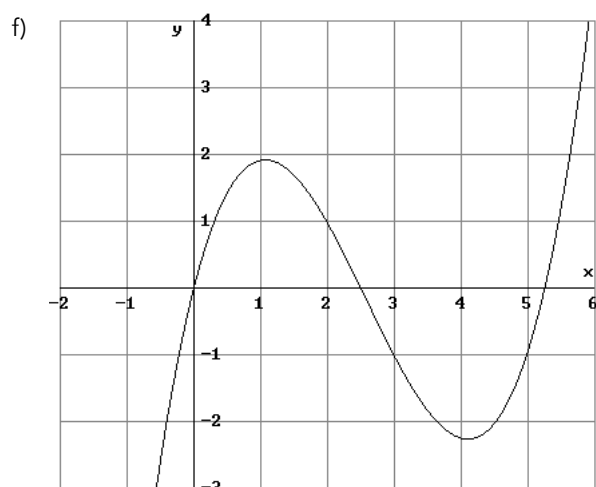
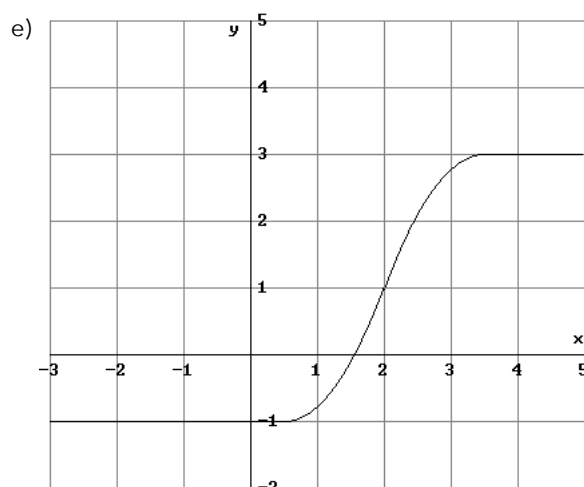
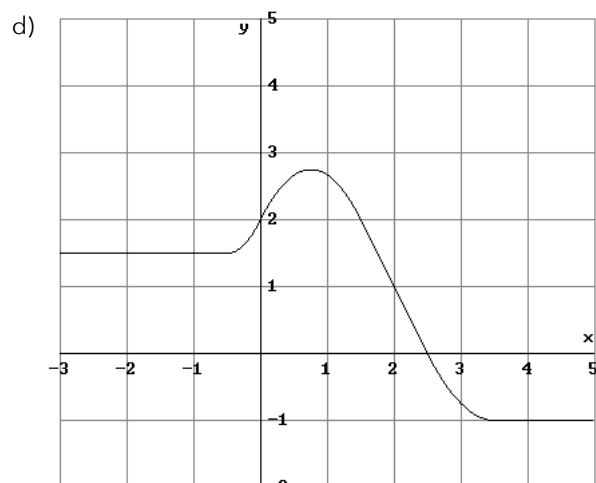
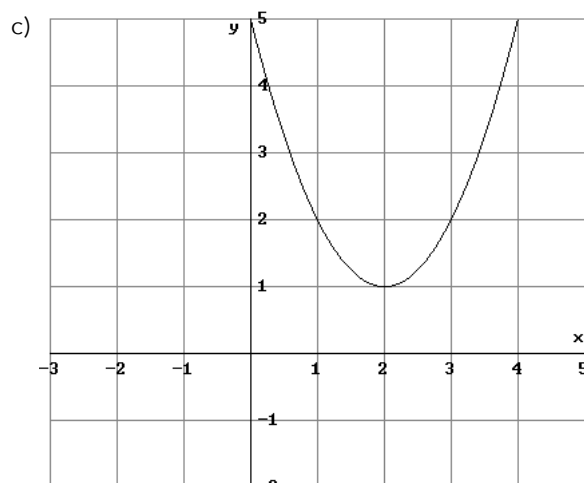
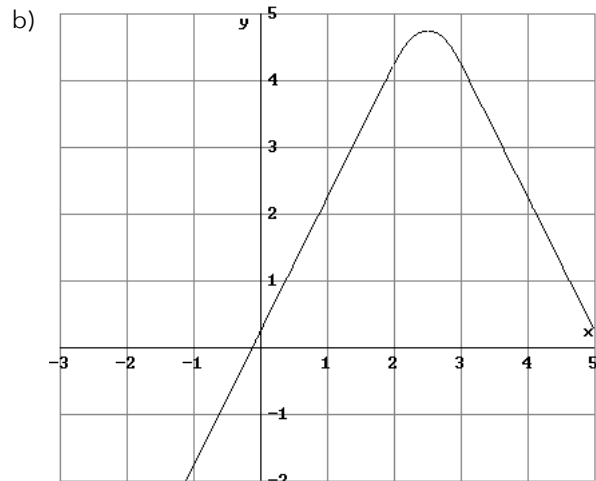
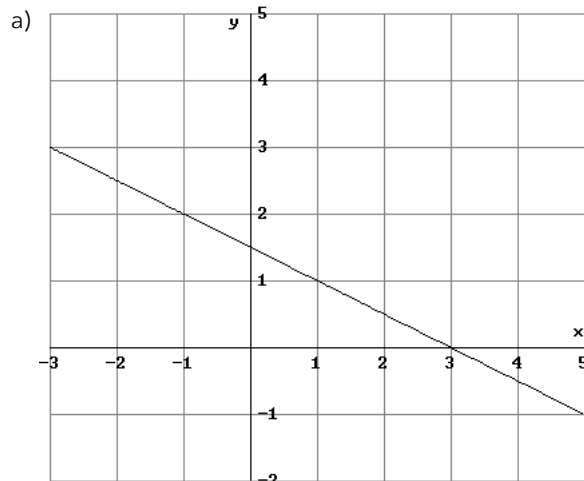


Graphisches ableiten¹

Aufgaben:

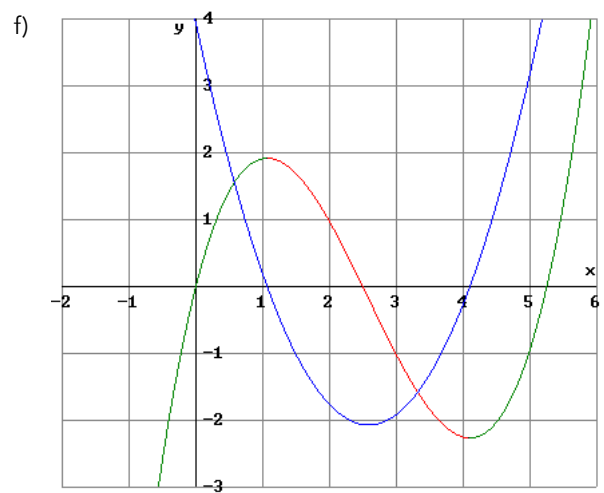
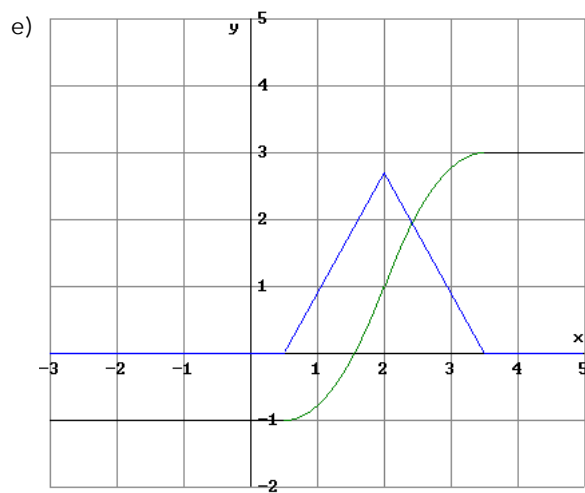
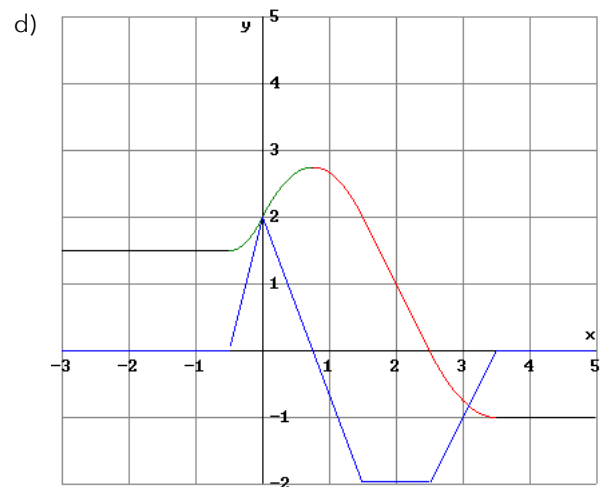
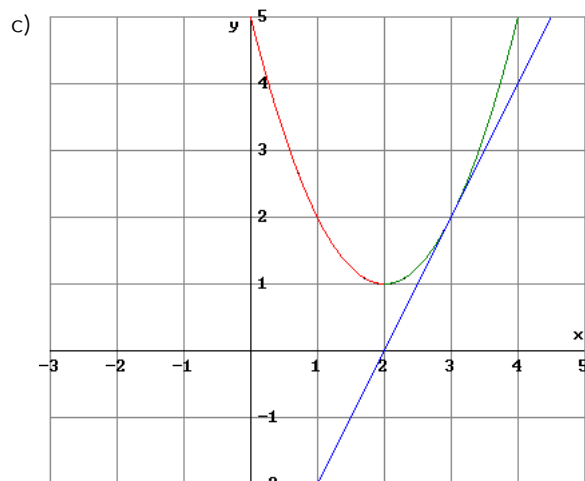
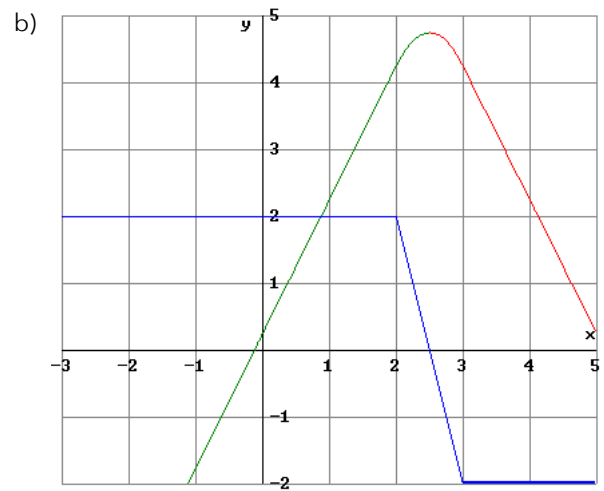
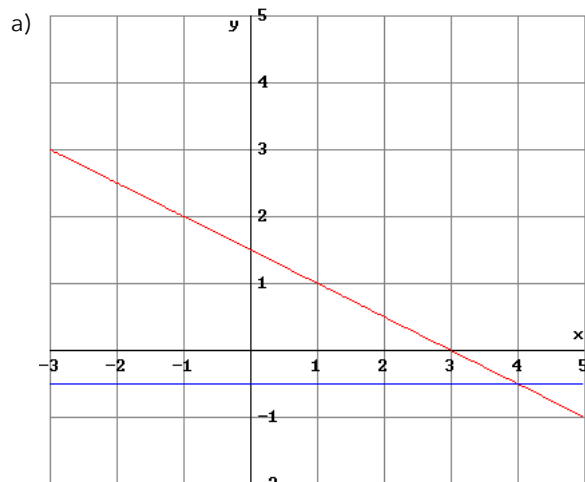
1. Markieren Sie die Abschnitte grün, in denen der Graph steigt und rot diejenigen Abschnitte, in denen der Graph fällt.
2. Konstruieren Sie jew. den Verlauf des Graphen der Ableitungsfunktion möglichst exakt.



¹ Nach: Thomsen, Oliver (IQSH)

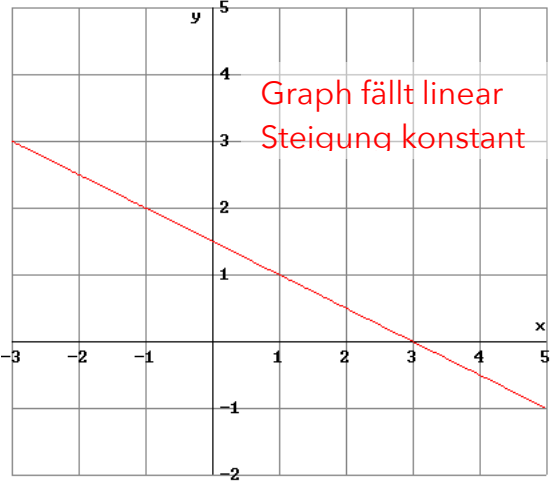
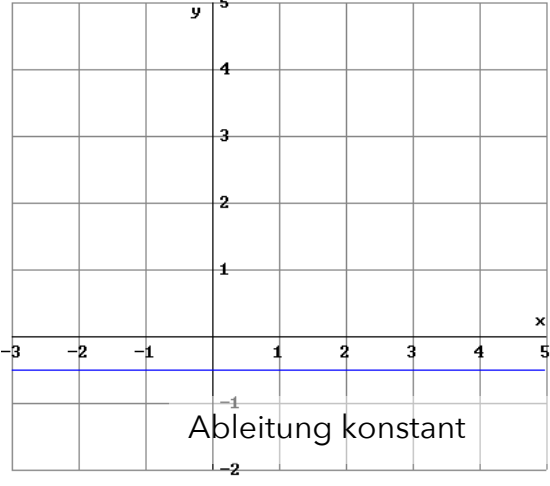
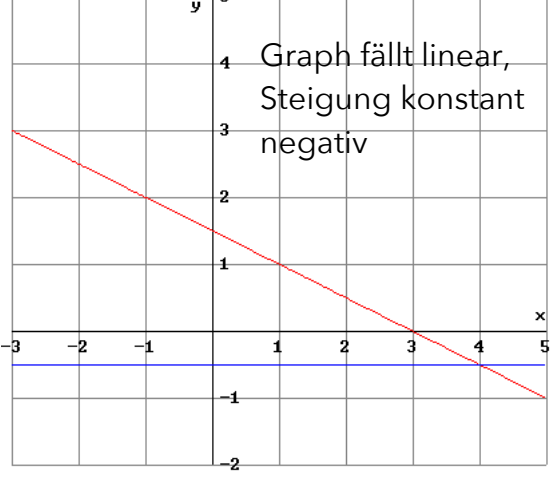
Hinweis: In Bild b) bis d) sind die gekrümmten Teile Parabelabschnitte, in denen sich die Steigung linear ändert.

Lösungen



Kommentierte Lösungen:

a)

 Graph fällt linear Steigung konstant	Die Gerade $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1,5$ hat die konstante „Steigung“ $m = -\frac{1}{2}$ und steigt niemals, sondern fällt. Deshalb wurde der Graph rot eingefärbt.
 Ableitung konstant	Die Ableitung $f'(x) = -\frac{1}{2}$ hat unabhängig von x stets den konstanten Wert $-\frac{1}{2}$. Dieser Wert gibt die Steigung der roten Geraden an.
 Graph fällt linear, Steigung konstant negativ	Die rote Gerade $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1,5$ hat die konstante „Steigung“ $m = -\frac{1}{2}$. Die blaue Ableitung $f'(x) = -\frac{1}{2}$ gibt die Steigung der roten Geraden an. Da die Steigung der roten Geraden konstant ist, hat der blaue Graph einen konstanten Wert.

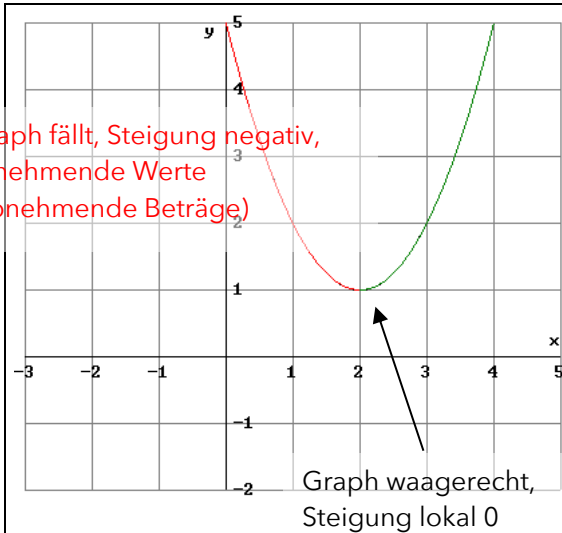
b)

	Der Graph verläuft bis $x = 2$ geradlinig ansteigend und hat die konstante Steigung $m = 2$. Dann schließt sich ein Parabelbogen an, der nach unten geöffnet ist. Bis zum Scheitelpunkt bei $x = 2,5$ ist die Steigung positiv (grün), im Scheitelpunkt ist die Steigung 0. Anschließend ist die Steigung negativ (rot). Im gesamten Verlauf des Parabelbogens nimmt die Steigung linear ab. Ab $x = 3$ verläuft der Graph geradlinig und hat die konstante Steigung $m = -2$.
	Die Ableitungsfunktion hat bis $x = 2$ den konstanten Wert 2, der Graph ist bis dahin ein Stück einer waagerechten Geraden. Dann schließt sich ein linear abnehmendes, also geradlinig fallendes Stück an. Der Wert nimmt gleichmäßig von +2 auf -2 ab. Ab $x = 3$ hat die Ableitungsfunktion den konstanten Wert -2, der Graph ist ab dort ein Stück einer waagerechten Geraden.
	Der Graph steigt bis $x = 2$ linear an mit der Steigung $m = 2$. Die Ableitung hat bis $x = 2$ den konstanten Wert 2. Von $x = 2$ bis $x = 3$ im Parabelbogen nimmt die Steigung gleichmäßig von +2 über 0 auf -2 ab. Die Ableitung nimmt gleichmäßig von +2 auf -2 ab. Ab $x = 3$ ist der Graph ein Geradenstück mit der Steigung -2, der Graph der Ableitung ist ein Stück einer waagerechten Geraden.

c)

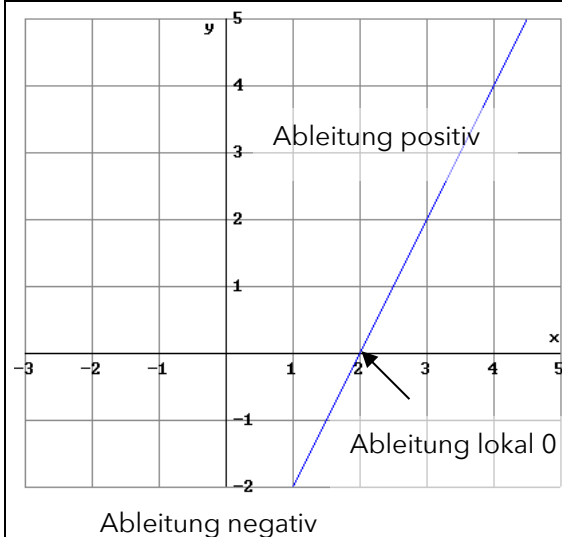
Graph steigt
Steigung positiv,
zunehmende Steigung

Graph fällt, Steigung negativ,
zunehmende Werte
(abnehmende Beträge)



Die Parabel $f(x) = (x - 2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5$ hat im roten Abschnitt negative Steigungswerte. Der Graph fällt zunächst steil, dann weniger steil. Die Steigungswerte sind bis $x = 2$ negativ mit abnehmendem Betrag. Man kann auch sagen, die (negative) Steigung wird größer. Bei $x = 2$ ist die Steigung 0 und nimmt anschließend immer weiter zu. Die Steigung verändert sich linear.

Die Parabel $f(x) = (x - 2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5$ ist seitlich verschoben mit dem Scheitel in $S(+2 | 1)$. Die Tangentensteigung entspricht der einer unverschobenen Normalparabel, nur muss man die Verschiebung der x -Werte um 2 nach rechts berücksichtigen.



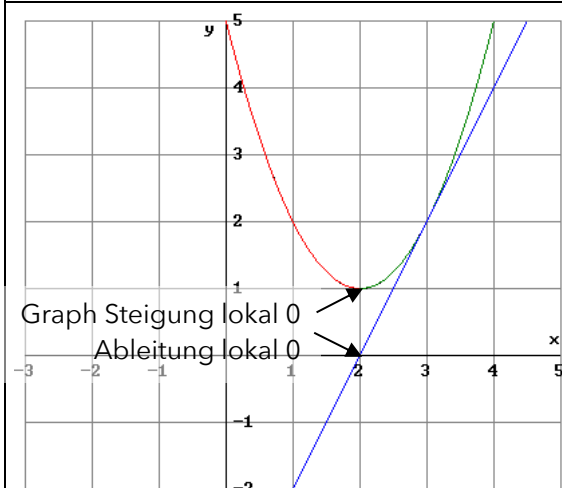
Die Steigung der Parabel $f(x)$ verändert sich linear. Deshalb ist der blaue Graph eine Gerade. Die Steigungswerte der nicht verschobenen Normalparabel x^2 sind:

x	-2	-1	0	1	2
m	-4	-2	0	2	4

Die Steigungswerte sind für $f(x)$ die gleichen wie bei x^2 , nur für den entsprechenden x -Wert 2 weiter rechts.

x	0	1	2	3	4
m	-4	-2	0	2	4

Aus den Werten kann man den Term $2x - 4$ für die Ableitungsfunktion ablesen.

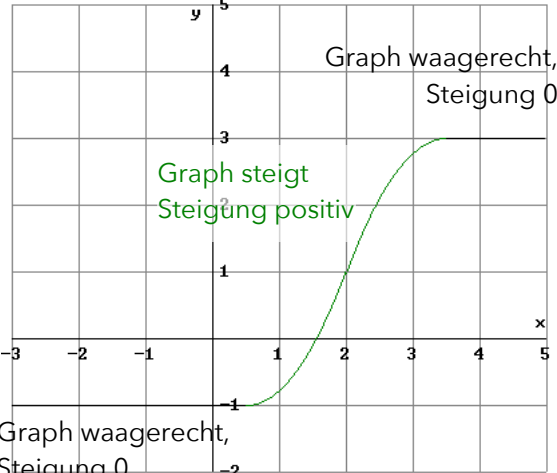
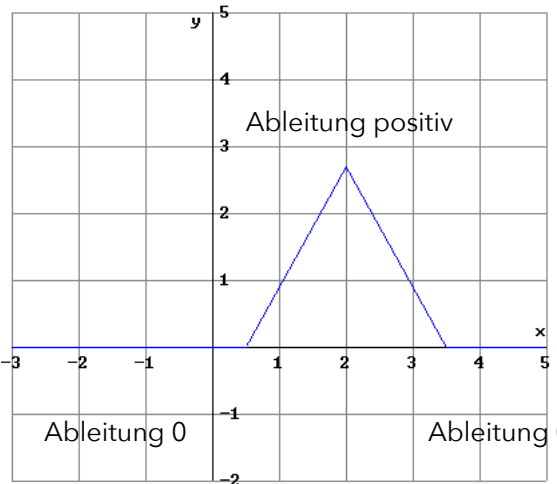
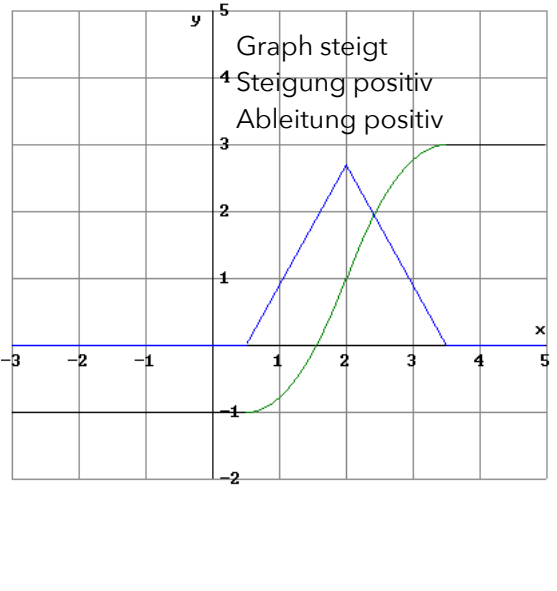


Die Parabel $f(x) = (x - 2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5$ hat negative Steigungswerte bis $x = 2$; dort ist die Steigung 0, anschließend sind die Steigungswerte positiv. Die Steigung der Parabel nimmt von negativen Werten über 0 und dann im positiven Bereich immer weiter zu. Die Steigung verändert sich linear; der blaue Graph ist eine Gerade mit der Steigung 2 und einer Nullstelle bei $x = 2$.

d)

	Der Graph hat bis $x = -0,5$ den konstanten Wert 1,5 und die Steigung 0. Von $x = -0,5$ bis $x = 0$ ist der Graph ein Stück einer nach oben geöffneten Parabel, die Steigung nimmt linear zu. Von $x = 0$ bis $x = 1,5$ ist der Graph ein Stück einer nach unten geöffneten Parabel, die Steigung nimmt linear ab. Von $x = 1,5$ bis $x = 2,5$ verläuft der Graph geradlinig mit der Steigung -2. Von $x = 2,5$ bis $x = 3,5$ ist der Graph ein Stück einer nach oben geöffneten Parabel, die Steigung nimmt linear ab. Ab $x = 3,5$ hat der Graph den konstanten Wert -1 und die Steigung 0.
	Die Ableitung hat bis $x = -0,5$ den konstanten Wert 0. Von $x = -0,5$ bis $x = 0$ steigt der Graph der Ableitung linear an bis zum höchsten Wert 2. Von $x = 0$ bis $x = 1,5$ nimmt die Ableitung linear ab bis zum kleinsten Wert -2. Von $x = 1,5$ bis $x = 2,5$ verläuft der Graph der Ableitung waagrecht und hat den konstanten Wert -2. Von $x = 2,5$ bis $x = 3,5$ steigt die Ableitung linear an. Ab $x = 3,5$ hat die Ableitung den konstanten Wert 0.
	Der Graph hat bis $x = -0,5$ den konstanten Wert 1,5, steigt von $x = -0,5$ bis $x = 0$ mit zunehmender Steigung, steigt von $x = 0$ bis $x = 1,5$ mit abnehmender Steigung. Von $x = 1,5$ bis $x = 2,5$ fällt der Graph mit zunehmendem Betrag, dann geradlinig mit der Steigung -2. Von $x = 2,5$ bis $x = 3,5$ nimmt die Steigung zu (der Betrag der negativen Steigung nimmt ab). Ab $x = 3,5$ hat der Graph den konstanten Wert -1. Die Ableitung hat bis $x = -0,5$ den konstanten Wert 0, steigt von $x = -0,5$ bis $x = 0$ linear an bis zum höchsten Wert 2, fällt dann linear bis zum kleinsten Wert -2. Von $x = 1,5$ bis $x = 2,5$ hat die Ableitung den konstanten Wert -2, steigt anschließend bis auf 0 bei $x = 3,5$ linear an und ist anschließend konstant 0.

e)

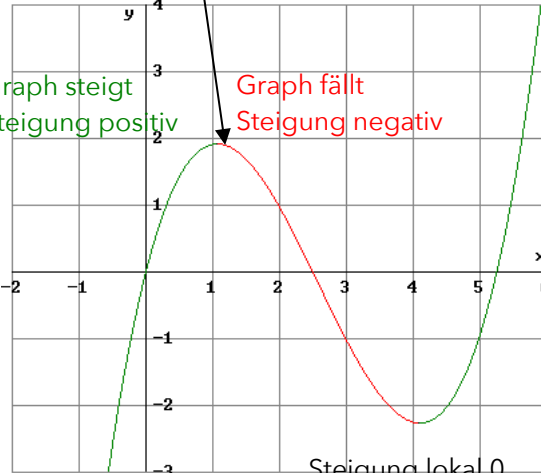
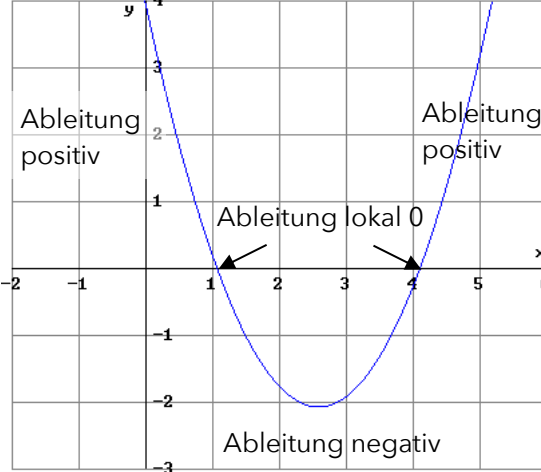
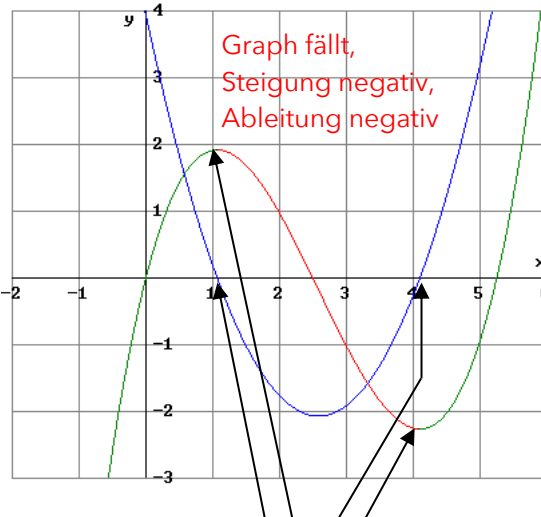
	Der Graph hat bis $x = 0,5$ den konstanten Wert -1 und die Steigung 0. Von $x = 0,5$ bis $x = 2$ ist der Graph ein Stück einer nach oben geöffneten Parabel, die Steigung nimmt linear zu. Von $x = 2$ bis $x = 3,5$ ist der Graph ein Stück einer nach unten geöffneten Parabel, die Steigung nimmt linear ab. Ab $x = 3,5$ hat der Graph den konstanten Wert 3 und die Steigung 0.
	Die Ableitung hat bis $x = 0,5$ den konstanten Wert 0. Von $x = 0,5$ bis $x = 2$ steigt der Graph der Ableitung linear an und erreicht den höchsten Wert 2. Von $x = 2$ bis $x = 3,5$ nimmt die Ableitung linear ab, ab $x = 3,5$ hat die Ableitung den konstanten Wert 0.
	Der Graph hat bis $x = 0,5$ den konstanten Wert -1, steigt bis $x = 2$ mit zunehmender Steigung und steigt bis $x = 3,5$ mit abnehmender Steigung. Im Bereich von $x = 0,5$ bis $x = 3,5$ nimmt die Steigung linear zu bzw. linear ab. Ab $x = 3,5$ verläuft der Graph waagerecht. Die Ableitung hat bis $x = 0,5$ den Wert 0. Von $x = 0,5$ bis $x = 2$ steigt der Graph der Ableitung linear an und fällt von $x = 0,5$ bis $x = 3,5$ linear ab. Ab $x = 3,5$ hat die Ableitung den konstanten Wert 0.

f)

Steigung lokal 0

Graph steigt

Steigung positiv

	Der Graph steigt mit abnehmenden Steigungswerten bis $x \approx 1,1$; dort ist die Steigung 0. Anschließend nimmt die Steigung weiter ab, wird also negativ. Bei $x \approx 2,5$ ist der größte Betrag der negativen Steigung erreicht, der Graph fällt am steilsten. Anschließend nimmt die Steigung zu, ist aber immer noch negativ. Bei $x \approx 4,2$ ist die Steigung 0 und nimmt anschließend weiter zu, wird also positiv, der Graph steigt immer steiler.
	Die Ableitung hat bis $x \approx 1,1$ positive Werte, allerdings nehmen die Werte ab. Bei $x \approx 1,1$ ist die Ableitung 0. Anschließend nehmen die Werte der Ableitung weiter ab, werden also negativ. Bei $x \approx 2,5$ ist der größte Betrag der negativen Ableitung erreicht. Anschließend nehmen die Werte der Ableitung zu, sind aber immer noch negativ. Bei $x \approx 4,2$ hat die Ableitung den Wert 0 und nimmt anschließend weiter zu, wird also positiv.
	Der Graph steigt mit abnehmenden Steigungswerten bis $x \approx 1,1$; dort ist die Steigung 0. Anschließend nimmt die Steigung weiter ab und wird negativ. Bei $x \approx 2,5$ ist der größte Betrag der negativen Steigung erreicht. Anschließend nimmt die Steigung zu, ist aber immer noch negativ. Bei $x \approx 4,2$ ist die Steigung 0 und nimmt anschließend weiter zu, wird also positiv und immer größer. Die Ableitung ist bis $x \approx 1,1$ positiv, zwischen $x \approx 1,1$ und $x \approx 2,5$ negativ und rechts von $x \approx 2,5$ positiv.

Graph steigt
Steigung positiv
Ableitung positiv

Steigung lokal 0
Ableitung lokal 0

Graph steigt,
Steigung positiv,
Ableitung positiv