

DANIEL FROHN, ALEXANDER SALLE

Wie finde ich den richtigen Abstand?

Das Prinzip der Orientierung an Grundvorstellungen

LERNGRUPPE: 10.–12 Schuljahr

IDEE: Das Finden verschiedener Strategien zur Abstandsbestimmung eines Punktes von einer Geraden im Raum fordert und fördert den Aufbau tragfähiger Grundvorstellungen

ARBEITSBLATT 1: Strategien entwickeln – mit Hilfe

MATERIAL: GeoGebra-Dateien zur Veranschaulichung

VORWISSEN: Geraden- und Ebenendarstellungen, Grundvorstellungen zum Skalarprodukt; ggf. Vektorprodukt und Kugelgleichung

ZEITBEDARF: Eine Doppelstunde

Vor einigen Jahren war auf einer Vortragsankündigung mit dem Titel „Analyse verständlich unterrichten“ das Wort „verständlich“ umkreist und handschriftlich dazu notiert: „Wie denn sonst?“ Das Bemühen, den Mathematikunterricht verständlich zu gestalten, sollte in der Tat selbstverständlich sein, denn Verstehen (d. h. sich einen Zusammenhang verständlich machen) ist eine wesentliche mathematische Tätigkeit, und „Verstehen des Verstehbaren ist ein Menschenrecht“ (Wagensein).

Der Mathematikunterricht darf sich nicht auf die Vermittlung von häufig unverstandenen Rezepten und Verfahren beschränken – auch wenn eine solche Fokussierung des Unterrichts auf beherrschbare Algorithmen durchaus nachvollziehbare Gründe hat: Sie bietet eine gewisse Sicherheit darüber, was in Prüfungen gekonnt werden soll und gewährleistet so häufig auch akzeptable Benotungen. Dagegen stellt ein

verstehensorientierter Mathematikunterricht höhere Ansprüche. „Verständnis“ ist auch nicht so einfach zu prüfen; es kann nur langfristig aufgebaut werden und stellt Lernende wie Lehrende vor viele Herausforderungen.

Verstehensorientierung durch Grundvorstellungen

Ein wesentliches mathematikdidaktisches Konzept, welches als Grundlage für einen verstehensorientierten Mathematikunterricht dienen kann, ist das der *Grundvorstellungen*. In **Kasten 1** ist ein Überblick über das Prinzip der Orientierung an Grundvorstellungen dargestellt.

Dieses Prinzip soll im Folgenden am Beispiel der Bestimmung des Abstandes eines Punktes von einer Geraden im Raum verdeutlicht werden.

Die analytische Geometrie in der Oberstufe steht mit ihrem eng umgrenzten Aufgabenkanon (Schnittpunkte, Schnittwinkel und Abstände von Geraden und Ebenen) besonders in der Gefahr, sich als eine reine Ansammlung von Verfahren darzustellen. Abstandsaufgaben gelten zwar als vorstellungsmäßig schwierig, können aber rechnerisch mithilfe von Formelsammlung und Taschenrechner auch vorstellungsfrei gelöst werden.

Mit einer stärkeren Orientierung an Grundvorstellungen wird das Ziel verfolgt, Verständnis für Zusammenhänge zu ermöglichen und die inhaltliche Bedeutung der mathematischen Begriffe in das Zentrum des Unterrichts zu stellen. Dies kann beispielsweise durch das Einbeziehen von Sachkontexten geschehen, um die Fähigkeit zur Anwendung des Abstandskonzeptes auf die Wirklichkeit

zu fördern. In diesem Beitrag verfolgen wir hingegen einen innermathematischen Ansatz, bei dem der Aufbau visueller Repräsentationen, die operatives Handeln auf der Vorstellungsebene ermöglichen, im Vordergrund steht.

Grundvorstellungen zum Abstandsbegriff

Zunächst sind bei einer grundvorstellungsorientierten Behandlung eines mathematischen Inhaltes normativ Grundvorstellungen zu beschreiben. Diese basieren auf Analysen des mathematischen Inhalts unter Einbezug didaktischer Aspekte und anderer relevanter Phänomene. Für den Abstandsbegriff formulieren wir hier die folgenden Grundvorstellungen:

Grundvorstellungen zum Abstandsbegriff

- **GV 1:** Abstand als kürzeste Verbindung
- **GV 2:** Abstand als orthogonale Verbindung
- **GV 3:** Abstand als Radius einer Berührkugel (bzw. Kreis)

GV 1 knüpft an die alltägliche Erfahrung an, dass die kürzeste Verbindung zweier Punkte eine gerade Linie ist. Sobald es aber um den Abstand nicht punktförmiger Objekte geht, muss in der Vorstellung die Gesamtheit aller möglichen Strecken betrachtet werden, die zwei zu den Objekten gehörige Punkte verbindet. Dies macht deutlich, dass in dieser Grundvorstellung auch eine analytische Komponente enthalten sein muss,



Auch eine Abstandsfrage: Wie weit ist der Ball vom Netz entfernt?

1 WISSENSWERT

Orientierung an Grundvorstellungen

Grundvorstellungen verbinden mathematische Inhalte und die individuelle Begriffsbildung (vom Hofe, 1995). Durch Anknüpfung an bekannte Handlungen und Sachverhalte aus Alltag und Mathematik wird den Begriffen Sinn verliehen. Weiterhin erlauben Grundvorstellungen ein flexibles Umgehen mit mathematischen Inhalten „im Kopf“, beispielsweise um zu explorieren, wie sich Veränderungen von Objekten auswirken. Zudem sind Grundvorstellungen für die Übersetzung zwischen verschiedenen mathematischen Darstellungen sowie für den Übergang zwischen Mathematik und lebensweltlich bezogenen Situationen beim Modellieren unerlässlich.

Grundvorstellungsorientierung bedeutet im Wesentlichen dreierlei:

1. Normativer Aspekt: Die grundlegende Strukturierung und Planung des Unterrichts (die Auswahl und Gestaltung von Aufgaben, Kontexten, Beispielen usw.) ist ausgerichtet an den Grundvorstellungen, die für den mathematischen Inhalt relevant sind. In der Literatur wurden für viele Inhaltsbereiche Grundvorstellungen formuliert, die Leitlinien für den Unterricht darstellen. Für die Entwicklung von Grundvorstellungen eines Begriffs ist insbesondere zu berücksichtigen, auf welchen Grundvorstellungen anderer relevanter Begriffe aufgebaut werden kann. Diese gilt es dann ggf. wiederholend aufzugreifen und explizit mit den neuen Objekten und Vorstellungen zu verknüpfen. Zu berücksichtigen ist auch, über welche Vorstellungen die Schülerinnen und Schüler bereits verfügen und inwieweit solche bereits bestehenden Grundvorstellungen erweitert werden müssen.

2. Deskriptiver Aspekt: Im Unterricht ermöglichen Aufgaben, Aufträge oder andere Maßnahmen eine Diagnose individueller Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler. Bei der Bewertung diagnostischer Ergebnisse ist dabei eine zentrale Frage, inwieweit sich zentrale Grundvorstellungen in den individuellen Vorstellungen wiederfinden.

3. Konstruktiver Aspekt: Die individuellen Vorstellungen werden schließlich mit den normativ gewonnenen Grundvorstellungen verglichen. Die festgestellten Abweichungen ermöglichen das Eingehen auf individuelle Vorstellungsdefizite, eine entsprechende Anpassung des Unterrichts und die Ausgestaltung individueller Förderangebote für Schülerinnen und Schüler.

Bei allen drei Aspekten sollten stets die oben genannten Merkmale berücksichtigt werden: Anknüpfungen ermöglichen, immer wieder flexibles (auch teils angeleitetes und unterstütztes) Operieren im Kopf einfordern und Übersetzungsprozesse sowie Anwendungskontexte in Aufgaben thematisieren.

mittels derer eine Minimierung der Längen aller möglichen Verbindungsstrecken vorgenommen werden kann.

Auch bei GV 2 (Abstand als orthogonale Verbindung) kann an bekannte Sachzusammenhänge angeknüpft werden: Will man zum Beispiel die Höhe eines Raumes messen, so sollte der Meterstab senkrecht zu Boden und Decke gehalten werden. Für nicht lineare mathematische Figuren oder Körper umfasst diese geometrische Grundvorstellung aber noch mehr: Beispielsweise ist beim Abstand eines Punktes von einem Kreis die Orthogonalität zu einer Kreistangente zu berücksichtigen.

Zwischen GV 1 und GV 2 besteht eine enge Beziehung: Vergleicht man etwa eine orthogonale und eine weitere Verbindungsstrecke eines Punktes zu einer Geraden, so kann man anhand des entstandenen rechtwinkligen Dreiecks erkennen, dass sich die orthogonale und die kürzeste Verbindung entsprechen müssen. Dennoch sollten diese Grundvorstellungen unterschieden werden: Bei GV 1 handelt es sich um eine Vorstellung, die auch an analytische Sachverhalte anknüpft, während dies bei GV 2 rein geometrische Zusammenhänge sind. GV1 ist auch dann noch tragfähig, wenn die geometrisch orientierte Vorstellung GV2 nicht mehr weiterhilft (man denke an den Fall, wenn die kürzeste Verbindung von einem Punkt zu einem Dreieck zu einem Eckpunkt führt).

GV 3 (Abstand als Radius einer Berührungskugel) beruht auf der Charakterisierung einer Kugel bzw. eines Kreises als Menge aller Punkte, die vom Mittelpunkt den gleichen Abstand haben. Wenn nun die Kugel von einem festen Punkt aus so weit vergrößert wird, bis sie das andere Objekt berührt, gibt

der Radius den (kürzesten) Abstand an. Hier wird eine enge Verbindung zu GV 1 deutlich; allerdings ist GV 3 nicht so weitreichend, da sie nur dann geeignet ist, wenn der Abstand von einem festen Punkt aus bestimmt werden kann.

Der Aufbau dieser Grundvorstellungen zum Abstandsbegriff muss im Mathematikunterricht langfristig angelegt werden. Die Entwicklung beginnt in unteren Jahrgangsstufen mit Aktivitäten zum Messen von Abständen in verschiedenen Kontexten, wird in der Sekundarstufe 1 über die Einführung von Koordinaten und über die rechnerische Bestimmung in der ebenen Geometrie fortgeführt und sollte in der Oberstufe im Kontext der Abstandsaufgaben bei der Vektorrechnung weiter vertieft werden.

Strategien zur Abstandsbestimmung Punkt-Gerade

Die Unterrichtsidee, mit der das Prinzip der Orientierung an Grundvorstellungen verdeutlicht werden soll, basiert auf der Beobachtung, dass es eine Vielzahl von unterschiedlichen Möglichkeiten gibt, wie man bei der Bestimmung des Abstandes eines Punktes zu einer Geraden im Raum mit vektoriellen Methoden vorgehen kann. Ein Überblick über die verschiedenen Vorgehensweisen und die damit zusammenhängenden Grundvorstellungen ist in **Tab. 1** zu finden (vgl. auch die Hilfestellungen auf dem **Arbeitsblatt**).

Die Schülerinnen und Schüler sollten bei der Bearbeitung der Aufgaben auf dem **Arbeitsblatt** bereits über eine solide Basis in der analytischen Geometrie verfügen, etwa sollten sie Vorkenntnisse zu Geraden und Ebenen und Grundvorstellungen zum Skalarprodukt besitzen (vgl. Frohn 2020). Manche der aufgeführten Vorgehensweisen bauen auch auf Kenntnissen zum Vektorprodukt und zu Kugelgleichungen auf. Diese sind jedoch nicht unbedingt notwendig; das Ziel der unterrichtlichen Umsetzung ist die Erarbeitung und der Vergleich mehrerer (aber nicht aller) der skizzierten Strategien.

Die Erarbeitung einer Strategie wird mithilfe von drei Teilaufgaben angeleitet. In Teil a) können in einer Gruppe zunächst (auch bruchstückhafte) Ideen zusammengetragen werden, die in der

Folge zu schlüssigen Vorgehensweisen zusammengefasst und in Teil b) explizit beschrieben werden sollen. Dazu brauchen manche Gruppen sicherlich Unterstützung, die zum Beispiel durch ausgeschnittene Hilfekarten (unten auf dem Arbeitsblatt) erfolgen kann. Als Alternative zu der freien Vorgehensweise, in der jede Gruppe selbstständig eine eigene Strategie entwickeln soll, kann die Aufgabe auch so durchgeführt werden, dass einzelnen Gruppen direkt die Hilfekarten zugeordnet werden. Aufgabenteil c) hat die unterstützende Funktion, die erarbeitete Strategie an einem vorgegebenen Beispiel rechnerisch anzuwenden und zu prüfen. In einer abschließenden Präsentations- und Reflexionsphase können nun die unterschiedlichen Strategien verglichen werden.

Vergleich der Strategien

Allen Strategien ist gemeinsam, dass sich der gesuchte Abstand als Länge des gefundenen kürzesten bzw. orthogonalen Verbindungsvektors vom Punkt zur Geraden ergibt. Wie man zu diesem Vektor kommt, ist jedoch sehr unterschiedlich.

Die Strategien 1 und 2 gehen beide von einem allgemeinen Verbindungsvektor vom Punkt zur Geraden aus. Er enthält demnach einen Parameter, der nun so bestimmt werden kann, dass man den orthogonalen (bei 1) bzw. den kürzesten (bei 2) Verbindungsvektor erhält. Bei 1 wird das Skalarprodukt zum Aufstellen der Orthogonalitätsbedingung verwendet; in der Folge muss lediglich eine lineare Gleichung gelöst werden. Bei 2 dagegen verwendet man eine analytische Methode, da letztendlich das Minimum einer quadratischen Funktion gesucht ist, welche sich durch die quadrierte Länge des allgemeinen Verbindungsvektors ergibt.

Strategie 3 verwendet eine Hilfsebene, die durch den Punkt und orthogonal zur Geraden verläuft. Dazu ist die Normalenform einer Ebene gut geeignet, mithilfe derer nur noch der Schnittpunkt mit der Geraden bestimmt werden muss. Dies ähnelt Strategie 1, da bei beiden das Skalarprodukt und die Lösung einer linearen Gleichung benötigt wird.

Bei Strategie 4 muss hingegen keine Gleichung gelöst werden, sondern der

2 WISSENSWERT

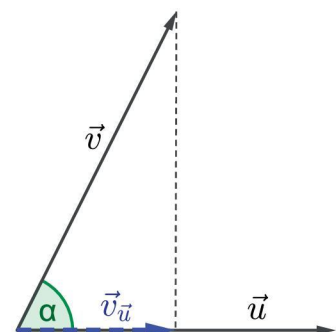
Die Projektionsvorstellung zum Skalarprodukt

Für das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gilt:

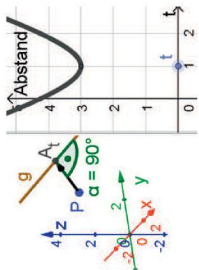
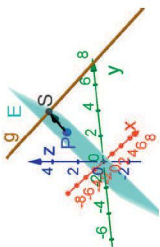
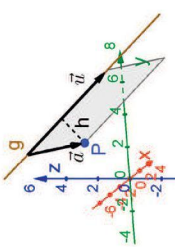
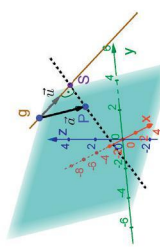
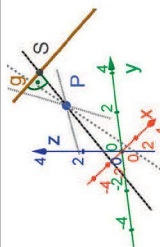
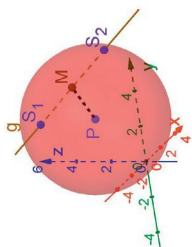
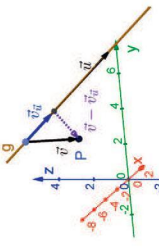
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}_{\vec{u}} = \pm |\vec{u}| \cdot |\vec{v}_{\vec{u}}|.$$

Dabei ist $\vec{v}_{\vec{u}}$ der Projektionsvektor von $\vec{v}$ auf $\vec{u}$, und das positive bzw. negative Vorzeichen gilt für den Fall gleicher bzw. entgegengesetzter Orientierung der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}_{\vec{u}}$.

Mithilfe der Projektionsvorstellung kann das Skalarprodukt als ein (vorzeichenbehaftetes) Produkt von Längen interpretiert werden. Darüber hinaus erkennt man hiermit, dass es beim Skalarprodukt bei festem Vektor $\vec{u}$ nur auf den Projektionsvektor von $\vec{v}$ auf $\vec{u}$ ankommt. Alle Vektoren $\vec{v}$, die den gleichen Projektionsvektor auf $\vec{u}$ haben, haben also auch das gleiche Skalarprodukt mit $\vec{u}$. Diese Grundvorstellung zum Skalarprodukt ermöglicht ein gutes Verständnis der (Hesse'schen) Normalenform einer Ebene, da eine Ebene gerade aus allen Vektoren besteht, die mit dem Normalenvektor das gleiche Skalarprodukt haben.



Abstand wird auf direktem Wege berechnet. Mit dem Betrag des Vektorprodukts kann der Flächeninhalt des Parallelogramms bestimmt werden, das von einem Verbindungsvektor und einem Richtungsvektor der Geraden aufgespannt wird. Der Abstand ergibt sich

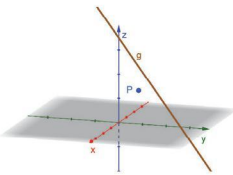
Nr.	Idee	Bild	GV zum Abstand	Bezüge zu weiteren Begriffen und zugehörigen GV
1	Länge des Verbindungsvektors, der orthogonal zur Geraden verläuft		orthogonale Verbindung	Gerade als Punktmenge: Zu jedem Parameterwert gehört ein Punkt Verbindungsvektor als Pfeil mit Länge, Richtung und Orientierung
2	Länge des kürzesten Verbindungsvektors		kürzeste Verbindung	Skalarprodukt: Orthogonalitätsbedingung für zwei Vektoren oder Funktionaler Zusammenhang: Jedem Parameterwert wird die Länge des Verbindungsvektors zugeordnet
3	Normalebene zur Geraden durch den Punkt, Schnittpunkt mit der Geraden		orthogonale Verbindung	Gerade als Punktmenge: Zu jedem Parameterwert gehört ein Punkt Verbindungsvektor als Pfeil mit Länge, Richtung und Orientierung Normalenform einer Ebene: Alle Verbindungsvektoren von zwei Punkten der Ebene sind orthogonal zum Normalenvektor
4	Höhe eines Parallelogrammes, das durch einen Richtungs- und einen Verbindungsvektor aufgespannt wird		orthogonale Verbindung	Richtungsvektor einer Geraden und Verbindungsvektor zweier Punkte als Pfeile mit Länge, Richtung und Orientierung Vektorprodukt: Betrag gibt Flächeninhalt des Parallelogramms an Flächeninhalt Parallelogramm als Produkt von Seitenlänge und Höhe
5	Lotgerade sowohl orthogonal zur Geraden als auch zum Normalenvektor derjenigen Ebene, die Punkt und Gerade enthält		orthogonale Verbindung	Normalenform einer Ebene: Alle Verbindungsvektoren von zwei Punkten der Ebene sind orthogonal zum Normalenvektor Skalar-/Vektorprodukt zur Bestimmung des Normalenvektors Richtungsvektor einer Geraden als Pfeil mit Länge, Richtung und Orientierung
6	Geradenschar durch den Punkt, die orthogonal zur gegebenen Geraden sind; nur eine Gerade der Schar schneidet diese		orthogonale Verbindung	Gerade als Punktmenge: Zu jedem Parameterwert gehört ein Punkt Verbindungsvektor als Pfeil mit Länge, Richtung und Orientierung Skalarprodukt: Orthogonalitätsbedingung für zwei Vektoren
7	Berührungspunkt an die Gerade von einer passend großen Kugel um den Punkt		Radius einer Berührungskugel	Gerade als Punktmenge: Zu jedem Parameterwert gehört ein Punkt Kugel als Menge von Punkten gleichen Abstands zum Mittelpunkt
8	Mittelpunkt der Schnittpunkte von der Geraden mit einer genügend großen Kugel um den Punkt		orthogonale Verbindung	
9	Beliebiger Verbindungsvektor ist Summe von parallelem und orthogonalen Anteil; Berechnung des parallelen und damit dann des orthogonalen Anteils (Gram-Schmidt-Orthogonalisierung)		orthogonale Verbindung	Skalarprodukt: Projektionsvorstellung $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}_{\vec{u}}$ Skalare Multiplikation: $\vec{u}$ wird zu $\vec{v}_{\vec{u}}$ gestaucht/gestreckt: $\vec{v}_{\vec{u}} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \cdot \vec{u}$ Vektoraddition: orthogonaler Verbindungsvektor ist $\vec{v} - \vec{v}_{\vec{u}}$

Tab. 1: Strategien bei der Abstandsbestimmung Punkt-Gerade – Bezug zu Grundvorstellungen (GV)

Abstand eines Punktes von einer Geraden – Strategien gesucht!

Ausgangssituation: Gegeben ist ein Punkt P und eine Gerade g in einem räumlichen Koordinatensystem.

Problem: Wie kann man vorgehen, um den Abstand des Punktes P zur Geraden g zu bestimmen?



Aufgaben

- Sammeln Sie in Ihrer Gruppe Ideen, wie man den Abstand bestimmen könnte. Welche geometrischen Objekte (zum Beispiel Punkt, Vektor, Gerade, Ebene, Dreieck, Viereck, Kugel) können dabei helfen?
- Entwickeln Sie eine Strategie zur Abstandsbestimmung und beschreiben Sie diese Schritt für Schritt.
- Führen Sie die entwickelte Strategie rechnerisch am Beispiel des Punktes $P(1|2|3)$ und der Geraden g durch.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Hilfestellungen (zum Ausschneiden)

Idee: Senkrechte Verbindung - Wähle einen allgemeinen Punkt Q auf g! Er hängt noch von t ab. - Der Verbindungsvektor $\overrightarrow{PQ}$ soll senkrecht zu g sein! - Das Skalarprodukt kann helfen!	Idee: Kürzeste Verbindung - Wähle einen allgemeinen Punkt Q auf g! Er hängt noch von t ab. - Der Verbindungsvektor $\overrightarrow{PQ}$ soll möglichst kurz sein! - Eine quadratische Funktion kann helfen!	Idee: Hilfsebene - Finde die Ebene, die P enthält und senkrecht zu g verläuft! - In dieser Ebene kann ein weiterer Punkt bei der Abstandsbestimmung helfen!
Idee: Höhe im Parallelogramm - Ein Verbindungsvektor von P zu g spannt mit einem Richtungsvektor von g ein Parallelogramm auf. - Hat man den Flächeninhalt und eine Seitenlänge, so kann man die Höhe im Parallelogramm bestimmen! - Das Vektorprodukt kann helfen!	Idee: Normalenvektor - Die Ebene, die P und g enthält, hat einen Normalenvektor. - Ein Verbindungsvektor von P zu g soll senkrecht zu dem Normalenvektor und zu g sein! - Das Skalarprodukt kann helfen!	Idee: Geradenschar - Es gibt eine Schar von unendlich vielen Geraden durch P, die senkrecht zu g verlaufen. - Diejenige Gerade der Schar, die g schneidet, kann bei der Abstandsbestimmung helfen!
Idee: Berührkugel - Finde eine Kugel mit Mittelpunkt P, die g berührt! - Der Radius r dieser Kugel muss so gewählt werden, dass es nur einen Schnittpunkt mit g gibt. - Wissen über quadratische Gleichungen kann helfen!	Idee: Kugelschnittpunkte - Finde eine Kugel mit Mittelpunkt P, die von g in zwei Punkten getroffen wird! - Der Mittelpunkt dieser beiden Punkte kann bei der Abstandsbestimmung helfen!	Idee: Orthogonalisierung - Ein Verbindungsvektor $\vec{v}$ von P zu g kann in einen zu g parallelen und einen zu g orthogonalen Anteil zerlegt werden: $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$ - Ist $\vec{u}$ ein Richtungsvektor von g, so gilt: $\vec{v}_{\parallel} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u}$ - Der Vektor $\vec{v}_{\perp}$ kann bei der Abstandsbestimmung helfen!

© Friedrich-Verlag, Gießen | Fachbereich Mathematik, Winter 2020/2021 zum BEIPFACH S. 32 – 38
Schnitzeljagd: Die Geheimnisse der Mathematik

Gleichung in dem Parameter der Geraden, in der auch noch die Unbekannte r vorkommt. Bei 7 soll diese quadratische Gleichung genau eine Lösung haben, weshalb r so berechnet werden muss, dass die Diskriminante der quadratischen Gleichung gleich 0 ist. Bei 8 dagegen bestimmt man für genügend großes r zwei Schnittpunkte und dann deren Mittelpunkt. Das Vorgehen bei diesen beiden Strategien ist rechnerisch aufwändig, aber dafür einer geometrischen Vorstellung sehr gut zugänglich (besonders bei 7).

Strategie 9 ist für Schülerinnen und Schüler anspruchsvoll. Sie enthält die sehr allgemeine Idee des Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens, das in der Hochschulmathematik vielfältige Anwendungen findet. Zentral hierfür ist eine tieferliegende Grundvorstellung zum Skalarprodukt: die Projektionsvorstellung (vgl. Frohn 2020).

Fazit

Die Vielfalt der möglichen Herangehensweisen zeigt das große Potenzial, das in einer Standardfrage wie der nach dem Abstand von Punkt und Gerade steckt. Es geht nicht nur darum, etwas auszurechnen, sondern die erarbeiteten Begriffe und Methoden aus der vektoriellen Geometrie mithilfe von Grundvorstellungen anzuwenden und zu einer zielführenden Vorgehensweise zu kombinieren. Welche der dargestellten Strategien auch immer thematisiert werden – die Problemstellung ist ein lohnenswertes Beispiel dafür, was einen verstehensorientierten Mathematikunterricht auszeichnet und wie man sich dabei an Grundvorstellungen orientieren kann. Denn schließlich soll Mathematik verständlich unterrichtet werden – wie denn sonst?

Literatur

- Frohn, D. (2020): Mehr als Orthogonalität. Das Skalarprodukt beziehungsreich anwenden – mit Grundvorstellungen. – In: mathematik lehren 218, S. 33–38.
- Malle, G. (2005): Neue Wege in der Vektorgeometrie. – In: mathematik lehren 133, S. 8–14.
- vom Hofe, R. (1995): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Heidelberg u.a.: Spektrum Akademischer Verlag.
- vom Hofe, R. (2003): Grundbildung durch Grundvorstellungen. – In: mathematik lehren 118, S. 4–8.

dann mittels Division des Flächeninhalts durch die Länge des verwendeten Richtungsvektors.

Die Bestimmung einer Lotgeraden in Strategie 5 ist rechnerisch eher umständlich. Für die Lernenden ist es aber häufig naheliegender, die Ebene zu betrachten, in der Punkt und Gerade liegen, anstatt die bei Strategie 3 beschriebene Hilfsebene. Hat man für erstgenannte Ebene etwa die Parameterform bestimmt, so müssen nun zwei Mal orthogonale Vektoren bestimmt werden: Zunächst ein Normalenvektor der Ebene und anschließend ein Richtungsvektor der gesuchten Lotgeraden, die senkrecht zum Normalenvektor und der gegebenen Geraden ist. Eine typische Fehlvorstellung lässt sich hier im

Versuch erkennen, direkt einen „Normalenvektor der Geraden“ zu finden, dessen Richtung ja aber in der Raumgeometrie nicht eindeutig bestimmt ist.

Strategie 6 ist letztlich eine aufwendigere Variante der dritten Strategie. Die Geraden der betreffenden Schar bilden die bei Strategie 3 beschriebene Hilfsebene, und die Parameterdarstellung der Geradenschar lässt sich als Parameterdarstellung dieser Hilfsebene interpretieren.

Ein völlig anderer Ansatz wird bei den Strategien 7 und 8 verfolgt. Zunächst wird eine Kugelgleichung mit dem gegebenen Punkt als Mittelpunkt und einem allgemeinen Radius r aufgestellt. Setzt man die Geradendarstellung dort ein, erhält man eine quadratische