

Das Kreuz mit der Unbekannten

Grundvorstellungen zu Variablen aufbauen

Michael Kleine

Das Ziel, Schüler:innen in einem schulischen System so zu unterrichten, dass sie in die Lage versetzt werden, im täglichen Leben und in der Berufswelt ein mathematisches Fundament zu haben, auf das sie ihr Handeln und ihre Entscheidungen beziehen, ist vermutlich schon so alt wie die Mathematik als Unterrichtsfach selbst. Zu jeder Zeit war es dabei sicherlich das Bestreben von Lehrkräften, ihren Schüler:innen einen bestmöglichen Start in das Leben zu ermöglichen und ihnen in der Sekundarstufe in diesem Sinne eine „mathematische Grundbildung“ zukommen zu lassen.

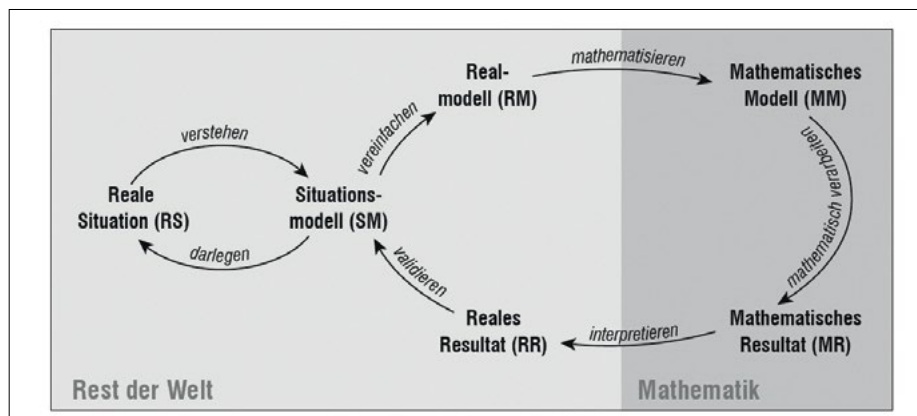
Das gegenwärtige Verständnis einer mathematischen Grundbildung knüpft an bekannte Wurzeln an, lenkt den Blickwinkel jedoch in eine Richtung, die als „Kompetenzorientierung“ bezeichnet wird. Dieses Verständnis ist noch sehr allgemein. Es bedarf einer genaueren Klärung, wie eine derartige Kompetenzorientierung auf schulische Arbeit, insbesondere auf den Mathematikunterricht, zugeschnitten werden kann. Grundsätzlich kann man aus dieser Orientierung (1) ein funktionales Verständnis des Kompetenzbegriffs herauslesen: Die Bewältigung bestimmter Anforderungen wird als ein

Indikator von Kompetenz betrachtet. Das bedeutet, aufgrund von beobachtbaren Ergebnissen und Äußerungen in mathematischen Anforderungssituationen können wir auf das Vorhandensein entsprechender mathematischer Kompetenzen schließen. (2) Die Orientierung zeugt von einem bereichsspezifischen Verständnis: Kompetenzen werden auf einen begrenzten Bereich von Kontexten und Situationen bezogen. Somit kann aufgrund der erfolgreichen Bewältigung entsprechender Sachzusammenhänge auf Kompetenzen geschlossen werden, die für die Bearbeitung dieser Inhalte notwendig sind. In der Mathematik lassen sich somit inhaltsbezogene Aussagen in verschiedenen Teilgebieten oder Teilaspekten unterscheiden und nicht nur eine mathematische Kompetenz per se. Auf der anderen Seite sind Kompetenzen nicht losgelöst voneinander, sondern Ausdruck eines (3) allgemeinen Verständnisses. Demnach lassen sich Kompetenzen als Dispositionen auffassen, also als eine Manifestierung dessen, was tief in unseren kognitiven Strukturen verankert ist und somit über die Beschreibung einer einzelnen Leistung beispielsweise bei einer spezifischen Aufgabe allein hinausgeht.

Grundbildung und Anwendungsorientierung

Dieser Ansatz hat seine traditionellen Wurzeln in der Mathematikdidaktik bei Winter (1996), der zur Allgemeinbildung all das Wissen, die Fertigkeiten, Fähigkeiten und Einstellungen zählt, die für einen Menschen in seinem gesellschaftlichen Umfeld notwendig erscheinen, unabhängig von Geschlecht, Beruf, Religionszugehörigkeit usw. Nach Winter wird im Mathematikunterricht dieser Bildungsanspruch dadurch vermittelt, dass den Schüler:innen drei „Grunderfahrungen“ ermöglicht werden, die sich als *Anwendungsorientierung* (G1), *Strukturorientierung* (G2) und *Problemorientierung* (G3) charakterisieren lassen. Im Folgenden wollen wir die Anwendungsorientierung näher in den Blick nehmen: Anwendungsorientierung bedeutet nicht unmittelbar die Vorbereitung auf spezifische Situationen des Lebens, sondern vielmehr die Vermittlung grundlegender Einsichten in Natur, Gesellschaft und Kultur aus mathematischer Sicht.

Eine solche Einsicht zeigt sich, wenn mathematisches Arbeiten auch in der Auseinandersetzung mit realen Problemen betrachtet wird, um erworbene Kenntnisse später in realen Kontexten anwenden zu können. Im Sinne eines induktiven Vorgehens ist es dabei günstig, wenn die zu bildenden mathematischen Begriffe von den Schüler:innen möglichst selbst aus Umweltbezügen herausgelöst werden, damit sie diese auch später wieder auf solche Bezüge anwenden können. Mathematisches Arbeiten durch die Herauslösung von Umweltbezügen wird in der fachdidaktischen Literatur oftmals als Prozess des Modellierens dargestellt, wie er in **Abbildung 1** in einer Auffassung von Blum und Leiss (2005) illustriert wird.



1 | Mathematisches Arbeiten als Prozess

Anwendungsorientierung und Grundvorstellungen

Im dargelegten Verständnis mathematischen Arbeitens stellen die Übersetzungen zwischen Realität und Mathematik zentrale Tätigkeiten dar; hierbei wird einerseits ein reales Modell mathematisiert und andererseits das mathematische Ergebnis in Bezug auf die realen Konsequenzen interpretiert. Für diese Übersetzungsprozesse sind tragfähige mentale Objekte mathematischer Begriffe erforderlich, die der Begriffsbildung vorausgehen. In der deutschen Mathematikdidaktik bezeichnet man solche kognitiven Objekte traditionell als „Grundvorstellungen“. Als Kernpunkte dieses Konzepts stellt vom Hofe (2003) drei wesentliche Merkmale heraus:

1. Es gibt keine eindeutige Zuordnung zwischen mathematischen Objekten und spezifischen Grundvorstellungen, weil in der Regel mathematische Inhalte durch mehrere Grundvorstellungen erfasst werden können, die in Beziehung zueinander stehen.
2. Es lassen sich Grundvorstellungen unterscheiden, deren Wurzeln insbesondere in der Zeit vor einer mathematischen Unterweisung liegen und die sich durch gegenständliche Handlungen und konkrete Operationen auszeichnen (sog. „primäre Grundvorstellungen“). Auf der anderen Seite werden während der mathematischen Unterweisung Grundvorstellungen aufgebaut, die vor allem durch mathematische Darstellungsbezüge gekennzeichnet sind (sog. „sekundäre Grundvorstellungen“).
3. Grundvorstellungen sind nicht statisch und universell valide, sondern dynamisch. Sie entwickeln sich innerhalb eines vernetzten Systems weiter. Die Notwendigkeit für Entwicklungen resultiert aus ihrem weitgehend spezifischen Geltungsbereich: Erweisen sich Grundvorstellungen innerhalb eines mathematischen Inhaltsbereichs als tragfähig, so müssen diese möglicherweise in anderen Bereichen erweitert werden.

Der Aufbau solcher kognitiven Strukturen wird als Ausbildung von Grundvorstellungen bezeichnet. Dieser Prozess ist gekennzeichnet durch die Erfassung der inhaltlichen Bedeutung neuer Begriffe über bekannte Sachzusammenhänge, durch den Aufbau mentaler Objekte, die den Begriff repräsentieren, sowie

durch die Anwendung auf neue Kontexte. Die Ausbildung umfasst dabei sowohl die Erweiterung und Veränderung vorhandener Grundvorstellungen als auch den Aufbau neuer Vorstellungen. Grundvorstellungen lassen sich vor diesem Hintergrund als spezifische mentale Objekte kennzeichnen, die strukturelle und funktionale Aspekte eines mathematischen Gegenstandes abbilden. Diese Charakterisierungen weisen bereits darauf hin, dass sich Grundvorstellungen der unmittelbaren Beobachtung entziehen und der Validierung durch beobachtbares Verhalten bedürfen. Grundvorstellungen haben somit einen normativen Charakter („Welche Vorstellungen möchte ich durch meinen Unterricht aufbauen“) sowie einen deskriptiven Charakter („Welche Vorstellungen haben Schüler:innen tatsächlich von mathematischen Gegenständen?“).

Grundvorstellungen zum Variablenbegriff

Beziehen wir nun die bisherigen Gedanken auf die Ausbildung von Grundvorstellungen zum Variablenbegriff. Barzel und Herget (2006) stellen heraus, dass Variablen auf den ersten Blick zunächst „nur“ als Buchstaben daherkommen, die jedoch ein bemerkenswertes „Innenleben“ haben. Grundvorstellungen bezeichnen nun verschiedene strukturierende Aspekte dieses „Innenlebens“, wie sie von Schüler:innen durch verschiedene Handlungen und Anwendungen erfahren werden sollen, damit sie die Vielfalt des Variablenbegriffs verstehen und einsetzen können. Malle (1993) schreibt in seiner wegweisenden Arbeit hierzu Grundvorstellungen dem Variablenbegriff zu, die bis heute allgemeiner Konsens sind und die durch Handlungen und Anwendungen strukturiert werden können. Historisch werden diese Vorstellungen als „Aspekte“ bezeichnet, weil sich der Grundvorstellungsbegriff in dieser Zeit erst entwickelt hat:

1. Die Vorstellung einer Variable als Gegenstand („Gegenstandsaspekt“), die darauf hinweist, dass eine Variable als Platzhalter für eine konkrete, aber noch unbekannte Zahl steht.
2. Die Vorstellung von einer Variable, dass sie für einen ganzen Bereich von Zahlen steht, die man für die Variable einsetzen kann („Einsetzaspekt“). An manchen Stellen wird hierbei auch von dem „Bereichsaspekt“ gesprochen.
3. Die Vorstellung, mit einer Variable so mathematisch zu operieren wie mit Zahlen, also als ob die Variable ein Kalkül ist („Kalkülaspekt“).

Schüler:innen sollen nun Erfahrungen im Umgang mit Variablen machen und dabei das Verständnis des Variablenbegriffs durch verschiedenartige Auseinandersetzungen sukzessive erwerben. Dabei werden die Vorstellungen nicht gleichzeitig erworben, sondern nach und nach erfahren und gefestigt. Zu Beginn steht schon in der Grundschule der Gegenstandsaspekt, wenn oftmals noch ikonische Platzhalter die Variable repräsentieren.

Beispiele für den Gegenstandsaspekt:

- Bestimme die gesuchte Zahl: Multipliziere die gesuchte Zahl mit 5 und addiere anschließend 27. Du erhältst 87.
- Gib an, welche natürliche Zahl du für Δ einsetzen kannst: $46 = \Delta - 14$.

Man erkennt an diesen Beispielen einerseits, dass Variablen nicht isoliert betrachtet werden, sondern bereits in einem Zusammenhang mit Termen und Gleichungen stehen. Andererseits zeigen die Beispiele, dass der Gegenstandsaspekt aus verschiedenen Perspektiven und Darstellungen heraus erworben wird.

Auch bei der Lösung von Gleichungen ergeben sich verschiedene Darstellungsmöglichkeiten, die auf das Verständnis vom Variablenbegriff wirken, wie in **Abbildung 2** illustriert wird. Durch das systematische Einsetzen wird

2 | Gegenstandsaspekt von Variablen auf verschiedene Darstellungsarten erfahren

Beispiel: $2 \cdot x + 1 = 7$

1 Lösung durch Einsetzen		
x	Rechnung	Probe
1	$2 \cdot 1 + 1 = 3$	$3 = 7$, falsch
2	$2 \cdot 2 + 1 = 5$	$5 = 7$, falsch
3	$2 \cdot 3 + 1 = 7$	$7 = 7$, richtig
4	$2 \cdot 4 + 1 = 9$	$9 = 7$, falsch

2 Lösung durch Umkehraufgabe

$$\begin{array}{c} x \\ \parallel \\ 3 \end{array} \xrightarrow{\cdot 2} 2 \cdot x \xrightarrow{+1} 2 \cdot x + 1$$

$$\begin{array}{c} 6 \\ \leftarrow : 2 \\ 3 \end{array} \xleftarrow{-1} 7$$

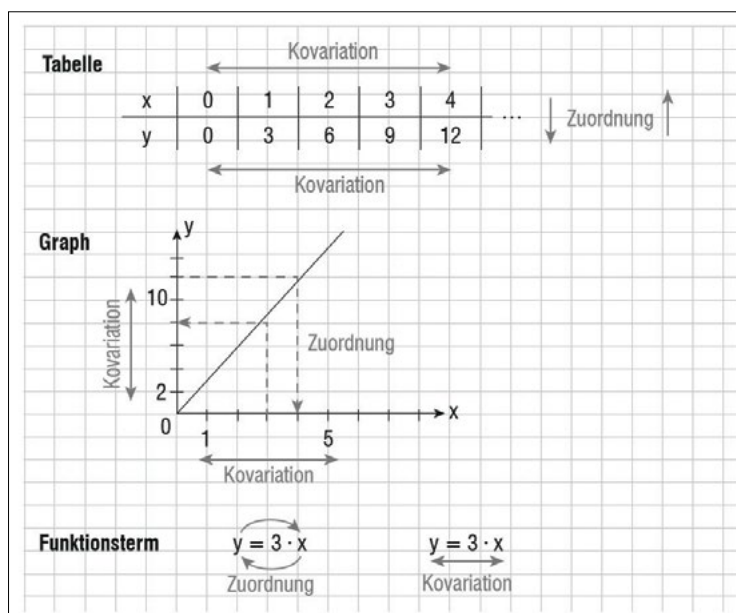
Probe: $2 \cdot 3 + 1 = 7$ richtig

Die gesuchte Zahl ist 3.

ein erster Übergang zur Verknüpfung mit dem Einsetzaspekt geschaffen, indem man Zahlen aus einem Zahlbereich wiederholt einsetzt, bis die gesuchte Zahl (der „Gegenstand“) erreicht ist, also eine wahre Aussage entsteht. Die Umkehraufgabe stellt einen Übergang zum Kalkülaspekt dar, indem der Term der Variable systematisch mit den verbundenen Operationen aufgebaut wird und anschließend mithilfe der Umkehroperationen wieder kalkülhaft abgebaut wird zur gesuchten Zahl (dem „Gegenstand“).

Man soll in diesen Ausführungen und Darstellungen die Dynamik erkennen, mit denen ein Begriff aufgebaut und innerhalb seines ur-eigenen Verständnisses nach und nach erweitert wird.

3 | Aus dem Veränderungsaspekt von Variablen sich entwickelnde Vorstellungen zum Funktionsbegriff in verschiedenen Darstellungsformen



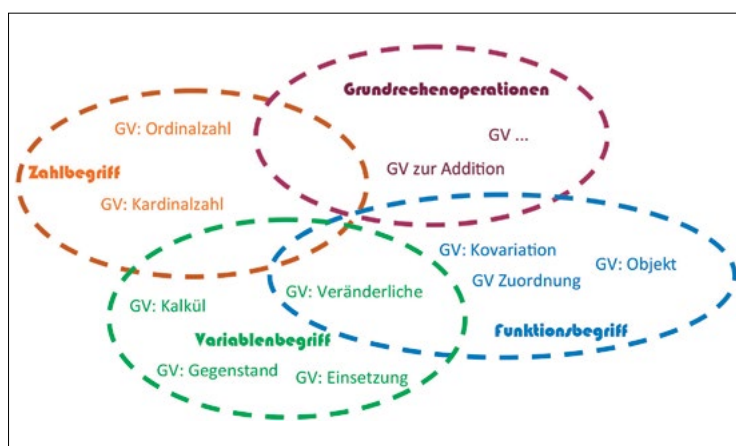
Netzwerk von Grundvorstellungen zum Variablenbegriff

Doch die verschiedenen Grundvorstellungen zum Variablenbegriff sind nicht isoliert von unmittelbar angrenzenden Begriffen. Wenn wir bei den Variablen in die Richtung eines Zahlenverständnisses schauen, aus der heraus sich der Variablenbegriff entwickelt, so sind die drei bisherigen Vorstellungen stark davon geprägt, welche Vorstellungen Schüler:innen zur Fundierung der natürlichen Zahlen aufgebaut haben (z. B. kardinal, ordinal) im Zusammenhang mit dem Einsetz- und Gegenstandsaspekt sowie zum Rechnen mit natürlichen Zahlen in Bezug auf den Kalkülaspekt.

Schaut man in die Richtung der weiteren dynamischen Entwicklung, so verweist Malle (1993) auf die Vorstellung einer Variable als Veränderliche („Veränderlichenaspekt“), deren Bedeutung für das Verständnis des Funktionsbegriffs bedeutsam ist. Dieser Veränderlichenaspekt entwickelt sich dabei zu den Vorstellungen des Funktionsbegriffs als Zuordnung zwischen zwei Größen, d. h. Variablen („Zuordnungsaspekt“), und der Auswirkung von Veränderung der einen Variable auf die andere Variable („Kovariationsaspekt“). Diese Grundvorstellungen wiederum lassen sich dann auf verschiedenen Darstellungen manifestieren (Abb. 3).

Diese Ausführungen sollen verdeutlichen, wie verwoben Grundvorstellungen mit anderen Begriffen sind. In Abbildung 4 wird dazu ver-

4 | Ausschnitt der Verbindungen von Grundvorstellungen zum Variablenbegriff mit unmittelbar verbundenen Begriffen



sucht, die hier beschriebenen Zusammenhänge auf einfache Weise als Überschneidungen zu verdeutlichen, wohlwissend, dass diese Darstellung stets nur unvollständig sein kann.

Grundvorstellungen zum Variablenbegriff aufbauen

Beim Aufbau von Grundvorstellungen sollen sich Schüler:innen also unmittelbar mit Handlungen und Anwendungen auseinandersetzen, die den Aufbau von Grundvorstellungen ermöglichen. Dabei lässt sich in diesem Rahmen sicherlich nicht die ganze Bandbreite an Handlungen und Anwendungen darstellen, aber es sollen im Folgenden Ideen aufgezeigt werden, deren Erfahrungen für die Entwicklung eines Verständnisses besonders bedeutsam erschei-

nen. Neben den angefügten Beispielen zum Gegenstandsaspekt sollen hier Möglichkeiten illustriert werden, die als sogenannte Vorstellungsanker das Ausbilden von Vorstellungen im mentalen Netzwerk unterstützen. Betrachten wir dazu für das Ausbilden des Gegenstandsaspekts die Entwicklung von Termen.

(1) Entwicklung von Termen aus der Anschauung heraus: Die Aufgabe zu Würfeltürmen (siehe Kasten) zeigt einige Merkmale auf, die für die Entwicklung von Grundvorstellungen zum Variablenbegriff (und nicht nur dafür) bedeutsam sind:

- Der Zugang erfolgt aus einer Handlung heraus, die verschiedene Lösungsmöglichkeiten zulassen.
- Eine unmittelbare Anwendungssituation illustriert die Verwendung des Variablenbegriffs.

- Der Zugang kann auf verschiedenen Ebenen erfolgen: darstellend, verbal, ikonisch und symbolisch.

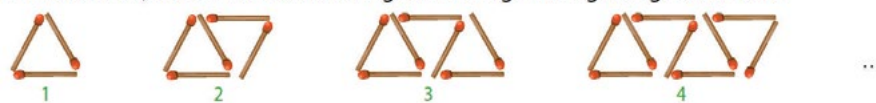
Ein solcher Zugang über eine unmittelbare Handlung ist nicht für jeden Begriff in gleicher Weise möglich, aber Facetten finden sich für viele Begriffe, insbesondere in der Grundschule und der Sekundarstufe 1. Diese Handlung ermöglicht die Ausbildung eines Vorstellungsankers, der den Einsetzaspekt des Variablenbegriffs im Gedächtnis festlegt und dadurch – auch in späteren Unterrichtssituationen – immer wieder abrufbar ist. Der entstandene Term kann dann wiederum unter dem Veränderlichenaspekt betrachtet werden, indem die Variation zu weiteren Würfeltürmen geschaffen wird, die nicht mehr real gebaut werden (müssen).

Ein zweiter Vorstellungsanker ergibt sich aus der Entwicklung solcher Handlungen zu dem entsprechenden Term.

(2) Illustrierende Darstellungen, die die Ausbildung unterstützen. Bei der Entwicklung des Einsetzaspekts liegt eine wesentliche Erkenntnis darin, dass eine Variable für einen ganzen Zahlenbereich steht. In **Abbildung 5** soll illustriert werden, wie diese Bedeutung bei der Entwicklung von Termen auch illustrativ unterstützt werden kann. Die Entwicklung des Terms – in diesem Fall für die Anzahl der Streichhölzer nach einem gewissen Bauprinzip – beruht nicht auf der absoluten Anzahl, sondern auf der Veränderung der Anzahl mit jedem Schritt. Dieser Zusammenhang von Veränderungen, die von der jeweiligen Schrittzahl abhängt und konstanten Zahlen, die bei jedem Schritt gleich sind, nimmt unmittelbar Bezug zum Einsetzaspekt einer Variablen: Die Veränderungen, die an der Schrittzahl hängen, beschreiben eine Abfolge von natürlichen Zahlen, für die die Variable verwendet wird, um diesen Zahlenbereich darzustellen.

Somit ermöglicht die Auseinandersetzung mit diesen wesentlichen Handlungen bereits erste propädeutische Erfahrungen im Hinblick auf den Veränderlichenaspekt und damit als Übergang zum späteren Funktionsbegriff. Auch der Kalkülaspekt kann in dieser Diktation in ersten Anwendungen erfahren werden, wenn Schüler:innen entweder verschiedene Terme zur Berechnung finden oder aber eigene Terme mit Termen von Mitschüler:innen vergleichen.

Hier siehst du, wie ein Term für die dargestellte Folge aus Figuren gebildet wird.



Schritt	1	2	3	4
Anzahl Streichhölzer	3 $= 3 + 0 \cdot 2$	5 $= 3 + 1 \cdot 2$	7 $= 3 + 2 \cdot 2$	9 $= 3 + 3 \cdot 2$

Anzahl der Streichhölzer beim n-ten Schritt: $3 + (n - 1) \cdot 2$

- Erkläre die Bedeutung des Terms für die Schrittfolge in eigenen Worten.
- Begründe, dass zu der Folge auch der Term $1 + n \cdot 2$ gehören kann. Zeige, dass beide Terme die Anzahl der Streichhölzer in gleicher Weise beschreiben.

5 | Illustrierende Handlungen zur Ausbildung des Gegenstandsaspekts von Variablen

Aus Holzwürfeln lassen sich Würfeltürme bauen. Dabei kann man untersuchen, wie sich die Anzahl der sichtbaren Außenflächen verändert, wenn man einen Würfel zum Turm hinzufügt.

- Lege eine Tabelle an, an der man für jeden hinzugefügten Würfel zu einem Würfelturm die Anzahl der sichtbaren Außenflächen der Würfel ablesen kann.
- Beschreibe in Worten, wie sich mit jedem weiteren Würfel die Anzahl der sichtbaren Seitenflächen ändert.
- Stelle einen Rechenausdruck auf, mit dem man die Anzahl der sichtbaren Flächen bestimmen kann. Überprüfe deinen Rechenausdruck für Würfeltürme, die aus 6 (8, 10 ...) Würfeln bestehen.



Ausblick

Die Entwicklung von Grundvorstellungen ist eine langfristige Aufgabe. Ausgangspunkt für die unterrichtliche Behandlung ist dabei eine normative Sicht auf notwendige Grundvorstellungen zu einem mathematischen Begriff. Bei den Variablen erkennt man, dass man dabei unmittelbar drei grundlegende Vorstellungen erwerben muss, um den verschiedenen Aspekten des Begriffs gerecht zu werden. Dabei sollten Ankeraufgaben dazu beitragen, dass die Vorstellungen erworben und an späteren Stellen wieder aufgerufen werden können. Doch ein mathematischer Begriff steht auch nicht allein. Der Variablenbegriff entwickelt sich aus dem Zahlverständnis und den Rechenoperationen heraus. Diese Berücksichtigung in der Planung hilft, das Vorwissen und die Ausbildung der Grundvorstellungen im Gedächtnis der Schüler:innen zu

platzieren. Ebenso hat der Variablenbegriff eine Fortentwicklung zum Funktionsbegriff, sodass die Veränderlichkeit eine propädeutische Vorerfahrung für die Anbindung an dieses mathematische Konzept ermöglicht.

Literatur

- Barzel, B. & Herget, W. (2006). Terme. mathematik lehren, 136, 4–9.
- Blum, W. & Leiss, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der „Tanken“-Aufgabe. mathematik lehren, 128, 18–21.
- Kleine, M. (2012). Lernen fördern – Mathematik. Seelze: Klett-Kallmayer.
- Kleine, M. & Randenborgh, Chr. (2019). Mathe.delta 6. Bamberg: C.C. Buchner.
- Kleine, M. & Randenborgh, Chr. (2020). Mathe.delta 7. Bamberg: C.C. Buchner.
- Malle, (1993). Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Braunschweig: Vieweg.
- vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. mathematik-lehren, 118, 4–8.
- Winter, H. (1996). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. Mitteilungen der DMV, 2/96, 35–41.