MICHAELA LICHTI, JÜRGEN ROTH

Einstieg in Funktionen

Darstellungsform und passendes Medium

LERNGRUPPE: 6./7. Schuljahr

IDEE: Wer funktional denkt, kann zwischen verschiedenen Darstellungsformen flexibel wechseln. Diese Fähigkeit lässt sich beim Einstieg in Funktionen mit qualitativen Analysen von Funktionsgraphen (auch mit Simulationen) lerneffizient gestalten.

ARBEITSBLATT 1: Einstieg mit Simulation

ARBEITSBLATT 1.1: Einstieg mit Füllexperimenten (Seiten 1.2-1.5 zum Download)

GEOGEBRA-APPLETS: www.geogebra.org/m/rqgzqrm4
www.geogebra.org/m/ccbsw7vf

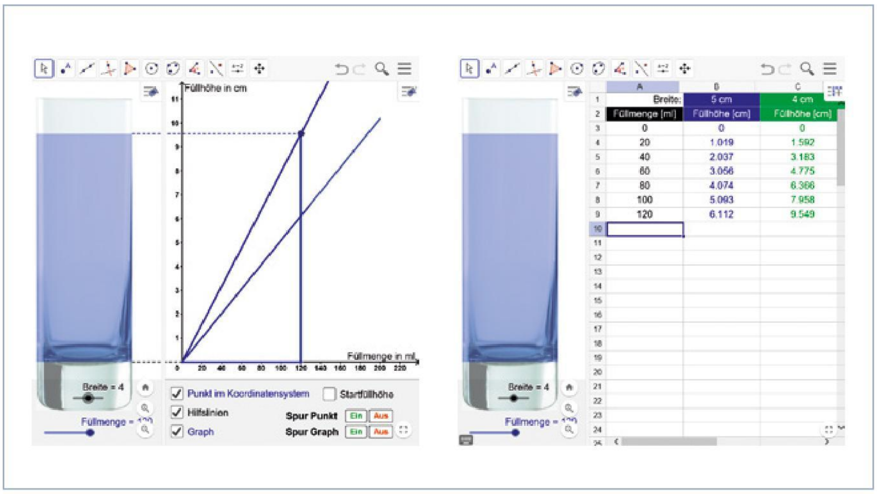


Abb. 1: Vernetzung von Situation mit Graphen bzw. Tabelle

Gerade für den Einstieg in eine neue Thematik wie Funktionen und damit in das funktionale Denken sind lerneffiziente Darstellungen erforderlich. Damit sind Darstellungen gemeint, bei denen der Transfer des an ihnen Gelernten auf andere Darstellungen gut möglich ist, sodass damit die Fähigkeit zum Repräsentationswechsel besonders unterstützt wird.

Wie sich gezeigt hat, sind Graphen für das Lernen funktionalen Denkens lerneffizienter als Tabellen (vgl. Rolfes 2018), wenngleich auch Tabellen Vorteile bieten.

Für den Einstieg in das Arbeiten mit Funktionen sollten also zunächst Grunderfahrungen mit Situationen funktionaler Zusammenhänge gesammelt und mit zugehörigen Funktionsgraphen verknüpft werden. So kann die lerneffiziente Darstellungsform Graph als primäre Darstellung im Verstehens- und Lernprozess genutzt und der Transfer zu anderen Darstellungen erleichtert werden.

Was der Graph bietet – und was nicht

Es gibt Aufgaben, bei denen keine Beschriftung der y-Achse des Graphen mit numerischen Werten vorliegt und die konkreten Funktionswerte auch nicht zur Lösung benötigt werden. Bei einer solchen *qualitativen* Analyse funktionaler Zusammenhänge wird kein numerisches Ergebnis, sondern eine interpretierende Betrachtung der Form des Graphen (etwa: Je steiler der Graph ansteigt, desto schmaler wird das Gefäß) gefordert.

Bei einer *quantitativen* Aufgabe muss eine Funktion zwingend numerisch analysiert werden, indem zum Beispiel Funktionswerte abgelesen, Änderungsraten berechnet oder Funktionswerte extrapoliert werden.

Sowohl qualitative als auch quantitative Aufgaben lassen sich bei entsprechender Achsenbeschriftung durch die Analyse eines Graphen beantworten. Allerdings hängt der erfolgreiche Einsatz von Graphen durch die Lernenden davon ab, wie genau man angesichts von Aufgabe und Darstellung des Graphen diesen betrachten muss, um zur Lösung zu kommen bzw. wie offensichtlich die aufgabenrelevanten visuellen Eigenschaften zu erkennen sind (vgl. Rolfes u. a. 2018). Daher ist ein genauer Blick auf die zu nutzenden Aufgaben und Darstellungen (hier Graphen bzw. Tabellen) erforderlich.

Real oder digital?

Reales Experimentieren hat für den Einstieg in funktionale Zusammenhänge viele Vorteile. Im Erstellen von Messreihen lässt sich der konkrete funktionale Zusammenhang bewusst erleben. Das Eintragen der Werte in eine Tabelle und das anschließende Zeichnen des zugehörigen Graphen binden den situativen funktionalen Zusammenhang eng an die Darstellungsformen Tabelle und Graph.

Auch die Beschreibung der Situation ist eine häufig verwendete Darstellungsform funktionaler Zusammenhänge. Sie wird in der Regel in Form eines Textes oder als Bild vorgestellt – oder Schülerinnen und Schüler machen eigene Erfahrungen mit entsprechenden Phänomenen.

Doch auch Situationen, die nicht direkt erlebt werden können und daher verbal oder bildlich beschrieben werden müssen, lassen sich mit digitalen Medien oft recht einfach mit in den Unterricht bringen: Anhand von auf realen

Situationen fußenden Simulationen, die mit einem dynamischen Mathematik-System (DMS) wie etwa GeoGebra erstellt wurden, kann ein sehr konkreter Eindruck eines funktionalen Zusammenhangs vermittelt werden.

Mit Hilfe des DMS kann man zeitgleich die Repräsentationsformen Graph und Tabelle mit einbinden, denn solche Multi-Repräsentations-Systeme (vgl. Barzel/Weigand 2008) können verschiedene Darstellungen parallel anzeigen.

Im Folgenden wird dargestellt, warum die Verknüpfung von simulierter Situation und graphischer Repräsentation eines funktionalen Zusammenhangs für den Einstieg in funktionales Denken als besonders lerneffizient bezeichnet werden kann. Zum anderen wird verdeutlicht, warum die Verbindung aus realem Experiment und Tabelle Vorteile für die Arbeit am funktionalen Denken mit sich bringt.

Ziel soll es sein, Schülerinnen und Schülern am Ende der Jahrgangsstufe 6 bzw. Anfang 7 bereits vor der expliziten Thematisierung von proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen ein Grundverständnis von Zuordnung und Änderungsverhalten funktionaler Zusammenhänge zu vermitteln.

Simulationen und Materialien zu funktionalem Denken

Die Simulation einer realen Situation eingebunden in ein dynamisches Mathematik-System (DMS) bietet gerade für das Erlernen funktionaler Zusammenhänge viele Vorteile, die sich auch empirisch nachweisen lassen (Lichti 2019). Im Rahmen von auf den Bildschirm verlagerter Experimente können die Lernenden durch das Arbeiten mit bzw. das Verändern von einer Ausgangsgröße die zugeordnete Größe erzeugen. Mittels der Simulation übernehmen die Schülerinnen und Schüler die Aufgabe, die der Funktion zufallen würde, wenn sie einem Wert x aus der Definitionsmenge einen Funktionswert $f(x)$ aus der Wertemenge zuordnet. Des Weiteren ist es mit deutlich weniger Aufwand verbunden, auf dem Bildschirm an einem Experiment zu arbeiten, als es in Kleingruppen real durchführen zu lassen. Zudem kann ein digitales Experiment einfach und beliebig oft wiederholt werden. Parameter lassen sich durch einfaches Klicken verändern: Durch Einführen verschiedener Wahlmöglichkeiten für zum Beispiel die unabhängige Größe und über Schieberegler lässt sich eine größere Variabilität der betrachteten Situation erzeugen, in der funktionale Zusammenhänge erfahrbar werden. Der wohl größte Vorteil einer digitalen Situation besteht darin, verschiedene Repräsentationsformen visuell miteinander zu verbinden.

Durch Nebeneinanderstellen von z. B. simulierter Situation und Graph sowie durch den Einsatz geeigneter Fokussierungshilfen wie Farbgebung und Verbindungslinien, aber auch das bewusste Ein- und Ausblenden von Aspekten bzw. Darstellungsformen (Roth 2005) lässt sich die Aufmerksamkeit der Schülerinnen und Schüler gezielt auf die wesentlichen Aspekte des zu untersuchenden Zusammenhangs lenken: Verbindungslinien zwischen zwei Fenstern können verdeutlichen, aus welcher Situation sich einzelne Punkte, die im Koordinatensystem erscheinen, entwickeln. Solche Verbindungslinien können im Rahmen einer Animation sichtbar machen, wie der Graph eines funktionalen Zusammenhangs in Abhängigkeit von der zugehörigen Situation entsteht und welche Veränderungen in der Situation zu welchen Veränderungen im Graphen führen. Auch eine entsprechende Verbindung der simulierten Situation mit der tabellarischen Darstellung ist möglich (vgl. **Abb. 1**). In zwei aufeinander abgestimmten Fenstern lassen sich zugeordnete Werte ihrer Entstehungssituation zuweisen. Auch hierbei sind Fokussierungshilfen sehr nützlich.

Vorteile realer Experimente

Reale Experimente zu funktionalen Zusammenhängen bergen ebenfalls einige empirisch belegbare Vorteile (Lichti 2019). Besonders das Verständnis des Zuordnungsaspekts lässt sich durch sie fördern.

Im realen Experiment werden Schülerinnen und Schüler quasi selbst zur Funktion. Es gibt hier, anders als bei der Simulation, keinen Mittler. Enaktiv wird eine Größe erzeugt, dabei erfolgt der Schritt von einer Ausgangsgröße (zum Beispiel aus dem konstanten Füllvolumen an Wasser) zur zugeordneten Größe (die Füllhöhe des Gefäßes). Man kann den funktionalen Zusammenhang wortwörtlich „begreifen" (Barzel 2000) und ihn in mathematische Darstellungen übersetzen. Mit Messwerten wird eine Tabelle erarbeitet, welche wiederum die Grundlage für das Erstellen eines Graphen ist. Es kommt zu einer bewussten und aktiven Verknüpfung von realer Welt und Mathematik, was das Lernen nachhaltiger macht (Goldstone/Son 2005).

Durch das reale Experimentieren kreieren Schülerinnen und Schüler Ankerbeispiele, auf die sie auch nach längerer Zeit immer wieder Bezug nehmen können (Ganter 2013). Mit Blick auf funktionale Zusammenhänge scheint dies besonders erstrebenswert, da die Thematik die gesamte Schullaufbahn durchzieht. Beim realen Experiment liegt der Fokus der Schülerinnen und Schüler auf dem Generieren von Wertepaaren, die Tabelle wird unmittelbar als Ergebnis eines jeden Schrittes erzeugt. Beim Übergang zum Graphen wird ihr Blick daher zunächst auf die aus den Wertepaaren resultierenden Punkte gelenkt. Veränderung steht zunächst nicht im Mittelpunkt, hingegen ist die Zuordnung von Werten zentral.

Zwei Einstiege in Funktionen

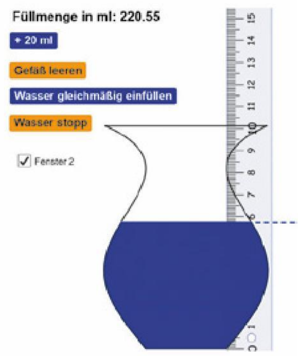
Die Vernetzung von realen Experimenten und Tabelle

Dieser Zugang zum funktionalen Denken setzt auf bereits Bekanntem auf und macht sich das enaktive Handeln zunutze. Am Beispiel des Experiments „Gefäße Füllen – zylindrische Gefäße " (vgl. **Arbeitsblatt 1.1**) lassen sich die damit einhergehenden Vorteile verdeutlichen.

Den Schülerinnen und Schülern stehen für dieses Experiment drei verschiedene zylindrische Gefäße zur Verfügung. Diese Gefäße werden sukzessive mit der immer gleichen Menge Wasser gefüllt. Nach jedem Füllvorgang wird die Füllhöhe des Wassers mit einem Lineal gemessen. In einer Tabelle, die den Schülerinnen und Schülern bereits bekannt ist, wird die Gesamtfüllmenge und

Name: ______________________ Datum: ______________________

Ein digitaler Einstieg in funktionales Denken



Heute beschäftigst du dich mit der Frage, wie die Füllmenge und die Füllhöhe zusammenhängen, wenn ein Gefäß mit Wasser gefüllt wird.
Öffne dazu das Applet ***Gefäß füllen*** *(geogebra.org/m/ccbsw7vf).*
Bearbeite dann der Reihe nach die nachfolgenden Arbeitsaufträge und notiere deine Ergebnisse auf dem Arbeitsblatt.

1. Auftrag

Fülle das Gefäß durch Klicken auf den Button *20 ml* mit Wasser.
Bewege nun mit der Maus das Lineal so, dass du die Füllhöhe des Wassers messen kannst.
Notiere die Werte in einer Tabelle.
Wiederhole diesen Schritt so oft, bis das Gefäß voll ist.
Leere es nun wieder mit dem Button *Gefäß leeren*.

gesamte Füllmenge in ml	Füllhöhe in cm
…	

2. Auftrag

Setze nun ein Häkchen bei *Fenster 2*. Wiederhole den Füllvorgang.
Vergleiche nach jedem Einfüllen von 20 ml Wasser den im Koordinatensystem entstandenen Punkt mit den von dir zuvor gemessenen Werten.
Erkläre, woraus sich ein Punkt zusammensetzt.

3. Auftrag

Klicke auf *Alles neu* und dann im 1. Fenster auf *Wasser gleichmäßig einfüllen*.
Beobachte, wie sich das Gefäß mit Wasser füllt und der zugehörige Graph im 2. Fenster entsteht.

Beschreibe möglichst genau, wie sich die Höhe des Wassers während des Füllvorgangs im Gefäß verändert. Beziehe dich dabei auf den Graphen und die Form des Gefäßes.

Fülle nun aus:

Je schneller sich die Füllhöhe des Gefäßes ändert, desto_______________ ist das Gefäß und

desto_____________ verläuft der Graph.

4. Auftrag

Betrachte nun die von dir erstellte Tabelle.

a) Markiere, in welchem Schritt sich die Füllhöhe am stärksten bzw. am langsamsten ändert.
b) Erläutere, woran du das erkennst.
c) Vergleiche die von dir markierten Werte in der Tabelle mit dem Graphen.
Beschreibe, wie Graph und Tabelle diesbezüglich zusammenhängen.

Name: ______________________ Datum: ______________________

Ein Einstieg in funktionales Denken

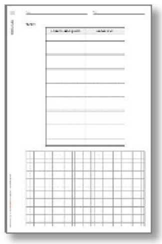
Heute beschäftigst du dich mit der Frage, wie die Füllmenge und die Füllhöhe zusammenhängen, wenn ein Gefäß mit Wasser gefüllt wird. Du benötigst dazu

- *drei zylindrische Gefäße,*
- *eine Flasche mit Leitungswasser,*
- *einen Messbecher und*
- *ein Lineal.*

Bearbeite der Reihe nach die folgenden Arbeitsaufträge und notiere deine Ergebnisse auf dem Arbeitsblatt.

1. Auftrag

Nimm das erste Gefäß. Fülle es mit 20 ml Wasser. Miss nun mit dem Lineal, wie hoch das Wasser im Gefäß steht. Notiere die Werte in der Tabelle *Gefäß 1* auf Blatt 1.2.



Wiederhole diesen Schritt. Achte darauf, in der linken Spalte der Tabelle die Gesamtmenge an Wasser, die sich im Glas befindet, einzutragen.

2. Auftrag

Erstelle zu den von dir ermittelten Werten ebenfalls auf Blatt 1.2 einen Graphen. Trage dazu die Wertepaare aus deiner Tabelle als Punkte in ein Koordinatensystem ein. (x-Achse: Füllmenge in ml, y-Achse: Füllhöhe in cm). Mache dir dabei bewusst, welche Informationen in einem Punkt stecken.

Verbinde die Punkte. Erkläre, was die Verbindungslinie zwischen den einzelnen Punkten bedeutet.

3. Auftrag

Erstelle nun auf den Folgeblättern zu den beiden anderen Gefäßen ebenfalls eine Tabelle und den zugehörigen Graphen. Benutze beim Erstellen des Graphen die gleiche Achseneinteilung, die du für das erste Gefäß verwendet hast.

4. Arbeitsauftrag

a) Lege die drei Tabellen nun nebeneinander. Vergleiche, wie sich die Füllmenge bzw. die Füllhöhe jeweils verändert. Notiere auf Blatt 1.5, was dir auffällt.
b) Vergleiche nun deine drei Graphen miteinander. Notiere, was du feststellst.

5. Arbeitsauftrag

Bringe deine Erkenntnisse von Tabelle und Graph zusammen: Beschreibe, wie sich die Änderungen der Tabellen in den Graphen wiederfinden.

4892cabc036d578f8dac2dccf1b3947c

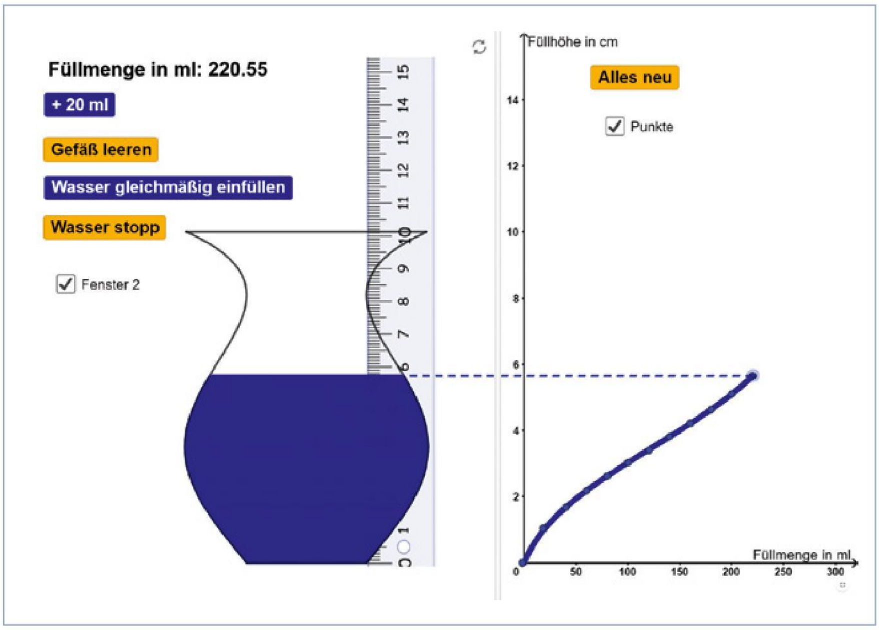


Abb. 2: Lernumgebung Gefäß füllen

die zugeordnete Höhe notiert. Auf diese Weise entstehen drei Tabellen. In einem nächsten Schritt werden zu den drei Tabellen die zugehörigen Graphen gezeichnet.

Der Schwerpunkt dieses Arbeitens liegt auf dem Verständnis der Zuordnung. Die Schülerinnen und Schüler erzeugen händisch die einander zugeordneten Werte, mit der Tabelle lässt sich das Wertepaar als solches besonders eindrücklich abbilden. Mittels quantitativen Vorgehens sollte im Vergleich der drei Tabellen nun auffallen, dass die Änderung der Gesamtfüllmenge (Ausgangsgröße) bei allen drei Gefäßen identisch ist, die Änderung der zugeordneten Füllhöhe jedoch verschieden. Das sich anschließende Zeichnen der zugehörigen Graphen lenkt den Fokus der Schülerinnen und Schüler auf das Eintragen der Wertepaare in Form von Punkten in ein Koordinatensystem. Hierdurch wird der Zuordnungsaspekt betont.

Betrachten die Schülerinnen und Schüler die drei linearen Funktionen im Vergleich, können sie die verschiedenen Steigungen erfassen und diese mit der zuvor in den Tabellen quantitativ ermittelten Änderungen in Zusammenhang bringen. Auch in diesem Fall ist es möglich, die an der Tabelle gewonnen Erkenntnisse auf den Graphen zu übertragen. Allerdings muss man festhalten, dass sich dies nur im Vergleich verschiedener linearer Zusammenhänge erreichen lässt.

Die Vernetzung von Simulation und Graph

In der mit GeoGebra erstellten Lernumgebung „Gefäß füllen" (**Abb. 2,** https://www.geogebra.org/m/ccbsw7vf), interessiert der funktionale Zusammenhang zwischen der Füllmenge und der Füllhöhe. Präsentiert wird der Querschnitt einer Vase, anhand dessen der Füllprozess beobachtet werden kann. Durch Klicken auf den Button „20 ml" kann sie in Schritten befüllt werden. Die Füllhöhe lässt sich mit einem beweglichen digitalen Lineal messen.

Im Graphikfenster rechts daneben kann passend zur erreichten Füllhöhe der zugehörige Punkt im Koordinatensystem eingeblendet werden („Punkte" aktivieren). Die Zuordnung aktuelle Gesamtfüllmenge → Füllhöhe wird durch diesen Punkt visualisiert, durch Messen der Füllhöhe kann aktiv nachgeprüft werden, wie der Punkt entsteht. In einem weiteren Schritt kann das Gefäß durch den Button „Wasser gleichmäßig einfüllen" stetig befüllt und so die Punkte „stückweise verbunden" werden. Damit steht weniger die Zuordnung als die Änderung im Mittelpunkt.

Auf diese Weise kann (1) die Bedeutung eines Punktes im Koordinatensystem und damit die Bedeutung von unabhängiger und abhängiger Größe erfasst, (2) die Entstehung des Graphen beobachtet, und (3) die durch die Form des Gefäßes bedingte Veränderung des Graphen realisiert werden, sodass eine erste Vorstellung von Änderungsverhalten entwickelt wird: Die Vernetzung von schnellerem Ansteigen der zugeordneten Größe und steilerem Verlauf des Graphen wird möglich.

Die Schülerinnen und Schüler sammeln durch die Arbeit mit diesem Applet (**Arbeitsblatt 1**) erste Erfahrungen mit funktionalen Zusammenhängen, die Situation steht dabei im Vordergrund. Sowohl das Änderungsverhalten als auch der Zuordnungsgedanke werden angesprochen. Das über den Graphen erworbene Wissen sollte sich gut auf die Tabelle übertragen lassen.

Anmerkung

1. Die hier vorgestellten GeoGebra-Applets sowie eine Anleitung zum Erstellen solcher Applets findet man unter https://www.geogebra.org/m/rqgzqrm4 https://www.geogebra.org/m/ccbsw7vf

Literatur

Barzel, B. (2000): Ich bin eine Funktion. – In: mathematik lehren 98, Friedrich Verlag, S. 39–40.

Barzel, B./Weigand, H.-G. (2008): Medien vernetzen. – In: mathematik lehren 146, Friedrich Verlag S. 4–10.

Ganter, S. (2013): Experimentieren – ein Weg zum funktionalen Denken: Empirische Untersuchung zur Wirkung von Schülerexperimenten. Didaktik in Forschung und Praxis: Vol. 70. Hamburg: Kovač.

Goldstone, R. L./Son, J. Y. (2005): The transfer of scientific principles using concrete and idealized simulations. – In: The journal of learning sciences, 14(1), S. 69–110.

Lichti, M. (2019): Funktionales Denken fördern. Experimentieren mit gegenständlichen Materialien oder Computer-Simulationen. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Rolfes, T./Roth, J./Schnotz, W. (2018): Effects of Tables, Bar Charts, and Graphs on Solving Function Tasks. – In: Journal für Mathematik-Didaktik, 39(1), S. 97–125.

Rolfes, T. (2018): Funktionales Denken – Empirische Ergebnisse zum Einfluss von statischen und dynamischen Repräsentationen. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Roth, J. (2005): Bewegliches Denken im Mathematikunterricht. Texte zur mathematischen Forschung und Lehre 44. Hildesheim, Franzbecker. ISBN: 3-88120-416-4

Vollrath, H.-J. (1989): Funktionales Denken. – In: Journal für Mathematik-Didaktik, 10(1), S. 3–37.