

GUNNAR FRIEGE, DIRK BROCKMANN-BEHNSEN

Pfeil mit Richtung und Betrag

Vektoren im Mathe- und Physikunterricht



LERNGRUPPE:	Sek. I und II in Mathematik und Physik
IDEE:	Den Vektorbegriff verstehen
VORWISSEN:	Vektoren als Elemente der analytischen Geometrie; Vektoren als gerichtete Größen aus der Physik
ZEITBEDARF:	Variabel

Im Mathematikunterricht treten Vektoren als zentrales Element der analytischen Geometrie erstmals in der Oberstufe in Erscheinung. Im Physikunterricht tauchen gerichtete Größen hingegen bereits relativ früh in der Sekundarstufe I auf. Eine Abstimmung der Behandlung der Vektorrechnung im Mathematikunterricht und im Physikunterricht liegt kaum vor. Für den Physikunterricht sind Richtung und Betrag einer vektoriellen Größe oft schon ausreichend. Ausnahme ist hier die *Kraft*, die vor Ende des achten Jahrgangs als erste gerichtete Größe eingeführt wird. (Vektor-)Addition und Zerlegung einer Kraft in Komponenten werden zu diesem Zeitpunkt bereits ebenfalls thematisiert, ohne dass die Grundlagen im Mathematikunterricht dafür gelegt sind. Der Beitrag gibt einen aktuellen Überblick über vektorielle Größen im Unterricht und liefert ein Beispiel konkurrierender Elementarisierungen.

Einleitung

Spätestens seit Galilei gilt die Mathematik als Sprache der Naturwissenschaften. Man unterscheidet zwei Bereiche im Zusammenspiel zwischen Mathematik und Physik: Unter den technischen

Bereich fallen alle rechnerischen und handwerklichen Verfahren, Tätigkeiten des Zeichnens und Konstruierens sowie den Umgang mit technischen Hilfsmitteln. Strukturelle Aspekte sind dagegen alles, was „die Übersetzung zwischen der physikalischen Welt und dem mathematischen Modell sowie die Interpretation mathematischer Strukturen“ betrifft (Pospiech 2016, S. 2 f.). In einem kompetenzorientierten Unterricht sollten beide Bereiche nachhaltig abgebildet werden. Jedoch zeigt die Untersuchung der Physik-Leistungskursklausuren mehrerer Bundesländer aus den Jahren 2006 bis 2009, dass mehr als die Hälfte der zur Aufgabenlösung erforderlichen Operationen mathematische Routinetätigkeiten erfordern, aber nur weniger als ein Viertel die Mathematisierung von Sachverhalten (Schoppmeier u. a. 2021, S. 38). Die beiden oben genannten Bereiche sind in den Klausuren also in sehr unterschiedlichem Maße vertreten.

Die niedersächsischen Sek-II-Kerncurricula sowohl für Mathematik als auch für Physik (Niedersächsisches Kultusministerium, 2018 respektive 2017) weisen im Sinne der winterschen Grunderfahrungen die Fähigkeit zur Mathematisierung von Sachverhalten nicht nur aus innerfachlicher Sicht als wichtiges Bildungsziel aus.

Zwei Vorurteile bezüglich des Verhältnisses zwischen Mathematik- und Physikunterricht werden immer wieder geäußert:

Vorurteil 1: Im Mathematikunterricht werden die mathematischen Inhalte, die auch im Physikunterricht benötigt werden, viel zu spät behandelt. Als Konsequenz werden diese Inhalte im Physikunterricht „crashkursartig“ vorgezogen.

Vorurteil 2: Die von den Physiklehrkräften vorgezogenen mathematischen Inhalte werden nur im Sinne

eines pragmatischen Recheninstrumentariums behandelt. Konsequenz ist, dass diese Form der Behandlung im mathematischen Sinne fachlich oft unzureichend ist.

Letzteres kann als Folge der Behauptung aus Vorurteil 1 angesehen werden und steht in einem engen Zusammenhang mit dem weiter oben beschriebenen Missverhältnis zwischen der Vermittlung mathematischer Routinetätigkeiten und der Mathematisierung von Sachverhalten. Zur Beurteilung von Vorurteil 1 werden in **Abb. 1** inhaltliche Forderungen aus den niedersächsischen Curricula von Mathematik und Physik synoptisch gegenübergestellt. Der Fokus liegt dabei auf physikalischer Seite bei den gerichteten Größen aus dem Bereich der Mechanik. Gegenübergestellt werden die mathematischen Inhalte, die für eine adäquate Behandlung dieser physikalischen Inhalte erforderlich sind. Dies sind im Kern Aspekte aus der Vektorrechnung sowie der Differential- und Integralrechnung. Da die Integralrechnung im niedersächsischen Physik-Curriculum nicht erwähnt wird, erscheint sie auch nicht in **Abb. 1**.

Rückgriff auf funktionale Zusammenhänge

Deutlich wird zunächst, dass die sukzessive Vermittlung zunehmend anspruchsvollerer funktionaler Zusammenhänge zwischen Mathematik und Physik weitgehend synchron verläuft. Im Mathematikunterricht kann daher praktisch durchgehend auf Beispiele für Größenzusammenhänge aus der Physik zurückgegriffen werden.

Im Bereich linearer Zusammenhänge sei hier die elastische Auslenkung einer Feder unter Krafteinwirkung genannt, für quadratische Zusammenhänge die Zunahme der kinetischen

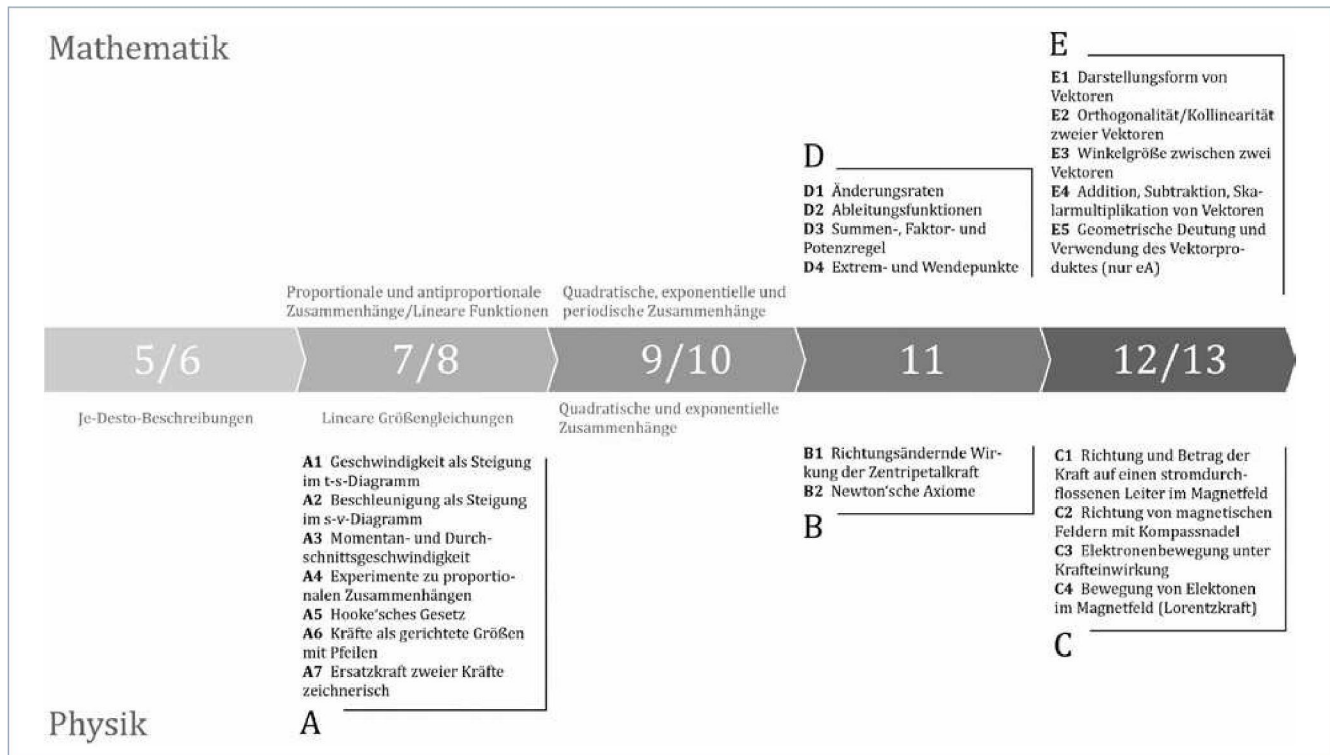


Abb. 1: Gegenüberstellung ausgewählter curricularer Inhalte aus dem thematischen Umfeld gerichteter Größen bzw. Vektoren für die Fächer Mathematik und Physik

Energie mit der Geschwindigkeit und für exponentielle Zusammenhänge das radioaktive Zerfallsgesetz.

Gerichtete Größen und Vektoren

Problematischer stellt sich die Situation im Bereich gerichteter Größen und deren Abhängigkeit voneinander dar. In der Mathematik werden Vektoren erst in der Qualifikationsphase eingeführt. Dabei treten gerichtete Größen in der Physik weit früher auf: die kinematischen Größen Geschwindigkeit und Beschleunigung beispielsweise im Doppeljahrgang 7/8. Mathematiklehrkräfte, die darauf Bezug nehmen möchten, sollten bedenken, dass diese Größen im Physikunterricht der Mittelstufe häufig auf ihren Betrag reduziert oder unzureichend als Quotient aus zurückgelegter Strecke und vergangener Zeit („Durchschnittsgeschwindigkeit“) beziehungsweise als Steigung im s-t-Diagramm (**A1 in Abb. 1**) vereinfacht werden. Den mathematischen Hintergrund von Änderungsraten (**D1**) und Ableitungsfunktionen (**D2**) erfahren

die Lernenden erst drei Jahre nach der vereinfachten Einführung der o. g. Größen im Physikunterricht (siehe Beispiel 2). Noch extremer verhält es sich mit dem Kraftbegriff: Kräfte werden ebenfalls im Doppeljahrgang 7/8 als „gerichtete Größen“ eingeführt (**A6**). Während in der Oberstufenmathematik Vektoren aber als Repräsentanten einer Klasse von Objekten betrachtet werden, wird der „Kraftpfeil“ in der Physik als individueller Repräsentant einer konkreten Kraft angesehen, die auf einen bestimmten Körper wirkt. Dies wird im folgenden Abschnitt genauer erläutert. Bei Berechnungsaufgaben werden die Kräfte auch häufig auf ihren Betrag reduziert. Bei Zeichnungen von „Kräfteparallelogrammen“ wird zeichnerisch die Richtungseigenschaft hervorgehoben und sogar die Addition zweier Kräfte (**A7**) bzw. die Zerlegung einer Kraft in zwei additive Komponenten vorweggenommen. Der tiefere mathematische Hintergrund erfolgt erst ein halbes Jahrzehnt später im Rahmen der Vektorrechnung (Jg. 12/13). Bei guter zeitlicher Abstimmung von Mathematik- und Physik-lehrkraft bestünde für die Lernenden

eines Mathematikurses auf erhöhtem Anforderungsniveau immerhin die Möglichkeit, die Kraftwirkung auf bewegte Elektronen in einem (homogenen) Magnetfeld (**C4**) vor dem Hintergrund des Vektorproduktes (**E5**) zu verstehen (siehe **Abb. 1**).

Beispiel 1: Die Kraft

Die Kraft ist im schulischen Physikunterricht meistens die erste physikalische Größe, die mit Ihren Vektoreigenschaften *Betrag* und *Richtung* ausführlich behandelt wird. Sie wird dabei begrifflich allerdings nicht als Vektor behandelt, sondern als Pfeil mit Richtung und Betrag oder als gerichtete Größe. Hinzu kommt als weiteres Merkmal noch der Angriffspunkt einer Kraft: Üblicherweise wird der Fußpunkt des Kraftpfeils in den Schwerpunkt des Körpers, auf den die Kraft wirkt, gelegt. Damit wird deutlich, dass es sich beim Kraftpfeil um einen konkreten Pfeil, nicht aber um eine Pfeilkategorie handelt. Eine Zusammenstellung von Schwierigkeiten und Fehlvorstellungen, die bei der Vermischung der Konzepte „Vektor“, „Pfeil“ und „Pfeilklassen“ entstehen können, findet sich bei Dilling (2019).

1 WISSENSWERT

Vektoren im Physikunterricht – eine kurze Übersicht

Kraft und Geschwindigkeit sind nur zwei sehr prominente Beispiele für vektorielle Größen der Physik. Weitere vektorielle physikalische Größen sind u. a. Beschleunigung, Impuls, Drehmoment, Drehimpuls, Winkelgeschwindigkeit, elektrische Feldstärke oder magnetische Flussdichte. Der Umgang mit diesen Größen im Unterricht ist sehr unterschiedlich:

Behandlung als Skalar

Viele vektorielle Größen werden vereinfacht wie Skalare behandelt. Da sich beispielsweise die Rotationsachse in den meisten Anwendungen im schulischen Physikunterricht, wie in den gängigen Aufgaben zur Kreisbewegung, nicht ändert, wird meist nur der Betrag der Winkelgeschwindigkeit angegeben und ggf. noch die Rotationsachse benannt.

Behandlung als vektorielle Größe

Elektrische Feldstärke und magnetische Flussdichte werden in der Sekundarstufe II über Kraftwirkungen definiert, wobei die Kraft als vektorielle Größe aus der Sekundarstufe I bekannt ist. Sie werden als Größen mit Betrag und Richtung behandelt.

Vereinfachte Behandlung mit Regeln und Hilfskonstruktionen

Vektorielle Größen wie das Drehmoment oder die Lorentzkraft hängen über das Kreuzprodukt mit anderen vektoriellen Größen zusammen:

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ ($\vec{M}$: Drehmoment, $\vec{r}$: Ortsvektor, $\vec{F}$: Kraft), $\vec{F}_L = q \vec{v} \times \vec{B}$ ($\vec{F}_L$: Lorentzkraft im magnetischen Feld, q : Ladung, $\vec{v}$: Geschwindigkeit der Ladungsträger, $\vec{B}$ magnetische Flussdichte). Da das Kreuzprodukt oft nicht mehr im Mathematikunterricht behandelt wird oder nur in Kursen auf erhöhtem Niveau (Leistungskurse) oder aber die Vektorrechnung zeitlich nicht auf den Physikunterricht abgestimmt ist (siehe **Abb. 1**), werden im Unterricht Vereinfachungen vorgenommen.

So stehen Ortsvektor und Kraft bei der Berechnung eines Drehmoments oder Geschwindigkeit und magnetische Flussdichte oft senkrecht zueinander, sodass sich die Berechnung vereinfacht zu $\vec{M} = r F \vec{e}_M$ bzw. $\vec{F}_L = q v B \vec{e}_{F_L}$ mit Einheitsvektoren senkrecht zu $\vec{r}$ und $\vec{F}$ bzw. $\vec{v}$ und $\vec{B}$. Die Richtung der Einheitsvektoren wird über „(Merk-)Regeln“ bestimmt, wobei es – je nach Konvention – unterschiedliche gibt (Linke-Hand- und Rechte-Hand-Regel). Stehen die Vektoren im Kreuzprodukt nicht senkrecht zueinander, wird mit Wirkungslinien und Projektionen gearbeitet (siehe **Abb. 3**). In die Berechnung geht dann multiplikativ ein trigonometrischer Faktor wie $\sin(\alpha)$ ein. Dabei ist der Winkelbereich bzw. sind in der Berechnung des Betrags bzw. der Interpretation Vorzeichen zu berücksichtigen.

Der Kraftbegriff gilt als einer der schwierigsten Begriffe, u. a. da er sich in vielerlei Hinsicht von der Verwendung des Begriffs Kraft im Alltag unterscheidet. Aus dem Blickwinkel der Physik sind i) Kräfte keine Eigenschaften von Körpern, ii) bedeutet die Wirkung von Kräften nicht Aktivität und iii) ist der Kraftbegriff „symmetrisch“, d. h., „[b]ei Wechselwirkungen sind die gegenseitigen Kräfte immer gleich

groß“ (vgl. Backhaus; zit. nach Lichtenstern / Berge, 2011).

Kraft als Ursache von Bewegungsänderung und Verformung

Der Kraftbegriff wird bereits sehr früh, meist in der 7./8. Klasse eingeführt und ausführlich behandelt (siehe **Abb. 1**). Dabei wird die Kraft an speziellen Beispielen veranschaulicht und anhand ihrer Wirkungen charakterisiert.

Unter anderem können Kräfte Ursache von Bewegungsänderungen und Verformungen sein. Eine zentrale Rolle nimmt in diesem Zusammenhang die Gewichtskraft ein, die den Schülerinnen und Schülern aus deren alltäglicher Erfahrung vertraut ist. Darauf aufbauend werden Abhängigkeiten thematisiert.

Beschwert man eine Spiralfeder beispielsweise mit Massestücken, so verformt die auf die Massestücke wirkende Schwerkraft die Feder. Während die Lernenden die Abhängigkeit der Federauslenkung von der mittels der Massestücke auf sie wirkenden Gewichtskraft untersuchen, erleben sie das erste Mal eine praktische Anwendung des mathematischen Proportionalitätsbegriffes. Im belasteten Ruhezustand der Feder gleichen sich die Gewichtskraft und die Spannkraft der Feder aus. Hier kann erstmals die Gerichtetheit von Kräften anschaulich eingesehen werden.

Der nächste unterrichtliche Schritt besteht in der Konstruktion der „Ersatzkraft“ von zwei oder mehreren Kräften. Diese Addition von Kräften geschieht zeichnerisch oder mit speziellen Lehrmaterialien wie dem Krafttisch (siehe **Abb. 2b**) oder im Hafttafelexperiment. Häufig beschränkt man sich bei jungen Lernenden auf den Spezialfall von zwei senkrecht zueinander stehenden Kräften. Etwas aufwendiger ist die Konstruktion des „Kräfteparallelogramms“ (siehe **Abb. 2c**). Eine formale Kraftaddition im Sinne einer Vektoraddition in einer Koordinatendarstellung der einzelnen Kräfte findet in der Regel nicht statt.

Beispiel 2: Die Geschwindigkeit

Die physikalische Größe der Geschwindigkeit $\vec{v}$ ist als vektorielle Größe über die zeitliche Änderung des Ortsvektors $\vec{r}$ definiert ($\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$). In der Schulphysik wird die Geschwindigkeit in elementarisierte Form noch vor dem Kraftbegriff behandelt (siehe auch **Abb. 1**). Bereits in der 7. und 8. Jahrgangsstufe unterscheidet man in der Regel zwischen Durchschnitts- und Momentangeschwindigkeit und bestimmt für den Fall der gleichförmigen Bewegung den Betrag der Geschwindigkeit grafisch.

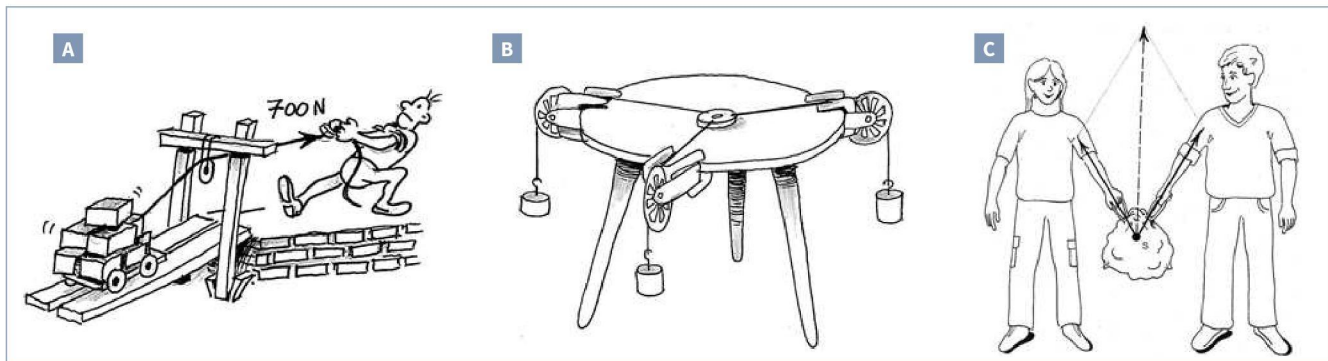


Abb. 2: Behandlung von Facetten der physikalischen Größe Kraft in Lehrmaterialien

Zwei bekannte Zugänge

Speziell für den Geschwindigkeitsbegriff lassen sich zwei bekanntere Zugänge unterscheiden:

1. Über die Behandlung von eindimensionalen Bewegungen: Es wird überwiegend mit skalaren Größen gerechnet und auf die Vektoreigenschaften der Geschwindigkeit weitgehend verzichtet. Charakteristisch hierfür ist der Läufer auf der geraden 100-m-Bahn oder der Zug auf einer geraden Gleisstrecke.
2. Über zweidimensionale Bewegungen von Anfang an: Die Geschwindigkeit wird hier unmittelbar als physikalische Größe mit Betrag und Richtung eingeführt und mittels eines Pfeils veranschaulicht. Charakteristisch für diesen Zugang ist das Auto auf einer kurvenreichen Rundstrecke („Nürburgring“) mit einer Kennzeichnung der Geschwindigkeit als Pfeil.

Beide Zugänge lassen sich physikdidaktisch gut begründen, beide haben allerdings auch ihre Nachteile:

Für den **ersten Zugang** spricht beispielsweise die starke Vereinfachung, die für junge Lernende angemessen erscheint. Als Nachteile werden die Anschlussfähigkeit des derart eingeführten Geschwindigkeitsbegriffs bei der Behandlung von Kreisbewegungen in der 10./11. Klassenstufe und auch begriffliche Schwierigkeiten bei der Unterscheidung der Begriffe Betrag der Geschwindigkeit, Geschwindigkeit, „negative“ Geschwindigkeiten genannt.

Dieser Zugang ist sicher der gängigere im aktuellen Unterricht, wobei oft auch die Vektoreigenschaft der Geschwindigkeit im Unterricht noch „nachgeschoben“ wird.

Der **zweite Zugang** stellt die Geschwindigkeit von Beginn an als vektorielle Größe dar und differenziert insbesondere zwischen Richtung und Betrag (oft auch als Tempo oder Schnelligkeit bezeichnet). Der Zugang über zweidimensionale Bewegungen ist deutlich komplexer als der erste Zugang, jedoch im weiteren Verlauf des Mechanikunterrichts anschlussfähiger. Die Angemessenheit bzw. die Lernwirksamkeit wurde gerade in jüngerer Zeit nachgewiesen (z. B. Wilhelm, 2005).

Dieser Zugang wurde schon von Jung in den 70er-Jahren intensiv untersucht (Jung et al., 1977) und in den 2000er-Jahren erneut aufgegriffen und auch in der Unterrichtspraxis erforscht (z. B. Tobias, 2010).

Geschwindigkeit richtig einbetten

Kritisch sei angemerkt, dass unter Sek-I-Mathematikaufgaben häufig solche der Art

→ „Paul fährt mit dem Zug in 6,5 h von München nach Hamburg (Strecke 860 km). Berechne seine Geschwindigkeit in m/s.“

behandelt werden, und dies sogar noch vor der Behandlung des Geschwindigkeitsbegriffs im Physikunterricht. Es wird hier also ein undifferenzierter Geschwindigkeitsbegriff verwendet bzw. angelegt, da das durchschnittliche Tempo gesucht ist. Neben der bereits angesprochenen häufig nicht vorgenommen Unterscheidung von Geschwindigkeit als Vektor bzw. Pfeil mit Betrag und Richtung und dem Betrag der Geschwindigkeit, besteht bei derartigen Aufgaben aufgrund der mangelnden Einbettung

die Gefahr, dass die Lernenden mit der einzigen Formel für Bewegungsvorgänge $v = s/t$ (bzw. $s = v \cdot t$) die Schule verlassen. Diese Situation bedient ein anderes Vorurteil, nämlich dass im Mathematikunterricht gern physikalische „Beispiele“ verwendet werden, diese aber oft nur Feigenblattkontexte darstellen und die eigentliche Rechenaufgabe „einkleiden“.

Fazit

Die Fachwissenschaften Mathematik und Physik sind eng miteinander verzahnt. Vektoren spielen in den Sachstrukturen beider Wissenschaften eine große Rolle. Dies sollte sich auch in den Sachstrukturen der beiden Unterrichtsfächer abbilden.

Hinderlich scheint dabei zu sein, dass die zur adäquaten Behandlung physikalischer Probleme erforderlichen mathematischen Grundlagen häufig erst sehr viel später oder zu spät im Rahmen des Mathematikunterrichtes behandelt werden (Vorurteil 1). Während gerichtete Größen wie Geschwindigkeit und Kraft im Physikunterricht bereits sehr früh in der Sekundarstufe I, dafür aber auf vergleichsweise schlichtem und pragmatisch orientiertem Niveau eingeführt werden (Vorurteil 2), erfolgt die fachlich fundierte Behandlung von Vektoren im Mathematikunterricht erst im späten Verlauf der gymnasialen Oberstufe.

Ist dies ein grundlegendes Problem für den Physik- oder den Mathematikunterricht?

Vektorielle Größen im Physikunterricht quasiskalar oder als Pfeile mit Betrag

2 WISSENSWERT

Behandlung vektorieller Größen in älteren Physikbüchern der Reihe Dorn (Bader)

a) Merksatz aus einem Schulbuch für die Mittelstufe an Gymnasien sprachlicher Richtung von 1965: „Geschwindigkeit ist wie Kraft und Gewicht ein Vektor.“ (vgl. Dorn 1965)

b) Aus einem Schulbuch 11. Jahrgang für Gymnasien sprachlicher Richtung von 1966:

„Kräfte sind **Vektoren** und werden wie diese addiert; man erhält die **Vektorgleichung** $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Wenn die beiden Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ gleich gerichtet sind, gilt zudem die Betragsgleichung $R = F_1 + F_2$; sonst gilt $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| < |\vec{F}_1| + |\vec{F}_2|$. [$|\vec{F}_1|$ ist der Betrag von F_1 .]“

(vgl. Dorn 1966)

c) Aus einem Schulbuch Oberstufe für Gymnasien naturwissenschaftlicher Richtung von 1968:

„Zeigt der Vektor $\vec{s}$ in Richtung des positiven Stroms und ist $|\vec{s}|$ die Länge des Leiters, so gilt die Vektorgleichung $\vec{F} = I \vec{s} \times \vec{B}$.“

(vgl. Dorn 1968)

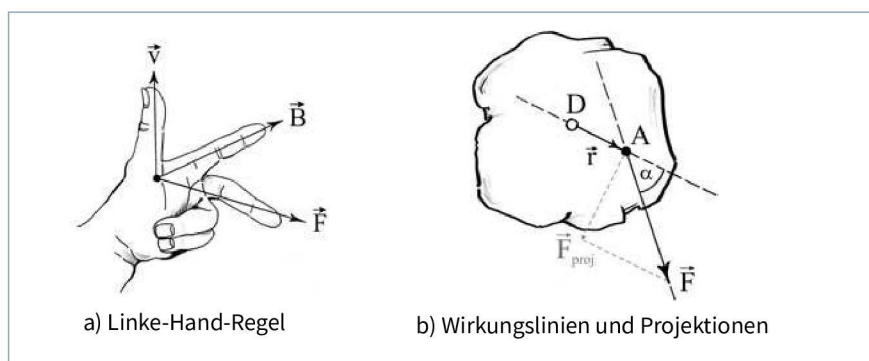


Abb. 3: Die Richtung der Einheitsvektoren wird über „(Merk-)Regeln“ bestimmt, oder es kann (bei nicht senkrechten Vektoren) mit Wirkungslinien und Projektionen gearbeitet werden

und Richtung zu thematisieren, also der pragmatische Zugang ohne vorherige formale Vektorrechnung, erscheint uns als gangbarer Weg, der wenig Konflikte zwischen Mathematik- und Physikunterricht aufwirft. Gerade in der Sekundarstufe I ist dies die angemessene Behandlungsweise. In der Sekundarstufe II hingegen mag gerade auch bei der Verknüpfung vektorieller Größen ein wenig mehr mathematisches Rüstzeug vorteilhaft sein. Seit Langem kann man aber mit der Behandlung von Spezialfällen oder (Hand-)Regeln auch ohne dieses Rüstzeug umgehen (**Abb. 3**).

Trotzdem sind anspruchsvolle Aufgaben beispielsweise zur Berechnung

der Bewegung von Ladungsträgern in elektrischen und magnetischen Feldern möglich. Durchaus lässt sich dies auch aus dem Blickwinkel des Wandels der Kompetenzentwicklung im Physikunterricht verstehen. Vektorprodukte (und weitgehend die Vektorrechnung) entfallen im schulischen Physikunterricht und werden ggf. in der Hochschule ausführlich behandelt, während andere Kompetenzen in den Vordergrund rücken. Ein kurzer historischer Blick zurück am Beispiel eines bekannten und verbreiteten Physikschulbuchs zeigt zumindest, dass der mathematische Formalismus vor 50–60 Jahren deutlich stärker vertreten war (siehe

Kasten 2), die Verwendung des Begriffs Vektor ebenso wenig gescheut wurde wie das Kreuzprodukt als Vektoroperation und beide so in heutigen Auflagen dieses Schulbuchs nicht mehr zu finden sind.

Die Vektorrechnung bzw. die Behandlung von Vektoren im Physikunterricht scheint uns also als ein wenig konfliktreiches Gebiet im Spannungsverhältnis von Mathematik- und Physikunterricht. In anderen Bereichen wie den funktionalen Abhängigkeiten oder dem Umgang mit Variablen mag dies deutlich anders sein.

Literatur

- Dilling, F. (2019). Vektoren in der mathematischen und physikdidaktischen Forschung. Stoffdidaktisch verbindende Ansätze zwischen linearer Algebra und klassischer Mechanik. Phydid B
- Dorn (1965). Physik. Ausgabe für sprachliche Gymnasien, Mittelstufe B, 4. Auflage. Hermann Schroedel Verlag KG, Hannover, S. 63.
- Dorn (1966). Physik. Für Gymnasien sprachlicher Richtung. Oberstufe (11. Schuljahr). Hermann Schroedel Verlag KG, Hannover, S. 13.
- Dorn (1968). Physik. Oberstufe A, 12. Auflage. Hermann Schroedel Verlag KG, Hannover, S. 187.
- Jung, W., Reul, H. & Schwedes, H. (1977). Untersuchung zur Einführung in die Mechanik in den Klasse 3–6. 1. Aufl., Beiträge zur Didaktik und Methodik der Physik. Frankfurt: Diesterweg.
- Lichtenstern, H. & Berge, E.-O. (2011). Kräfte und Bewegungen – Didaktische Hinweise zu zentralen Inhalten des Mechanikunterrichts. Sammelband Mechanik. Seelze: Friedrich Verlag, S. 4–7.
- Niedersächsisches Kultusministerium (Hrsg.) (2015). Kerncurriculum für das Gymnasium. Schuljahrgänge 5–10. Naturwissenschaften. Hannover.
- Niedersächsisches Kultusministerium (Hrsg.) (2017). Kerncurriculum für das Gymnasium – gymnasiale Oberstufe. Physik. Hannover.
- Niedersächsisches Kultusministerium (Hrsg.) (2018). Kerncurriculum für das Gymnasium – gymnasiale Oberstufe. Mathematik. Hannover.
- Pospiech, G. (2016). Mathematik im Physikunterricht: Warum? Wie? Wozu?. In: Pospiech, G. / Karam, R. (Hrsg.): Naturwissenschaften im Unterricht Physik, 27(153/154), S. 2–6
- Schoppmeier, F., Borowski, A., & Fischer, H. E. (2012). Mathematische Bereiche in Leistungskursklausuren. – In: Physik und Didaktik in Schule und Hochschule PhydId 1/11, S. 28–40
- Tobias, V. (2010). Newton'sche Mechanik im Anfangsunterricht: Die Wirksamkeit einer Einführung über die zweidimensionale Kinematik auf das Lehren und Lernen. Berlin: Logos Verlag.
- Wilhelm, Th. (2005). Konzeption und Entwicklung eines Kinematik Dynamik Lehrganges zur Veränderung von Schülervorstellungen dynamisch ikonischer Repräsentationen und graphischer Modellbildung. Berlin: Logos Verlag.