

AXEL GOY

RGB-Farben

Eine etwas andere Art, Vektoren zu sehen

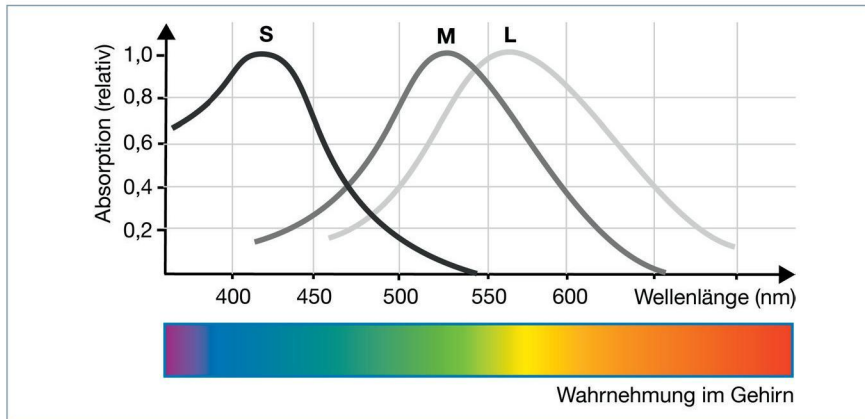


Abb. 1: Drei Arten von Sinneszellen erkennen grünes, rotes und blaues Licht

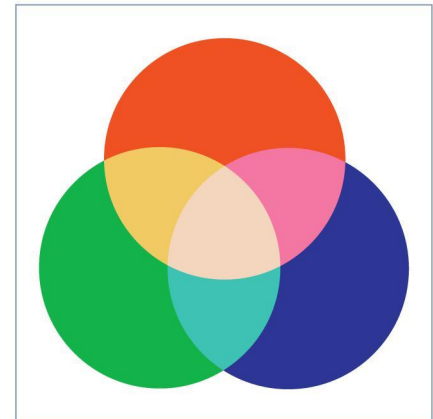


Abb. 2: Modell der additiven Farbmischung

Vektoren werden in der Regel als Pfeile oder Pfeilklassen interpretiert. Man kann Vektoren aber auch einfach „nur“ als n -Tupel reeller Zahlen auffassen. Vektoren sind in diesem Sinne „gebündelte“ Zahlen (Stücklisten, Datensätze ...). Während die Pfeil(klassen)vorstellung also eine geometrische Repräsentation von Vektoren darstellt, interpretiert die Tupelvorstellung Vektoren arithmetisch.

Ein solches Zahlen-„bündel“ ist zunächst einmal abstrakt und mit keinerlei Vorstellungen verbunden, es wird erst durch die jeweiligen Kontexte aus seiner Abstraktion herausgelöst. Durch diesen Transformationsprozess werden die Zahlentripel vorstellbar. Hier werden für $n = 3$ Vektoren bzw. die konkreten Zahlentripel jeweils als eine konkrete Farbe visualisiert. Auch mit „Farbvektoren“ kann gerechnet werden.

Farbvektoren

Lichtspektrum und Farben

Der sichtbare Bereich des elektromagnetischen Spektrums umfasst Strahlung mit Wellenlängen λ von ca. 380 nm

(violett) bis ca. 780 nm (rot). Jede Wellenlänge entspricht einer bestimmten (Spektral-)Farbe (Abb. 1), und jeder andere Farbeindruck entspricht einer bestimmten Überlagerung solcher Spektralfarben. Weißes Licht ergibt sich zum Beispiel aus der gleichmäßigen Mischung von Licht in allen Farben des Spektrums.

Das Auge und die Tristimulus-theorie des Farbensehens

Auf der Netzhaut des Auges gibt es vier verschiedene Arten lichtempfindlicher Zellen, von denen drei für das farbige Sehen zuständig sind. Jede dieser drei Sensoren (Synapsen) reagiert auf Licht mit einer bestimmten Wellenlänge λ besonders stark, und auf Licht mit anderen Wellenlängen umso schwächer, je stärker die andere Wellenlänge von λ abweicht. Je nachdem, wie stark die drei verschiedenen Zelltypen vom einfallenden Licht angeregt werden, ergibt sich für uns ein anderer Farbeindruck. Farbe ist also eine (subjektive) Empfindung und als solche immer vom Betrachter abhängig; es gibt also keine Farbe ohne Betrachter. Übrigens: Viele Wirbeltiere und auch Insekten sind Tetrachromanten (*tetra* – vierfach) und

können zum Beispiel über einen UV-Zapfen sehr kurzwelliges ultraviolettes Licht wahrnehmen. Hingegen sind zahlreiche höhere Säugetiere Dichromaten (*di* – zweifach).

RGB-Farbmodell

Man kann sich das Farbsehen also so vorstellen, dass das Auge jede Farbe als einen Vektor

$$\begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix}$$

„interpretiert“, dessen Koordinaten angeben, wie stark jeder der drei Zelltypen von der Farbe angeregt wird; die Koordinaten liegen dabei zwischen 0 (gar keine Anregung) und 1 (maximale Anregung), der erste Eintrag des Vektors steht für den „rot“-Anteil, der zweite für den „grün“- und der dritte für den „blau“-Anteil. Ein Farbreiz wird also durch ein Zahlentripel beschrieben, das die Menge an rotem, grünem und blauem Licht angibt. Computer erzeugen demnach Farben, indem sie rotes, grünes und blaues Licht in genau dem Mischungsverhältnis ausstrahlen, das im Auge des Betrachters den gewünschten Farbeindruck hervorruft.

Das Mischen von Farben (Abb. 2) entspricht der *Linearkombination* von

VEKTOREN EINMAL ANDERS

Wie ein Computer mit Farben rechnet



Wenn wir Farben sehen, erfasst unser Auge elektromagnetische Wellen. Das sichtbare Spektrum umfasst Strahlung mit Wellenlängen λ von ca. 380 nm (violett) bis ca. 780 nm (rot). Jede Wellenlänge entspricht einer bestimmten (Spektral-)Farbe. Das menschliche Auge hat in der Regel drei verschiedene Farbrezeptoren in der Netzhaut. Wir gehören somit zu den *Trichromaten* (griechisch: *tri-* dreifach; *chroma*-Farbe). Jede dieser drei lichtempfindlichen Zellen reagiert auf Licht mit einer bestimmten Wellenlänge λ besonders stark (rot, grün und blau), und auf Licht mit anderen Wellenlängen umso schwächer, je größer die Abweichung von λ ist. Je nachdem, wie stark die drei Zelltypen vom eintreffenden Licht angeregt werden, ergibt sich für uns ein anderer Farbeindruck.

Ein mathematisches Modell für das Farbsehen

Das Auge „interpretiert“ jede Farbe als einen Vektor $\begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix}$, dessen Koordinaten angeben, wie stark jeder der drei Zelltypen (*rot-grün-blau*) angeregt wird; die Koordinaten liegen dabei zwischen 0 (gar keine Anregung) und 1 (maximale Anregung). Computer erzeugen Farben, indem sie rotes, grünes und blaues Licht in genau dem Mischungsverhältnis ausstrahlen, das im Auge des Betrachters den gewünschten Farbeindruck hervorruft. Der Rechner kennt nur die Zustände An (=1) oder aus (=0) und ordnet den Vektoren der Primärfarben 8 Bit zu, so dass jede Primärfarbe $2^8 = 256$ Sättigungswerte annehmen kann.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ entspricht		$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ entspricht		$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ entspricht		$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ entspricht	
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ entspricht		$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ entspricht		$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ entspricht		$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ entspricht	
$\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ entspricht		$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ entspricht		$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ entspricht		$\begin{pmatrix} 0 \\ 1/4 \\ 1 \end{pmatrix}$ entspricht	

1. Bestimmen Sie die resultierende Farbe:

a) $R + G + B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \dots$

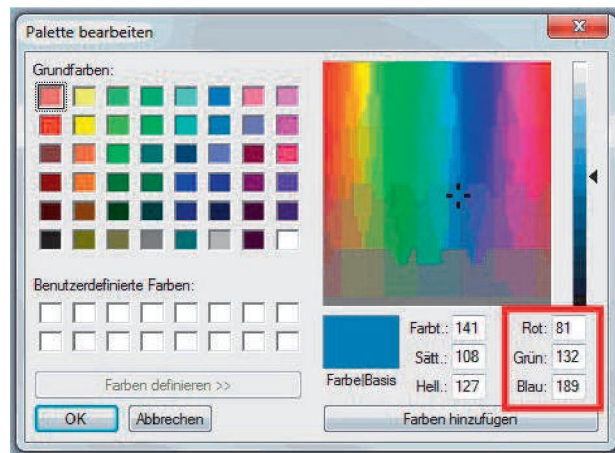
b) $R + G = \dots$

c) $G + B = \dots$

2. Wie viele unterschiedliche Farben kann man aus drei Primärfarben mit jeweils 256 Sättigungsgraden erzeugen?

3. Interpretieren Sie die Abbildung der Farbpalette eines Bildbearbeitungsprogramms auf Basis des eben Dargestellten.

4. Recherchieren Sie, welche anderen Farbsysteme es gibt.



Vektoren (**Arbeitsblatt**). Wenn man dabei nichtnegative Koeffizienten wählt, die sich zu (höchstens) 1 aufaddieren, dann ist gewährleistet, dass der Ergebnisvektor wieder Koordinaten hat, die zwischen 0 und 1 liegen und damit einen gültigen Farbvektor darstellen. Solche Linearkombinationen $a_1 \cdot a_1 + \dots + a_m \cdot a_m$ mit $a_1, \dots, a_m \geq 0$ und $a_1 + \dots + a_m = 1$ nennt man auch *Konvexkombinationen*.

Wir definieren also:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ g_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_2 \\ g_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \min(r_1 + r_2; 1) \\ \min(g_1 + g_2; 1) \\ \min(b_1 + b_2; 1) \end{pmatrix}$$

Man kann sich den „Farbraum“ also als Menge aller Farbvektoren vorstellen, die im dreidimensionalen Anschauungsraum einen RGB-Farbwürfel bilden (**Abb. 3**). Komplementäre Farben entsprechen dabei gegenüberliegenden Punkten des Würfels.

Die Farbvektoren werden im Zuge der digitalen Verarbeitung codiert, das heißt in eine andere Darstellung übersetzt. Im Zuge dessen werden den Vektoren der Primärfarben 8 Bit zugeordnet, so dass jede Primärfarbe $2^8 = 256$ Sättigungswerte annehmen kann. (Ein Computer kann nur mit zwei Zuständen arbeiten: AN oder AUS bzw. 1 oder 0. Diese zwei Zustände bilden einen Bit (engl. *Binary digit*); ein Bit stellt also eine Art Behälter dar, in dem nur eine 1 oder eine 0 abgelegt werden kann.

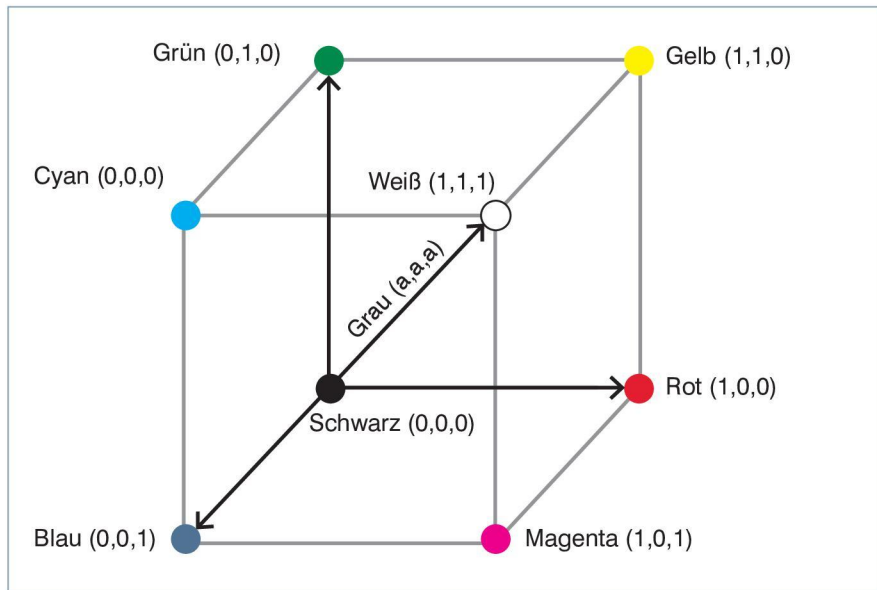


Abb. 3: Im Farbwürfel wird das RGB-Farbsystem mathematisch modelliert

8 Bits ergeben zusammen ein Byte. Da jedes Bit zwei verschiedene Zustände annehmen kann, ergeben sich $2^8 = 256$ Kombinationsmöglichkeiten, wenn Sie 8 Bits zu einem Byte zusammenfassen.)

Verknüpfung zur Physik

Wer hierzu experimentieren möchte, kann sogenannte RGB-LEDs nutzen. Diese Leuchtmittel enthalten drei verschiedene LEDs, die in den Grundfarben Rot, Grün und Blau leuchten. Mit der additiven Farbmischung lässt sich so die in der Veranstaltungstechnik Farbenvielfalt

erzeugen (vgl. <https://www.friedrich-verlag.de/physik/alltag-technik/moderne-rgb-farbmischung-2697>).

Literatur & Lesetipp

- Henn, H.-W./Filler, A. (2015): Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Springer Spektrum.
- Schürmann, U. (2019): Farben und Farbmodelle – analytische Geometrie realitätsbezogen unterrichten. – In: ISTRON, Bd. 6, S. 129–135.
- Oldenburg, R. (2006): Die Mathematik der Bildverarbeitung. – In: Meyer, J./Reinhard, O. (Hrsg.): ISTRON, Bd. 9, S. 23–37. Franzbecker, Hildesheim.
- Goy, A. (2020): mathe.delta BW 11/12 Basisfach. Buchner, Bamberg.
- https://lehrerfortbildung-bw.de/st_digital/m Medienkompetenz/gestaltung-farbe/physik/additiv/addinter/index.html

Buchtipps

Adam Kucharski

Das Gesetz der Ansteckung

Was Pandemien, Börsencrashes und Fake News gemeinsam haben 339 Seiten, 26€, Hirzel Verlag 2020

Wir leben in einer stark vernetzten Welt – diese Tatsache ist uns zwar irgendwie klar, aber selten in all ihrer Komplexität und ihren Konsequenzen bewusst. In seinem gut lesbaren,

populärwissenschaftlichen Buch zeigt Adam Kucharski auf, wie sich nicht nur Krankheiten sondern ebenso Ideen, Falschinformationen, Gewalt, Handys oder Bankpleiten verbreiten – und was man ggf. dagegen tun kann. So fungierte die Pleite der Lehmann Brothers wie ein Superspreader – und nur England führte später ein Trennbankensystem ein. Der Autor – selbst Mathematiker

und Epidemiologe – folgt den Spuren aktueller Wissenschaftsgeschichte. Im Kapitel zur Ereignistheorie folgt er den Berechnungen, die Ronald Ross 1910 zur Übertragung der Malaria als "Moskito-Theorem" veröffentlichte. Wir lernen den Unterschied zwischen "deskriptiven" und "mechanistischen" Modellen kennen: Während erstere Muster in Datensätzen

suchen, geht es bei letzteren darum, grundlegende Mechanismen zu verstehen, diese in Gleichungen abzubilden und zu einem Modell (etwa von Übertragungswegen) zusammenzufassen. Mit diesen lässt sich weiterarbeiten (Was wäre, wenn ...). Es bleibt noch manches zu verstehen und zu tun. Und die Mathematik liefert einige gute Ansätze dazu. Anne Hilgers, Hannover