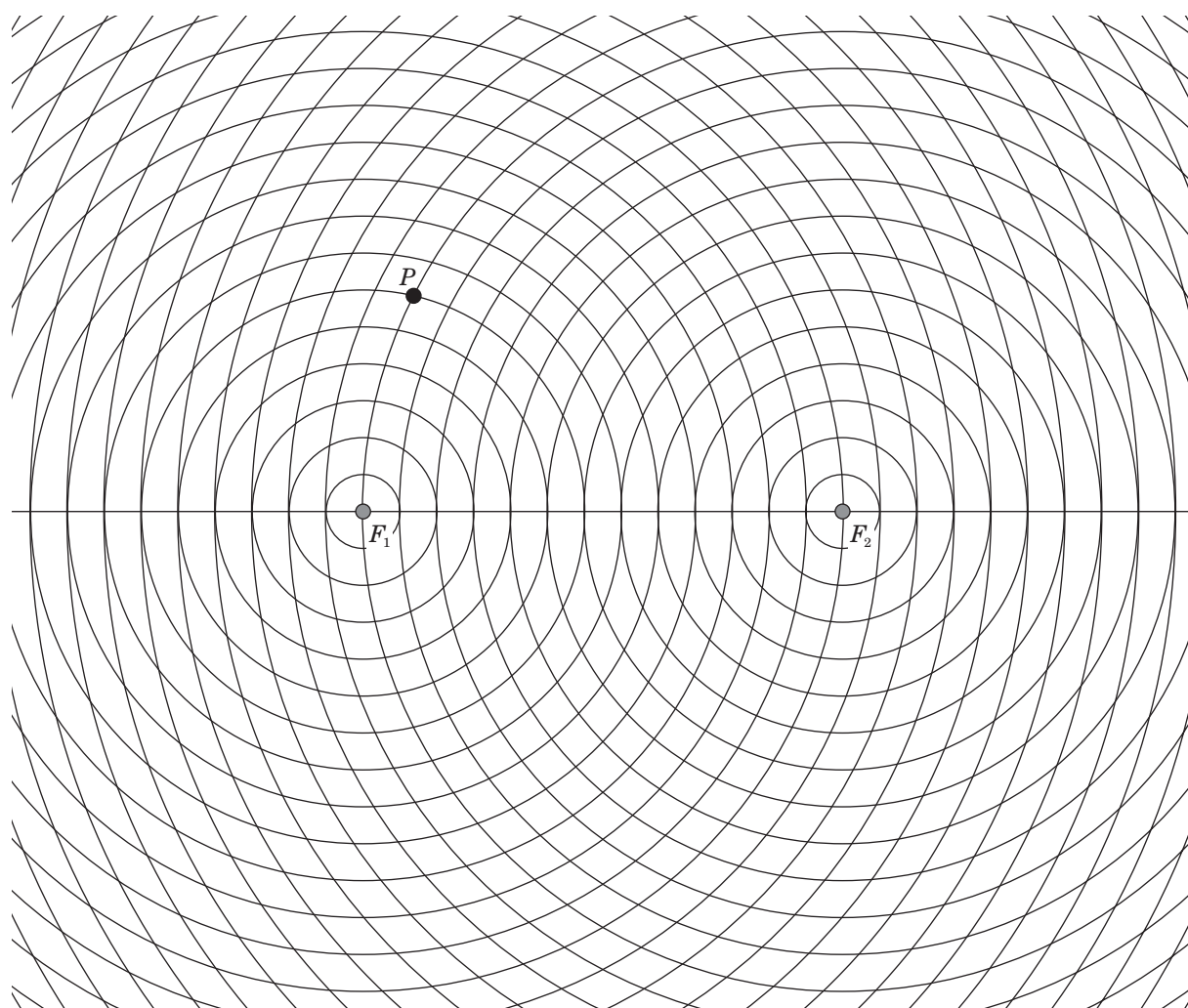


Konstruktion diskreter Punkte einer Hyperbel

In der Abbildung sind konzentrische Kreise um F_1 und F_2 dargestellt. Ihre Radien nehmen jeweils um 0,5 cm zu.

► Aufgaben

- 1 Der Punkt P gehört zu einer Hyperbel. Zeichne weitere Punkte derselben Hyperbel ein.
Begründe dein Vorgehen.
- 2 Zeichne Punkte einer Hyperbel mit einem Abstandsunterschied von 1 cm zu F_1 und F_2 ein.
- 3 Konstruiere auf einem weiteren Blatt Punkte einer Hyperbel mit einem größeren Abstand von F_1 und F_2 .

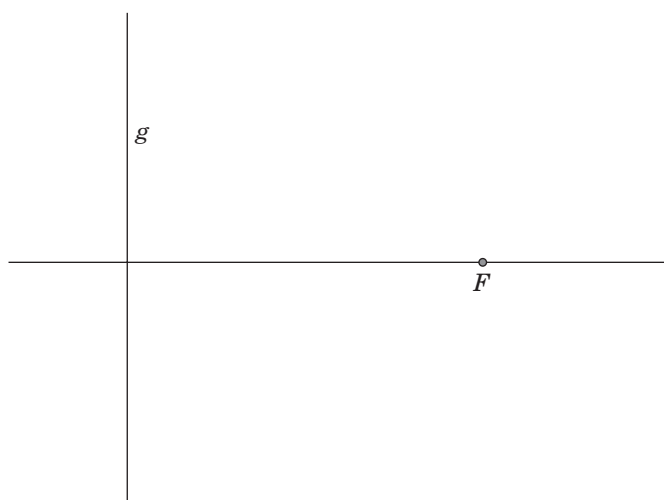


Konstruktion diskreter Punkte einer Parabel

In der Abbildung sind der Brennpunkt F und die Leitgerade g einer Parabel dargestellt.

► Aufgabe

- 1 Zeichne Punkte ein, die denselben Abstand von F und g besitzen.
- 2 Wie lassen sich diese Punkte systematisch ermitteln? Gehe ähnlich wie bei Ellipse und Hyperbel vor.
- 3 Konstruiere auf einem weiteren Blatt eine Parabel mit einem anderen Abstand von F und g .



Fadenkonstruktion der Parabel

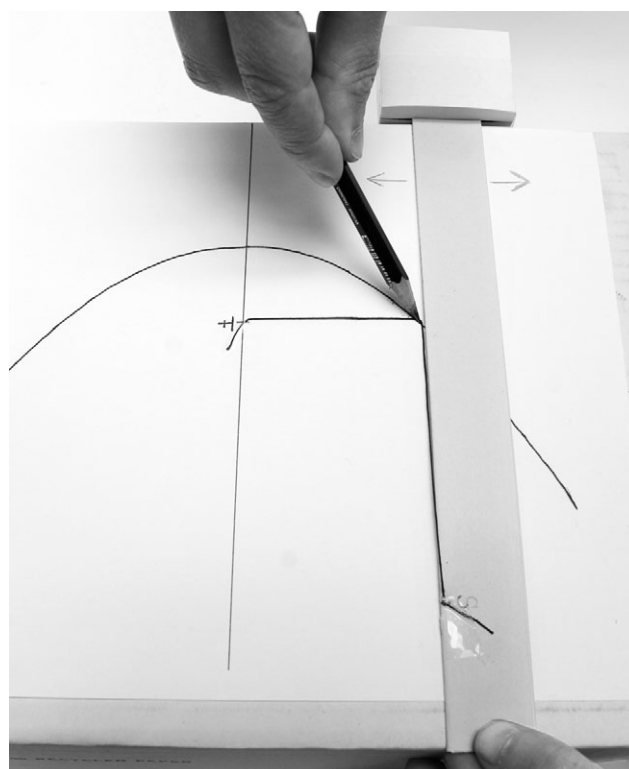
Du brauchst: eine Unterlage (ein Stück Pappe oder Styropor), eine Schiene aus fester Pappe (z. B. die Rückseite des Zeichenblocks oder ein Lineal), Papier zum Zeichnen (am besten im Format DIN-A3), Nylonfaden, Reißnägeln, Schere.

Die Abbildung zeigt einen einfachen Parabelzirkel. Ein Faden wird im Punkt F der Zeichenebene und in einem Punkt S auf der Kante der Schiene befestigt. Die Schiene kann auf der Zeichenunterlage parallel zur Blattkante verschoben werden.

Du kannst damit eine Parabel zeichnen, indem du die Schiene auf der Zeichenunterlage verschiebst und den Stift dabei so an der Schiene entlang führst, dass der Faden immer straff gespannt ist.

► Aufgaben

- 1 Baue einen Parabelzirkel und zeichne damit eine Parabel.
- 2 Erkläre die Funktionsweise des Parabelzirkels.
- 3 Welche charakteristischen Größen der Parabelkonstruktion findest du dort wieder?
- 4 Variiere nun systematisch diese Größen. Welchen Einfluss hat dies auf die Parabel?



VORSCHAU

Tarife, Preise, Kleingedrucktes
Herausgeber:
Wolfgang Henn, Dortmund

Freude und Angst im Mathematikunterricht
Herausgeber:
Thomas Götz, München
Micael Kleine, Regensburg

Terme
Herausgeber:
Bärbel Barzel, Duisburg
Wilfried Herget, Halle

Tabellenkalkulation
Herausgeber:
Rudolf vom Hofe, Regensburg
Hans-Georg Weigand, Würzburg

Daten und Zufall
Herausgeber:
Andreas Büchter, Soest

Kooperatives Lernen
Herausgeber:
Ralph Hepp, Erfurt
Kirsten Miehe, Meezen

Hausaufgaben
Herausgeberin:
Regina Bruder, Darmstadt

Präsentieren *
Herausgeber:
Christina Drüke-Noe, Kassel
Thomas Jahnke, Potsdam

Üben *
Herausgeberin:
Regina Bruder, Darmstadt

Projekte *
Herausgeber:
Matthias Ludwig, Weingarten

Rund ums Fahrrad *
Herausgeberin:
Bärbel Barzel, Essen

Liebe Leserin, lieber Leser,

mathematik lehren möchte Ihnen weiterhin Ideen für einen interessanten und vielseitigen Mathematikunterricht liefern und Ihnen mit Unterrichtskonzepten und Materialien die Unterrichtsvorbereitung erleichtern. Leider wird auch das Herstellen von Zeitschriften nicht billiger. Um Ihnen **mathematik lehren** weiterhin in gleicher Qualität anbieten zu können, müssen wir leider die Bezugspreise für 2006 erhöhen.

Ab dem 1. Januar 2006 kostet das Jahresabonnement bestehend aus 6 Ausgaben **mathematik lehren**, dem Jahreshaft und einem Heft „Schüler“ im Abonnement 69,60 €. Der Preis für ein Heft **mathematik lehren** beträgt im Einzelverkauf 11 €, für Abonnentinnen und Abonnenten 8,60 €. Die Preise verstehen sich jeweils zuzüglich Versandkosten. Wir bitten um Ihr Verständnis!

Beilagenhinweis

Bitte beachten Sie die Beilagen des Aulis Verlages Deubner & Co. KG, der Verlagsgruppe Weltbild GmbH und der Giesel Dialog GmbH.

mathematik lehren

wird herausgegeben vom Friedrich Verlag in Velber in Zusammenarbeit mit Klett und in Verbindung mit Bärbel Barzel, Regina Bruder, Wilfried Herget, Rudolf vom Hofe, Thomas Jahnke, Günther Malle und Hans-Georg Weigand.

Redaktion
Anne Hilgers
Tel. (05 11) 4 00 04-142
E-Mail: redaktion.ml@friedrich-verlag.de

Redaktionssekretariat
Katrinn Franke, Tel. (05 11) 4 00 04-128

Verkaufs- und Anzeigenleitung
Bernd Schrader, Tel. (05 11) 4 00 04-131

Anzeigenabwicklung
Daniela Vossmann, Tel. (05 11) 4 00 04-184
Anzeigenpreisliste Nr. 12 vom 01.10.2004

Abo-Service und Vertrieb
Telefon (05 11) 4 00 04-151

Verlagsleitung
Uwe Brinkmann, Anne Meyhöfer,
Dr. Maren Ankermann

Verlag
Erhard Friedrich Verlag GmbH
Postfach 10 01 50, 30917 Seelze
Tel. (05 11) 4 00 04-0, Fax (05 11) 4 00 04-219
Titel: Dirk Jäger (Karte: © 2005 Nautische Veröffentlichung Verlagsgesellschaft Arnis)

Realisation
Gudrun Leszinski/
Friedrich Medien-Gestaltung

Druck
Wittmann + Wäsch GmbH + Co. KG

Das Jahresabonnement **mathematik lehren** besteht aus 6 Einzelheften, einem Jahreshaft und einem Heft „Schüler“. Der Preis eines Abonnements **mathematik lehren** beträgt 66,60 €. Der Einzelheftpreis von 10 € beträgt im Abonnement 8,10 €, Jahreshaft 10 € und die Reihe Schüler 8 €, jeweils zzgl. Versandkosten. Wir liefern gegen Rechnung. Studenten und Referendaren erhalten bei Vorlage ihrer aktuellen Bescheinigung 30 % Rabatt auf den Jahres-Abonnement-Preis sowie einmalig vier Einkaufsgutscheine über 50 % Rabatt. Wenn Sie diesen Ausbildungsrabatt über mehrere Jahre in Anspruch nehmen möchten, schicken Sie uns regelmäßig Ihre aktuelle Bescheinigung (keine Ernennungsurkunde!) zu.

Die Mindestbestelldauer des Abonnements beträgt ein Jahr. Es läuft weiter, wenn nicht sechs Wochen vor Ablauf des Berechnungszeitraums schriftlich gekündigt wird. Bei Umzug bitte Nachricht an den Verlag mit alter und neuer Anschrift sowie der Kundennummer (steht auf der Rechnung).

mathematik lehren ist zu beziehen durch den Buch- und Zeitschriftenhandel oder direkt vom Verlag. Auslieferung in Österreich durch ÖBV Klett Cotta, Hohenstauffengasse 5, A-1010 Wien, Auslieferung in der Schweiz durch Bücher Balmer, Neugasse 12, CH-6301 Zug. Weiteres Ausland auf Anfrage.

© Beiträge sind urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte vorbehalten. Auch unverlangt eingesandte Manuskripte werden sorgfältig geprüft. Unverlangt eingesandte Bücher werden nicht zurückgeschickt. Die als Arbeitsblatt oder Kopiervorlage bezeichneten Unterrichtsmittel dürfen bis zur Klassenstärke vervielfältigt werden.

Mitglied der Fachgruppe Fachzeitschrift im VDZ und im Börsenverein des Deutschen Buchhandels.

Bei Nichtlieferung infolge höherer Gewalt oder infolge Störungen des Arbeitsfriedens bestehen keine Ansprüche gegen den Verlag.

Bestell-Nr. 08133

ISSN 0175-2235

Ankündigung

LEARNTEC

Der 14. Internationale Kongress und Fachmesse für Bildungs- und Informationstechnologie, LEARNTEC unter dem Motto „Wissen was kommt“ findet vom **14.–16. Februar 2006** in Karlsruhe statt.

Weitere Informationen unter <http://www.learntec.de/>

DIDACTA

Die Bildungsmesse didacta findet vom **20.–24. Februar 2006** in Hannover statt. Wir laden Sie herzlich ein, uns in **Halle 17, Stand A04 und A03** zu besuchen. Wir informieren Sie über die fachdidaktischen und methodischen Inhalte unserer Zeitschriften und stellen Ihnen unsere aktuellen Neuerscheinungen vor.

GDM Tagung

Die 40. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) findet vom **06.–10. März 2006** in Osnabrück statt. Nähere Informationen erhalten Sie unter <http://www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/gdm/home.shtml>

MNU Tagung 2006

Vom **09. – 13. April 2006** findet an der Universität Karlsruhe die 97. Jahrestagung des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts e.V. (MNU) statt. Informationen unter www.mnu.de

CAS-Tagung

Vom **20.–22. April 2006** findet im Haus Schönenberg bei Ellwangen eine Fortbildung mit dem Titel *Entdecken, Üben, Prüfen mit Computeralgebra – Neue Entwicklungen an Schule und Hochschule* statt. Organisiert wird die Tagung von der Gesellschaft für Informatik, der Deutsche Mathematiker-Vereinigung und der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik. <http://www.fachgruppe-computeralgebra.de/CLAW>

Inhaber der Bildrechte, die wir nicht ausfindig machen konnten, bitten wir, sich beim Verlag zu melden. Berechtigte Ansprüche werden selbstverständlich im Rahmen der üblichen Vereinbarungen abgegolten.

Die Redaktion

Von Mauerrätseln zu quadratischen Gleichungen

In den Sommerferien 2005 habe ich auf der Lokalnachrichten-Seite Notuln der Westfälischen Nachrichten einige „Mauerrätsel“ veröffentlicht: Eine leichte, eine mittlere und eine schwere Zahlenmauer waren zu füllen. Und dies sieben Samstage lang – mit großer Resonanz aus der Bevölkerung (s. **Material 1**).

Anfang des Schuljahres habe ich eine 9. Klasse übernommen und bin mit dem Mauer-Knobelblatt eingestiegen. Die Aufgaben eignen sich gut, um in einem ersten Zugang die Schülerinnen und Schüler auf die Suche nach (evtl. noch zufälligen) Lösungen zu schicken. Dabei kann ein systematisches Vorgehen angeregt werden: Nach Einsetzen einer ersten Zahl für a wird die Zahl im obersten Stein – nennen wir sie f – mit dem gewünschten Ergebnis verglichen. Wie ändert sich f , wenn a vergrößert wird? Bei den Mauern aus Runde 1 bis 3 bewirkt ein größerer Zahlenwert für a eine Vergrößerung des Zahlenwertes für f – solange a nicht negativ ist. In den Runden 4 bis 7 kann infolge der Division eine Vergrößerung von a auch zu einer Verkleinerung von f führen. Solch ein systematisches Probieren fördert den Blick für die Wirkung von Größenänderungen, für (funktionale) Abhängigkeiten und strategisches Vorgehen.

In sieben Arbeitsgruppen haben die Schülerinnen und Schüler in der

Stunde und in der Hausaufgabe die Lösungen zur Aufgabe 1 für ihre drei Zahlenmauern gefunden. In der nächsten Stunde stellten sie diese und die Systematik ihrer Suche vor.

Gleichungen aufstellen

Nach der Probier-Phase habe ich die Aufgaben genutzt, um lineare Gleichungen zu wiederholen und rein bzw. gemischt quadratische Gleichungen einzuführen. Die Suche nach Gleichungen und die Ermittlung aller Lösungen für eine bestimmte Zahlenmauer kann sich auch in der ersten Phase anbieten, wenn die Klasse verschiedene Lösungen zu einer Aufgabe findet oder eine Systematik schwer zu erkennen ist.

Als zweite Herangehensweise wurde somit für die erste Mauer (Runde 1) gemeinsam eine Formel zu Bestimmung von a notiert und gelöst. Die zweite und dritte Mauer lösten die Lernenden wieder in Eigenarbeit. Insgesamt wiederholten wir so kurz den *Umgang mit Variablen und linearen Gleichungen*. Die leichten Mauern von Runde 3, 5, 6, 7 und die schwere von Runde 7 waren die passende Hausaufgabe.

Die leichten Mauern von Runde 2 und 4 boten dann Gelegenheit, rein quadratische Gleichungen zu behandeln, die Wurzel einzuführen und zwei Lösungen zu identifizieren. Die

mittlere und schwere Aufgabe von Runde 2, 4 und 6 wurden wieder in Eigen- bzw. Hausarbeit erledigt.

Mit den mittleren und schweren Mauern von Runde 3, 5 und der mittleren von Runde 7 steht die Lösung gemischt quadratischer Gleichungen an. Das erfordert einen Exkurs zum Lösungsalgorithmus. Ist dieser beispielsweise anhand von Schulbuchaufgaben gefestigt, geht es auf dem Blatt mit den genannten Mauern weiter. Die hier auftretenden zwei Lösungen sind tatsächlich neu. Es gab Schülerinnen und Schüler, die beim systematischen Probieren die eine oder die andere Lösung gefunden hatten, aber niemand hatte beide entdeckt.

Nachdenken über Zahlenmauern

Nach Behandlung der quadratischen Gleichungen und des Satzes des Pythagoras kann man in einem Exkurs das Mauerrechnen noch einmal mit einer neuen Zielsetzung aufnehmen: Was kann über die Lösbarkeit und Lösungsanzahl der Mauerrätsel in Abhängigkeit vom Wert der 3 gegebenen Zahlen ausgesagt werden? Einige Anregungen finden Sie in **Kasten 1**.

Die Zeitungsknocheleien zu überlegen, die eingereichten Lösungen zu kontrollieren und die Kommentare zu lesen – das hat mir viel Spaß gemacht. Auch meine Schülerinnen und Schüler sind auf die Mauerknocheleien und die nachfolgenden systematischen Lösungen eingestiegen. Dies war neben sturem Üben und bedeutungsschweren Anwendungen auch einmal willkommen.

Heinz Böer, Appelhülsen

1

Nachdenken über Zahlenmauern

► Aufgabe

Die drei gesuchten Zahlen sind mit a , b und c benannt, die drei gegebenen Zahlen werden mit d (links unten), e (rechts unten) und f (oben) bezeichnet. Gib zu den folgenden Aussagen jeweils ein Beispiel oder begründe allgemein:

- 1 Bei einer „Additionsmauer“ wie in Runde 1 gibt es eine Lösung für a , auch wenn d und e positiv und f negativ ist.
- 2 Bei einer „Multiplikationsmauer“ wie in Runde 2 gibt es Zahlenkombinationen für d , e und f , für die es keine Lösung für a gibt.
- 3 Es gibt insgesamt 6 verschiedene Mauertypen, die $+$ und $\cdot$ enthalten.
- 4 Bei einer Mauer wie die leichte in Runde 5, bei der $f = d$ ist, benötigt man immer dasselbe a , egal welchen Wert e hat.
- 5 Es gibt drei Mauertypen, die nur $\cdot$ und $+$ enthalten und beliebig viele Werte für a erlauben können.

Anmerkung

Detailliertere Fragestellungen, Lösungen und Tipps zur Bearbeitung finden Sie unter www.mued.de → Aktion WN.

Übersicht

Lineare Gleichungen

Runde 1 leicht, mittel, schwer
Runde 3 leicht
Runde 5 leicht
Runde 6 leicht
Runde 7 leicht, schwer

Rein quadratische Gleichungen

Runde 2 leicht, mittel, schwer
Runde 4 leicht, mittel, schwer
Runde 6 mittel, schwer

Gemischt quadratische Gleichungen

Runde 3 mittel, schwer
Runde 5 mittel, schwer
Runde 7 mittel

Mauerrechnungen

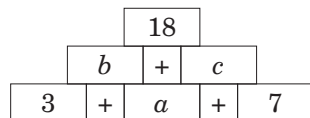
Aufgabe 1

Bestimmt jeweils a , b , c so, dass die Rechenmauer stimmig ist.

Überlegt, wie man durch systematisches Probieren eine Lösung findet.

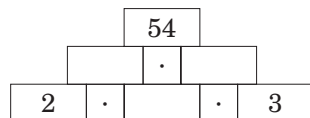
Leicht

1.



$$a = 4 \quad b = 7 \quad c = 11$$

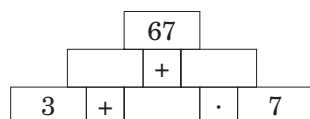
2.



$$a = 3 \quad b = 6 \quad c = 9$$

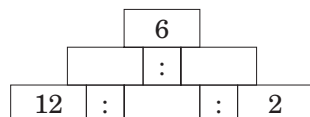
$$a = -3 \quad b = -6 \quad c = -9$$

3.



$$a = 8 \quad b = 11 \quad c = 56$$

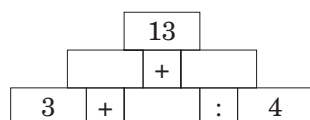
4.



$$a = 2 \quad b = 6 \quad c = 1$$

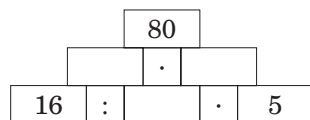
$$a = -2 \quad b = -6 \quad c = -1$$

5.



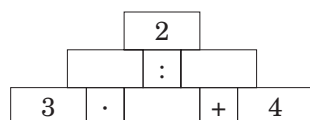
$$a = 8 \quad b = 11 \quad c = 2$$

6.



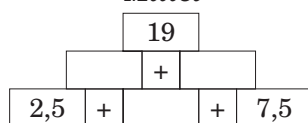
$$a \text{ beliebig} \quad b = \frac{16}{a} \quad c = 5a$$

7.

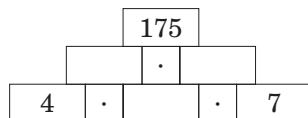


$$a = 8 \quad b = 24 \quad c = 12$$

Mittel

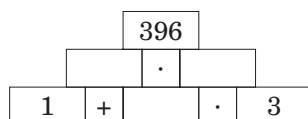


$$a = 4,5 \quad b = 7 \quad c = 12$$



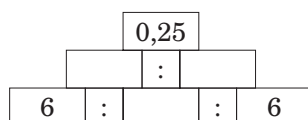
$$a = 2,5 \quad b = 10 \quad c = 17,5$$

$$a = -2,5 \quad b = -10 \quad c = -17,5$$



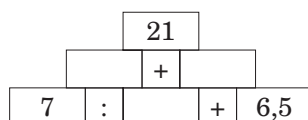
$$a = 11 \quad b = 12 \quad c = 33$$

$$a = -12 \quad b = -11 \quad c = -36$$



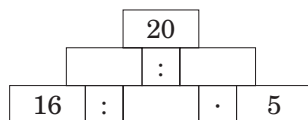
$$a = 12 \quad b = 0,5 \quad c = 2$$

$$a = -12 \quad b = -0,5 \quad c = -2$$



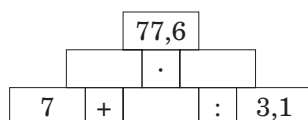
$$a = 0,5 \quad b = 14 \quad c = 7$$

$$a = 14 \quad b = 0,5 \quad c = 20,5$$



$$a = 0,4 \quad b = 40 \quad c = 2$$

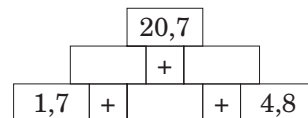
$$a = -0,4 \quad b = -40 \quad c = -2$$



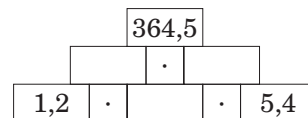
$$a = 12,4 \quad b = 19,4 \quad c = 4$$

$$a = -19,4 \quad b = -12,4 \quad c = -6\frac{8}{31}$$

Schwer

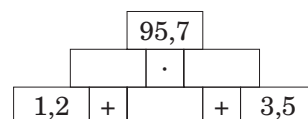


$$a = 7,1 \quad b = 8,8 \quad c = 11,9$$



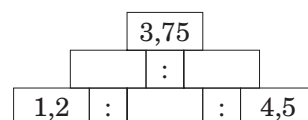
$$a = 7,5 \quad b = 9 \quad c = 40,5$$

$$a = -7,5 \quad b = -9 \quad c = -40,5$$



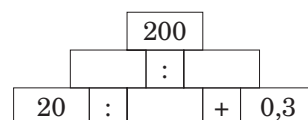
$$a = 7,5 \quad b = 8,7 \quad c = 11$$

$$a = -12,2 \quad b = -11 \quad c = -8,7$$



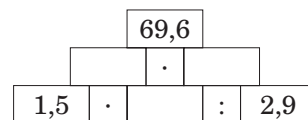
$$a = 1,2 \quad b = 1 \quad c = \frac{4}{15}$$

$$a = -1,2 \quad b = -1 \quad c = -\frac{4}{15}$$



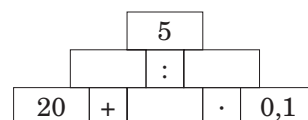
$$a = 0,2 \quad b = 100 \quad c = 0,5$$

$$a = -0,5 \quad b = -40 \quad c = -0,2$$



$$a = 11,6 \quad b = 17,4 \quad c = 4$$

$$a = -11,6 \quad b = -17,4 \quad c = -4$$



$$a = -40 \quad b = -20 \quad c = -4$$

8. Superschwere Aufgabe

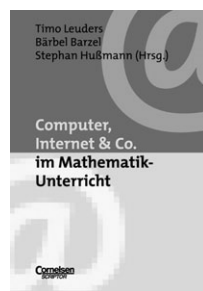
Bilde eine Additionsmauer, die nur Quadratzahlen ($\neq 0$) enthält.

Bestimme durch Gleichungen jeweils alle Lösungen für a .

Aufgabe 2

Bestimme durch Gleichungen jeweils Lösungen für a .

Suche für die „superschwere Aufgabe“ ein Verfahren, um beliebig viele Lösungen zu finden.



**Bärbel Barzel
Stephan Hußmann
Timo Leuders
(Hrsg.):
Computer,
Internet & Co.
im Mathematikunterricht**
Cornelsen Scriptor 2005
269 Seiten, 16,95 EURO
ISBN: 3-589-21850-9

Computer, Internet & Co. im Mathematikunterricht ist ein Praxishandbuch für den sinnvollen Einsatz Neuer Medien im Mathematikunterricht. Die Herausgeber charakterisieren das Buch selber als „Sammlung von Anregungen für die Unterrichtspraxis und die Lehrerausbildung und nicht als Theoriekompendium“ (S. 42). Aber es ist mehr als das, auch wenn der Titel es nicht verrät: es ist ein in konzentrierter Form dargebotenes Handbuch zu den Grundfragen modernen Mathematikunterrichts mit und ohne Computereinsatz.

„Grundfragen“ heißt dann auch der erste Teil des Buches, in dem das Herausgeberteam das Dreieck aus *Mathematik, Lernen und Lehren* und *Computer* aufspannt. Hier wird ein praxisbezogenes Bild eines Unterrichts gezeichnet, der die Prozesse des Lernens in den Vordergrund stellt. Der Computer wird nicht als Allheilmittel erklärt, sondern es wird zum kritischen und gezielten Umgang mit neuen Medien in einem, den Grundsätzen dialogischen Lernens verpflichteten, Unterricht angeregt.

Der zweite (weitaus umfangreichere Teil) „Mathematische Tätigkeiten und Praxisbeispiele“ ist dann entsprechend den im ersten Teil erläuterten Grundlagen nach zentralen Prozessen des mathematischen Lernens gegliedert: *Kommunizieren, Problemlösen, Begriffsbilden*. Dadurch wird zugleich eine Hilfe für die Neuorientierung in den aktuellen kompetenzorientierten Lehrplänen gegeben.

Zu jedem Abschnitt geben die Herausgeber eine prägnant und praxisnah formulierte Einführung, dann folgen konkrete Unterrichtsbeispiele verschiedener Autorinnen und Autoren, in denen auf vielfältige Art und Weise der Einsatz von Computer und Internet gezeigt wird. Dabei werden viele verschiedene Themenbereiche des Mathematikunterrichts berücksichtigt, z. B.: „Aufräumen im Parabelzoo“, „Modelle für die Einkom-

mensteuer untersuchen“, „Was ist ein Mittelpunkt?“, aber auch „Präsentieren mit dem Internet“, um nur einige zu nennen. Die geschilderten Erfahrungen aus dem Unterricht zeigen, dass die vorgeschlagenen Vorgehensweisen praxiserprobt sind, und können auch im Einsatz neuer Medien weniger erfahrene Kolleginnen und Kollegen ermutigen, sich anhand eines der vorgestellten Themen in diesen Bereich vorzuwagen.

Dieses sehr ansprechend geschriebene Buch bietet einen fundierten Überblick über die theoretischen Grundlagen moderner Mathematikdidaktik und eine Fülle an erprobten Unterrichtsbeispielen mit Computereinsatz. Es zeigt deutlich, wie neue Medien in besonderer Weise geeignet sind, mathematische Aktivitäten und Prozesse anzustoßen und es motiviert, seinen eigenen Unterricht aus neuer Perspektive heraus weiter zu entwickeln.

Brigitte Lutz-Westphal



**Siegfried Krauter
Erlebnis
Elementargeometrie**
Ein Arbeitsbuch zum selbstständigen und aktiven Entdecken
Spektrum Akademischer Verlag, München 2005
284 Seiten, 20,00 EURO
ISBN 3-8274-1644-2

Erlebnis Elementargeometrie – ein mutiger Titel in einer Zeit, in der „Action“ und „Hype“ angesagt sind. Gibt es im Geometrieunterricht überhaupt etwas Spannendes oder Abenteuerliches, das es rechtfertigen würde, von einem „Erlebnis“ zu sprechen? Wer ein Auge hat für die Geometrie um uns herum, wer sich auf geometrische Fragestellungen einlässt und Hypothesen überprüft, wird durchaus Überraschendes entdecken. Das explizit formulierte Anliegen von Siegfried Krauter ist es denn auch, die Geometrie nicht als fertige Wissenschaft zu präsentieren, sondern anhand eigener Erfahrungen allmählich entstehen zu lassen.

Diesen Weg geht er konsequent, indem er sich nicht an der mathematischen Systematik, sondern an elementaren Erfahrungen der Lernenden orientiert. Die einzelnen Abschnitte werden mit einfachen Beobachtungen bzw. Fragestellungen eingeleitet und mit vielfältigen Aufga-

benstellungen begleitet. Dieses Buch will nicht gelesen, sondern „erarbeitet“ werden. Damit das eigene Erarbeiten nicht zu schwer fällt, sind am Ende eines jeden Kapitels Hinweise und Lösungen zu den gestellten Aufgaben eingefügt.

Der erste Teil beschränkt sich auf die Inhalte der Kongruenzgeometrie: Nach einem einführenden Kapitel über die zeichnerische Darstellung von Körpern werden gleich die Kongruenzabbildungen der Ebene bis hin zur Kongruenzgruppe und zu Symmetriegruppen dargestellt. Dieser Einstieg mag etwas ungewohnt scheinen, er zeigt jedoch seine Vorteile beim Begründen der folgenden Sätze, die nun nicht streng euklidisch-axiomatisch bewiesen sondern unter Verweis auf die Invarianten der Kongruenzabbildungen bzw. auf Symmetrieeigenschaften anschaulich begründet werden. Bereits im folgenden Kapitel „Figuren in der Ebene und im Raum“ wird davon ausgiebig Gebrauch gemacht. Zwei Kapitel über Flächen- und Rauminhalte schließen den ersten Teil ab.

Der zweite Teil widmet sich der Ähnlichkeitsgeometrie. Seine Kapitel beschäftigen sich mit dem Projektions- und Strahlensatz, Teilverhältnissen, der zentrischen Streckung, Ähnlichkeitsabbildungen und Ähnlichkeitsbeziehungen. Ein Überblick über die affine und die projektive Geometrie rundet diesen Teil ab. Die vielfältigen Aufgaben zur Erarbeitung und einführenden Beispielen, welche ganz alltägliche Phänomene aufgreifen und einer systematischen Betrachtung unterziehen, geben schöne Anregungen für den Unterricht. Der Anhang enthält eine umfangreiche Aufgabensammlung zu allen Themen des Buches und eine Anleitung zum Einsatz dynamischer Geometriesysteme.

Insgesamt behandelt das Buch umfassend die Themen der Elementargeometrie. Für den Lernenden – Adressaten sind in erster Linie Lehramtsstudierende – erschließen sich deren Inhalte durch selbstständiges und aktives Entdecken. Für den Kenner kann das Buch aufgrund seines differenzierten Inhaltsverzeichnisses und seines Index als Nachschlagewerk dienen und den Lehrenden unterstützt es mit vielfältigen methodischen Anregungen für Unterricht und Lehre.

Helmut Albrecht



Back



Forward



Reload



Home



Search



Netscape



Images



Print



Security



Stop

LESEZEICHEN

Multimediale Lernumgebungen

<http://did.mat.uni-bayreuth.de/mmlu/start.html>

Mit dem Computer haben unsere Schülerinnen und Schüler viele Erfahrungen – sie tauchen ein in die Welt der Chatrooms und der virtuellen Realitäten. Die Möglichkeiten des Rechners können auch für den Mathematikunterricht genutzt werden, wie die hier vorgestellten multimedialen Lernumgebungen zeigen. Die Seiten wurden vom Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik der Universität Bayreuth entwickelt. Grundlage ist das dort entwickelte Dynamische Geometrie-System Geonet, ein Vorläufer von Geonext.

Auf der Startseite finden Sie acht interaktive Lernumgebungen zu meist geometrischen Themen wie dem Satz des Pythagoras oder zu besonderen Punkten im Dreieck. Sie eignen sich zur selbstständigen Erarbeitung, zur Wiederholung oder auch zu Demonstrationszwecken. Im Vordergrund steht das Ziel: „Weg vom bloßen Konstruieren geometrischer Figuren, hin zum Arbeiten mit Figuren.“ Weitere Lernumgebungen basierend auf Geonext finden Sie unter <http://geonext.uni-bayreuth.de/> → Beispiele

Einsatz im Unterricht

Der Einsatz der multimedialen Lernumgebungen ist aus folgenden Gründen empfehlenswert: Die Schülerinnen und Schüler sind aufgefordert, aktiv zu werden, selbstständig und im eigenen Arbeitstempo vorzugehen sowie experimentell zu arbeiten. Dabei soll ihre Neugierde geweckt werden und sie sollen durch die Dyna-

mik der geometrischen Konstruktionen und Darstellungen zu neuen Sichtweisen gelangen.

Die im Folgenden vorgestellten Lernumgebungen können weitgehend ohne vertiefte Vorkenntnisse eingesetzt werden und lassen sich gut in einzelne Sequenzen zerlegen. So können sie z.B. in Partnerarbeit arbeitsteilig erarbeitet werden. Sie können die Einheiten auch beim Stationenlernen an Notebooks oder als Hausaufgabe zur Wiederholung von Inhalten einsetzen.

Der goldene Schnitt

<http://did.mat.uni-bayreuth.de/mmlu/goldenerschnitt.html>

Mit einem Klick auf „Lernumgebung starten“ landen die Schülerinnen und Schüler in dem anschaulich und reichhaltig aufbereiteten Themenkreis rund um den goldenen Schnitt (vgl. Abb. 1). Motivierend wirken die die comicartigen Darstellung (zum Teil mit Animationen).

Unter „Der goldene Schnitt“ wird zunächst inhaltlich beschrieben, was grundsätzlich unter dem goldenen Schnitt zu verstehen ist und einiges zur Geschichte erzählt. Im nächsten Schritt erfahren die Lernenden, wie der goldene Schnitt konstruiert wird und können dies auch interaktiv nachvollziehen. Hier bleibt die Lernumgebung jedoch nicht stehen. Man kann eine „Überprüfung“ des Sachverhalts vornehmen, wozu u.a. ein Online-Rechner zur Verfügung gestellt wird. Anschließend wird aber auch der algebraisch anspruchsvolle

Beweis geführt. Zum Abschluss der Einheit finden sich viele Beispiele und Abbildungen, die illustrieren, wo der goldene Schnitt in der Natur und der Kunst auftaucht.

Achsenspiegelung

<http://did.mat.uni-bayreuth.de/mmlu/achsenspiegelung.html>

Beginnend mit einfachen Aufgaben („Schreibe das Wort HALLO“) versucht diese Lernumgebung den Schülerinnen und Schülern die Achsenspiegelung und die Achsensymmetrie auf interaktivem Wege näher zu bringen (Abb. 2). Oftmals ist dabei ein experimentelles Vorgehen hilfreich und erwünscht: Die Eigenschaften der Spiegelung und der Symmetrie sollen erst spielerisch entdeckt, dann aber systematisch erarbeitet werden.

Zur selbstständigen Erarbeitung dienen auch Aufgaben, die in der Lernumgebung integriert sind. Zu diesen Aufgaben können Hinweise und Lösungen abgerufen werden. Durch diese Möglichkeit der Selbstkontrolle erhalten die Lernenden wichtige Rückmeldungen.

Markus Mann, Weingarten

Alle hier vorgestellten Materialien finden Sie auch unter <http://www.mathematik-lehren.de> oder unter <http://mathematik.ph-weingarten.de/publikationen/lesezeichen/>



Abb. 1: Der goldene Schnitt in der Kunst

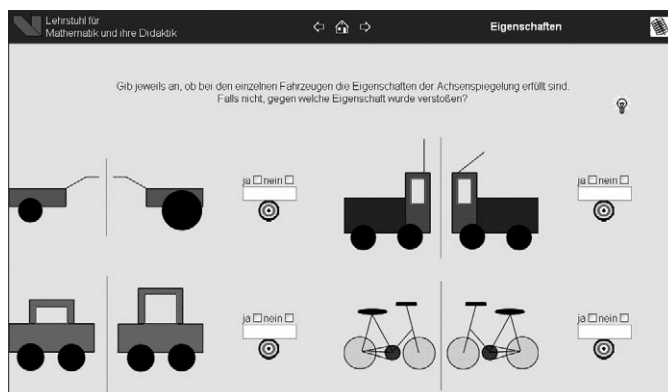


Abb. 2: Aufgabe zur Achsenspiegelung

DIE ETWAS andere AUFGABE

Kluge Erfinder, dumme Nenner und ein wenig zuviel

Wussten Sie, dass viele der Unfälle zu Silvester mit Raketen oder Knallkörpern dadurch passieren, dass nach dem Anzünden das Feuerzeug weggeworfen wird? – Trennen Sie sich also nicht von den falschen Dingen. Auch nicht im Mathematikunterricht. Bleibt nur die Frage, was die falschen Dinge sind. Das ist nicht immer so leicht zu entscheiden wie bei den Silvester-Knallern.

Knapp daneben

Wahlkampf ist die Zeit der schlichten Botschaften. Dabei sind auch die großen Parteien nicht vor den Fußangeln der Prozentrechnung gefeit, entdeckten Ullrich Rauch aus Oetzberg und Friedrich Hattendorf aus Werdohl.

Im deutschen Bundestagswahlkampf kündigte die CDU an, den Mehrwertsteuersatz von derzeit 16% auf 18% zu erhöhen. Die SPD konterte mit dem Wahlkampf-Aufkleber:

**ICH KOSTE
2 % MEHR.**

WENN SIE AM 18.09. CDU/CSU WÄHLEN.

Nein zur Erhöhung der Mehrwertsteuer. SPD.

Werden die Waren wirklich um 2% teurer, wie die SPD behauptet?

Ganz genau genommen beträgt die Verteuerung durch die Erhöhung der Mehrwertsteuer $\frac{118}{116} - 1 = \frac{2}{116} = \frac{1}{58} = 0,724 \dots \%$. Ob der CDU dieser SPD-Rechenfehler aufgefallen ist?

Kreativ

Annelies Paulitsch aus Hamburg hat zweifellos Recht: Kreativ muss man in der Politik schon sein, keine Frage. Krista Sager, Fraktionsvorsitzende Bündnis 90/Die Grünen im deutschen Bundestag, verdanken wir eine interessante Wortschöpfung: Sie bezeichnete eine große Koalition als „dümsten gemeinsamen Nenner“.

Das toppt noch den Ausspruch eines bayerischen Polizisten nach dem Oktoberfest im vergangenen Jahr. Auf die Frage eines Reporters, ob er bei der Sperrstunde nicht mal Fünfe gerade sein lassen könnte, erklärte er großzügig: „Von mir aus würde ich auch Zehne grade sein lassen!“

Immerhin, wenn 10 und 5 gerade sind – wie groß ist dann der dümste gemeinsame Nenner von $\frac{1}{10}$ und $\frac{1}{5}$? Und wie groß der klügste?

Sehr kreativ

Thomas Alva Edison (1847–1931) war ausgesprochen einfallsreich. Als sehr erfinderisch erwiesen sich auch die Gestalter der Website www.kinderlernen-so.de. Unter „Kinder lernen Mathe“ findet sich gleich als Erstes die unten stehende Aufgabe.

Timo Leuders aus Freiburg kommentiert trocken: Wohl dem, der D ankreuzt ...

„Kreativ sein heißt ... neue Wege gehen, quer denken, ... Aha-Erlebnisse haben, sich wundern und staunen ... neugierig sein, entdecken wollen ... sich auf Neues einlassen ...“ – so lese ich an anderer Stelle auf dieser Website. Dem kann ich mich

anschließen; vielem anderen auf dieser Website allerdings nicht.

Sehr ergiebig

Mit dem Dreisatz muss man immer rechnen ... Das stellte auch Achim Bohn aus Offenburg angesichts der folgenden Zeitungsmeldung fest:

DIE GUTE NACHRICHT

Glitzernde Kuhfladen

Wenn eine Kuh Edelsteine frisst, ist dies nicht unbedingt eine gute Nachricht, wenn die Klunker jedoch wieder herauskommen, fällt die Freude umso größer aus. In Indien ist es passiert: Das Tier fraß 1722 Diamanten, die dem Besitzer, einem Händler, zu Boden gefallen waren. Seither versorgt er es mit viel Futter – und bekam auf die Weise bereits 555 der Steine zurück, wie Mohabbatsinh Gohil gestern berichtete. „Bei dem Tempo müsste es weitere 30 Tage dauern, bis ich alle wieder habe.“ Die Kuh ist inzwischen eine Attraktion: Jedes Mal, wenn ein Diamant in einem ihrer Fladen blinkt, bricht eine gespannt wartende Menschenmenge in Jubel aus.

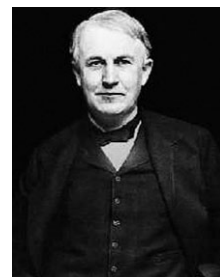
AFP

Wann hat die Kuh die Diamanten gefressen?

Diese Aufgabe zeigt die Grenzen des schlichten Dreisatzes auf und bietet in jedem Fall genügend Anlass zu Diskussionen: Soll man mehr oder weniger füttern? ...

Edison machte über 2100 Erfindungen zwischen 1860 und 1930. Wie viele Erfindungen machte er in sieben Jahren?

- A** 7 Jahre sind der zehnte Teil von 70 Jahren, also nehme ich auch von den 2100 Erfindungen den zehnten Teil: Er machte in 7 Jahren 210 Erfindungen.
- B** 7 Jahre sind siebenmal mehr Erfindungen als in einem Jahr: Also rechne ich 7 mal 30.
- C** 7 Jahre sind der siebte Teil von 70 Jahren, also nehme ich auch von den 2100 Erfindungen den siebten Teil: Er machte in 7 Jahren 300 Erfindungen.



Achim Bohns Kommentar: „Meine Schülerinnen und Schüler hatten auf jeden Fall viel Spaß bei der Lösungssuche.“

Mathe-Meisterschaft

Wenn der Verkauf von Tennisbällen sprunghaft ansteigt und die offizielle Homepage des Airbus A380 plötzlich jede Menge Zugriffe verzeichnet, dann steht das erstens in einem engen Zusammenhang und beweist zweitens, dass deutsche Schülerinnen und Schüler Spaß an der Mathematik haben.

Airbus-Tennis



Wie viele Tennisbälle passen wohl in einen Airbus A380?

Dies war nämlich eine der Fragen der Cornelsen Mathemeisterschaft 2005 – übrigens einheitlich für alle, von Klasse 5 bis Klasse 10! Auch hier war das Interesse groß: Über 20 000 Schülerinnen und Schüler nahmen in fast 5000 Teams die Herausforderung an und setzten sich voller Ideen mit den ungewöhnlichen Fragen auseinander.

Richtige Ergebnisse, kreative Lösungswege und gute Teamarbeit waren gefragt. Bewertet wurden natürlich nicht nur das richtige Ergebnis, sondern auch der Weg zum Ziel und die Präsentation der Lösung. Die Jury war beeindruckt von den vielen cleveren und erstaunlichen Lösungswegen quer durch alle Klassenstufen.

Bretzeli-Prozente

Die Schweizer haben bei TIMSS und PISA bekanntlich gut abgeschnitten. Da bietet es sich an, zu schauen, was man von den Schweizern lernen kann – so dachte auch Friedel Fiedler vom Zentrum für Mathematik in

Wetzlar. Eines aber hat ihn doch ein wenig nachdenklich gestimmt: Das Salzgebäck „Bretzeli“ der Firma Roland aus Murten in der Schweiz gibt es normalerweise in 100-g-Packungen:



Ab und zu gibt es ein Sonderangebot mit diesem Aufdruck:



Und wie viel Bretzeli gibt es darin???



Man kann viel aus Fehlern lernen ... und wie sagte schon Albert Einstein, der Deutsch-Schweizer: „Do not worry about your difficulties in mathematics, I assure you that mine are greater.“

Kalender-Recycling

Beim Umzug gibt es viel zu entdecken – das weiß jetzt auch unsere Redakteurin. Unter anderen längst vergessenen Dingen lag da ihr alter Sprach-Kalender von 2001. „Na, die guten Vorsätze – jeden Tag ein wenig Französisch lernen – haben nicht lange gehalten, jedenfalls bin ich damals nur bis Mitte Februar gekommen.“, so Anne Hilgers. Aber Wegwerfen wollte sie den Kalender nun doch nicht – deshalb:

In welchem Jahr lässt sich der Kalender von 2001 wieder ohne Datums-Wochentags-Verwirrung verwenden, um die guten Vorsätze von damals erneut in die Tat umzusetzen?

Detektive gesucht



*Es gibt nichts Gutes, außer man tut es.
Erich Kästner (1899–1974)*

Vor fast 80 Jahren erschien Erich Kästners „Emil und die Detektive“ als Kinder-Roman. Erinnern Sie sich? Im Berlin der 1920er organisierten der Junge Emil und seine Freunde einen gut funktionierenden Nachrichtendienst, um einen Dieb zu stellen. Kurzum: Gemeinsam ist man stark.

Haben Sie auch eine „etwas andere Aufgabe“? Schreiben Sie mir:

Wilfried Herget
FB Mathematik & Informatik
Universität Halle-Wittenberg
06099 Halle
Die-etwas-andere-Aufgabe@friedrich-verlag.de

Machen Sie mit – danke schön!

W. Herget

DIE ETWAS ANDERE AUFGABE



Jeden Monat eine Herausforderung ...

Wie kann das Interesse an mathematischen Aufgaben geweckt werden, wie neben dem Schulalltag und den neuen Inhalten auch eine fundierte Sicherung von Basiswissen erfolgen? Heinz Klaus Strick aus Leverkusen hat – rechtzeitig zum Jahreswechsel – anregende und produktive Aufgaben zusammengestellt. Entstanden sind zwei Kalender für das Jahr 2006, einer für die Stufen 5-7, einer für die Stufen 8-13. Mit Streichholzschachteln soll beispielsweise im April der Klassenraum der jüngeren ausgefüllt werden. Im Mai erkunden die älteren statt n -Ecken auch einmal n -Runde und denken über Umfang und Flächeninhalt nach (vgl. S. 69).

Das „Problem des Monats“ kann auch über www.landrat-lucas.de eingesehen werden; die Lösungen werden nach Ablauf der Bearbeitungszeit ebenfalls auf dieser Homepage bereitgestellt.

... jeden Tag ein Türchen

Wer nicht bis zum nächsten Jahr warten möchte, kann sich unter

<http://www.mathekalender.de>

jeden Tag mit einer Knobelaufgabe versorgen. Ab dem 1. Dezember 2005 können Schülerinnen und Schüler der Klassen 10 – 13 und Erwachsene täglich ab 18 Uhr ein neues virtuelles Türchen öffnen. Wer die Aufgaben dahinter schnell und richtig löst, kann attraktive Preise gewinnen.

Der mathematische Adventskalender wird vom MATHEON, dem DFG-Forschungszentrum „Mathematik für Schlüsseltechnologien: Modellierung, Simulation und Optimierung realer Prozesse“ betreut. Die Aufgaben lassen wissenschaftliche Mathematik spielerisch entdecken: Ein Frosch wagt nur bestimmte Sprünge zwischen Seerosenblättern und will wissen, auf welchem Blatt er am häufigsten landet. Ein Würfel von fünf Zentimetern Kantenlänge soll mit Laserlicht in kleinere Würfel mit 1, 2, 3 oder 4 Zentimeter Kantenlänge zerschnitten werden – wie viele werden es mindestens? Zusammen mit den ausführlichen Lösungen im Januar 2006 wird auch die Anknüpfung an die moderne Mathematik erklärt.

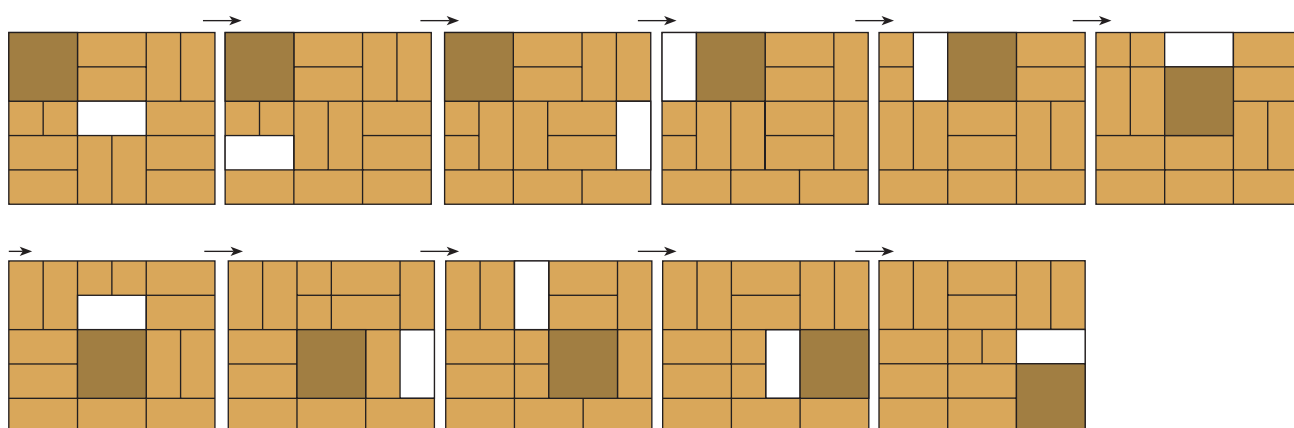
Einen weiteren mathematischen Adventskalender mit interessanten Knobelaufgaben für Schülerinnen und Schüler aller Altersstufen finden Sie beim Mathe-Zirkel unter www.mathe-zirkel.de

Ein Geschenk zum Knobeln

Logikspiele üben auf viele einen besonderen Reiz aus. Warum sollte dies nicht auch mal im Unterricht genutzt werden? Beim Lösen solcher Knobelereien arbeitet man – bewusst oder unbewusst – mit heuristischen Strategien. Dabei trainieren die Schülerinnen und Schüler spielerisch ihre Problemlösekompetenz. Unterhaltungsmathematik ist eben auch Mathematik.

Herr Gorenflo hat dieses Schiebepuzzle gebastelt. Es geht darum, durch geschicktes Verschieben der Spielsteine aus der Grundstellung heraus (s. Foto) den großen quadratischen Stein von links oben in die gegenüberliegende Ecke nach rechts unten zu manövrieren. Diese Art von Spielen ist schon lange bekannt. Bei Schiebepuzzeln wird meist die heuristische Strategie des Vorwärtsarbeitens genutzt. Welche Züge sind möglich – und welche führen in eine Sackgasse? Beim systematischen Probieren merkt man schnell, dass die beiden kleinen Quadrate eine besondere Rolle spielen ...

Lösung zum Schiebispiel



Streichholzschachteln

Schau dir genau an, wie Streichholzschachteln aufgebaut sind. Damit die kleinen Schachteln, in die 38 Streichhölzer gelegt werden, möglichst stabil sind, werden die Seitenflächen auf besondere Weise miteinander verklebt.

Miss die Länge, die Breite und die Höhe einer gewöhnlichen Streichholzschachtel. Zeichne das Netz des Pappstücks, aus dem der innere Teil einer Streichholzschachtel besteht. Wie groß ist die benötigte Pappfläche?

Auch der äußere Teil einer Streichholzschachtel ist aus Pappe hergestellt. Wie viel Pappe wird hierfür verbraucht?

Streichholzschachteln nehmen nicht sehr viel Raum ein. Wie viele könnte man in einem durchschnittlich großen Klassenraum stapeln?

Streichholzschachteln mit 38 Streichhölzern sind nicht besonders schwer. Vergleiche das Gewicht eines Klassenraums voller Streichholzschachteln mit einem geeigneten anderen Körper.



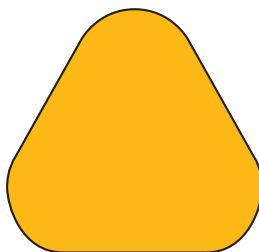
Wie viel Pappe braucht man für die Herstellung eines Klassenraums voller Streichholzschachteln? Vergleiche diese Fläche mit einer geeigneten anderen Fläche.

Regelmäßige n-Runde

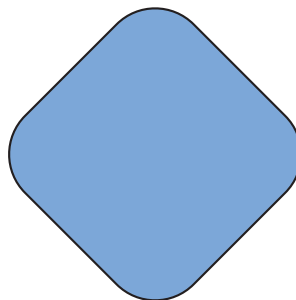
Jeder weiß, was ein n -Eck ist. Hier erfährst du, wie ein regelmäßiges n -Rund (Plural: n -Runde) aussieht. Im Prinzip genauso – nur mit dem kleinen Unterschied, dass die Ecken abgerundet sind. Praktisch geht das so, dass man die Seitenlänge eines n -Runds abträgt, dann schließt man – statt sich um einen Winkel zu drehen – einen Bogen mit gleichem Mittelpunktswinkel an, so dass dann wieder eine „gerade“ Seite angeschlossen werden kann usw.

Beispiel

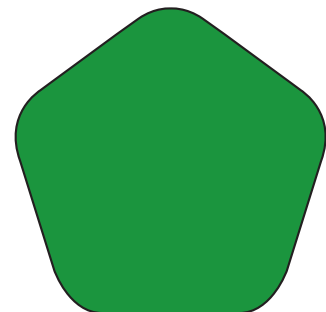
Der Umfang eines 3-Runds setzt sich also zusammen aus drei Seiten und drei 120° -Bögen, deren Radius so groß ist wie die Seite.



3-rund



4-rund



5-rund

Stelle Formeln für die Berechnung des Umfangs und des Flächeninhalts von n -Runden auf.

Wie sehen n -runde Sterne aus?

Klarheit schaffen

Zusammenhänge deutlich machen, Methodenkompetenz vermitteln, Basiswissen und Grundfertigkeiten stärken, Lernerfolge sichern, individuelle Lernwege fördern – Aspekte wie diese werden zukünftig in Ihrem Unterricht eine immer größere Rolle spielen.

Wir sorgen dafür, dass Sie diese neuen Herausforderungen sicher meistern werden. Mit einer Generation komplett neu entwickelter Schulbücher, die Ihnen Orientierung und Unterstützung bieten – sodass Sie sich ganz auf das Wichtigste konzentrieren können: auf die Arbeit mit Ihren Schülerinnen und Schülern.

Mathematik bei Klett: Freuen Sie sich auf die neuen Lehrwerke.

