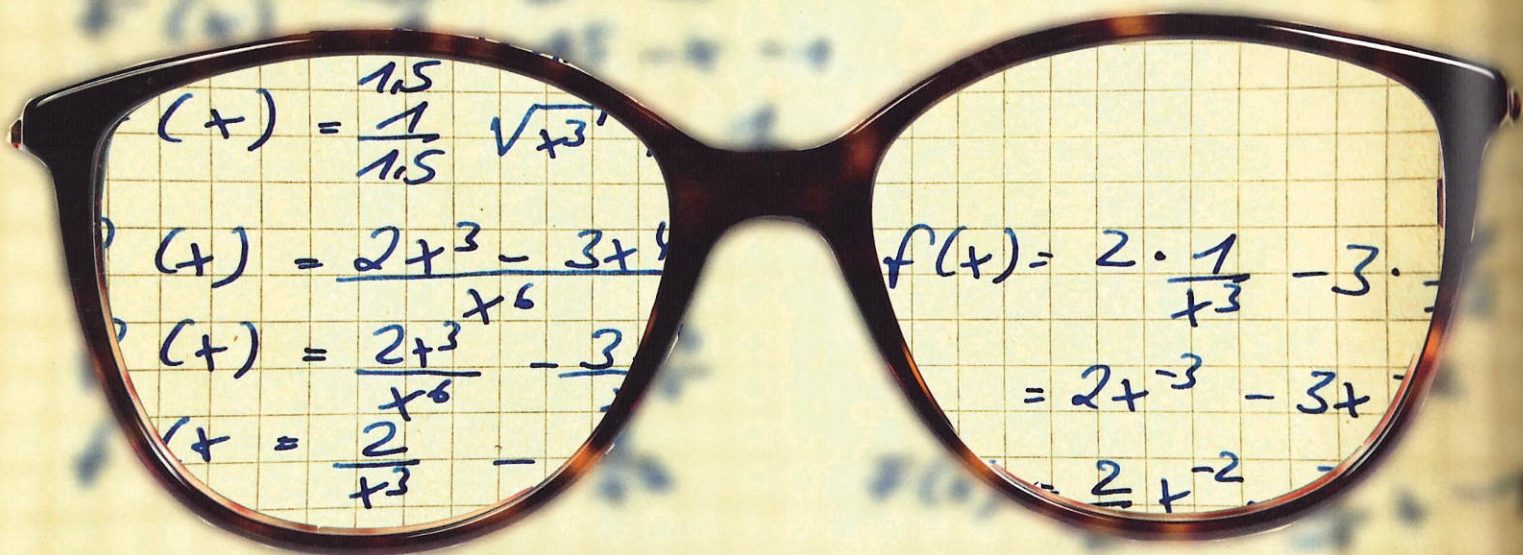




Strukturen als Basis der Algebra

„Abstrakte Symbole, die nicht durch die eigene Aktivität des Kindes mit Sinn gefüllt, sondern ihm von außen aufgeprägt werden, sind tote und nutzlose Symbole. Sie verwandeln den Lehrstoff in Hieroglyphen, die etwas bedeuten könnten, wenn man nur den Schlüssel dazu hätte. Da aber der Schlüssel fehlt, ist der Stoff eine tote Last.“

(John Dewey, 1859–1953)

**BÄRBEL BARZEL,
LARS HOLZÄPFEL**

Nach einem Mathematikstudium ist der Blick für algebraische Strukturen und das souveräne Umgehen mit algebraischen Objekten und Symbolen – vor allem, wenn man gerne Mathematik treibt – selbstverständlich geworden. Anders sieht es aus der Sicht der Schülerinnen und Schüler aus: Sie müssen erst einen Zugang zu dieser neuen abstrakten Welt und Sprache finden. Dabei ist es wichtig, sie von Beginn an gut zu unterstützen und die Algebra mit Bedeutung zu füllen. Es gilt, eine gute Fundierung zu schaffen für die späteren Themen, in denen Algebra unerlässlich ist. Dazu gehören fast alle Inhalte der Schulmathematik (und darüber hinaus), denn das Nutzen von Variablen und Termen ist ein zentrales Instrument beim Mathematik treiben, beim Modellieren und Problemlösen mit Termen, in jeglicher Funktionenlehre und Analysis oder in der Geometrie zum Bezeichnen und Berechnen von Größen. Den Zusammenhang zwischen zwei Größen in einem Term oder in Formeln auszudrücken,

eröffnet zudem die Möglichkeit, im wahrsten Sinne des Wortes variabel mit diesem Zusammenhang umzugehen: Wer die Faustformel für den Bremsweg ($s_{\text{Bremsweg}} = \left(\frac{v}{10}\right)^2$) kennt, kann schnell überschlagen, ob der Abstand zum Vorderfahrzeug ausreichend sicher ist.

Das Finden einer Formel erfordert, Strukturen zu erkennen: Wie hängen die einzelnen Größen voneinander ab? Welche Größe verändert sich wie? Hierzu werden einzelne (konkrete) Situationen genauer betrachtet. Genau dieser Übergang von konkreten hin zu variablen Werten ist ein wichtiger Lernschritt zum Verstehen algebraischer Objekte. So ist die Algebra auch entstanden: Als verallgemeinerte Arithmetik findet sich die „algebraische Methode“ erstmals im Buch Arithmetica, einem Lehr- und Aufgabenbuch des antiken Mathematikers Diophant von Alexandria. Die Sprache der Algebra ermöglicht Abstraktion. Daher hat sie eine enorme Bedeutung.

Variablen in ihren verschiedenen Bedeutungen

Um Mathematik zu lernen, müssen Schülerinnen und Schüler Vorstellungen davon entwickeln, welche inhaltliche Bedeutung mit dem jeweiligen mathematischen Begriff oder Konzept verbunden ist (Blum u. a. 2004, S. 145). Hier setzt die Idee der „Grundvorstellungen“ (vom Hofe 1992, im englischen „concept image“) an, welche die tragfähigen Vorstellungen, die man zu einem Begriff entwickelt,

bezeichnet. Rudolf vom Hofe sieht in Grundvorstellungen die Brücke zwischen den individuellen Vorstellungen der Lernenden und der konsolidierten Mathematik (vom Hofe 1992). Die Orientierung an Grundvorstellungen ist auch bei der Einführung von Variablen hilfreich. Sie spielen in der Mathematik bei genauer Betrachtung sehr unterschiedliche Rollen: *Die Variable als allgemeine Zahl, als Unbekannte oder als Veränderliche*.¹

In der fachdidaktischen Literatur werden als Grundvorstellungen häufig nicht nur die hier genannten Rollen aufgeführt, sondern auch verschiedene Aspekte wie *Einsetzungsaspekt*, *Kalkülaspekt* und *Gegenstandsaspekt* benannt (Malle 1986). Mit diesen Aspekten hat Günter Malle verdeutlicht, in welcher vielfältiger Weise man mit Variablen umgehen kann. Sie zeigen, wie wichtig es ist, passend zur Frage die Variable richtig zu deuten und zu überlegen, was man mit Variablen *tun* kann: Man kann Werte einsetzen, man kann mit den Variablen rechnen und die Variablen werden als Gegenstand oder als Objekt verwendet, um damit Situationen und Zusammenhänge zu beschreiben und umzudeuten (Tab. 1). Der Beitrag **Weil Umformen oft nicht reicht** ab S. 20 in diesem Heft greift dies auf.

Wie wichtig es ist, das Verständnis für den Umgang mit Variablen aufzubauen, zeigen die unserer Erfahrung nach relativ hohen Fehlerraten bei folgender Aufgabe:

→ Wie kann man „die Hälfte der Zahl a “ schreiben? Kreuze an, ob die Antwort richtig ist.

$\frac{a}{2}$	Ja ☐	Nein ☐
$a - \frac{1}{2}$	Ja ☐	Nein ☐
$\frac{1}{2} \cdot a$	Ja ☐	Nein ☐
$a - \frac{a}{2}$	Ja ☐	Nein ☐
$0,5 \cdot a$	Ja ☐	Nein ☐
$a : \frac{1}{2}$	Ja ☐	Nein ☐
$\frac{1}{2} a$	Ja ☐	Nein ☐

Gleichheit und Gleichwertigkeit: Der Äquivalenz Bedeutung geben

Gleichwertigkeit vielfältig erfahren

Mit Variablen lassen sich mehrere strukturgleiche Situationen (oder ein Zusammenhang) durch einen algebraischen Term allgemein beschreiben. Dabei können durchaus verschiedene Terme entstehen, die dasselbe korrekt beschreiben. Hier ein Beispiel:

→ Aus Hölzchen wird eine Reihe aneinander liegender Quadrate gebildet:



Wie viele Hölzer braucht man für 4, für 50, für n Quadrate? Notieren Sie einen Term.

Fertig? Dann blättern Sie zu Seite 4 und vergleichen Sie Ihren Term mit denen in Abb. 1. An diesem Beispiel können Schülerinnen und Schüler die Kraft der Terme auf zweifache Weise erleben:

- Eine Situation kann mit unterschiedlich aussehenden Variablentermen beschrieben werden.
- Beim Einsetzen konkreter Werte in diese Variablenterme erhält man stets das gleiche Ergebnis.

Diese beiden Tätigkeiten sind eine wichtige Brücke, um die Gleichwertigkeit (Äquivalenz) von Termen mit Inhalt und Bedeutung zu füllen, bevor es daran geht, die Gleichwertigkeit durch Umformen zu zeigen. Letzteres ist spätestens dann wichtig, wenn die Rechengesetze eingeführt und begründet werden. Es gibt also drei Aspekte der Gleichwertigkeit von Termen (vgl. auch Zwetzschler/Prediger 2013):

- **Beschreibungsgleichheit:** Zwei Terme beschreiben das Gleiche; z. B. dasselbe Bild, dieselbe Situation.
- **Einsetzungsgleichheit:** Der Wert der Terme ist gleich, wenn man die gleichen Zahlen einsetzt.
- **Umformungsgleichheit:** Durch Umformen erhält man das Gleiche, d. h. man kann kalkülhaft von einem Term zum anderen gelangen.

Welche Bedeutung hat das Gleichheitszeichen?

Schon in der Grundschule gehen die Kinder mit Gleichungen und dem Begriff der „Gleichheit“ um – lange bevor das Thema in der Sekundarstufe systematisch aufgegriffen wird: Wer eine Rechnung der Art $3 + 5 = \square$ löst, arbeitet bereits mit Unbekannten. Hier wird das Gleichheitszeichen als *Rechenaufforderung* gebraucht. Bei der Aufgabe $3 + \square = 8$ wird Rückwärtsrechnen notwendig. Hier müssen Lernende also umdenken und das Gleichheitszeichen ist

1 WISSENSWERT

Bedeutungen des Gleichheitszeichens

Aufforderung zum Rechnen

$$24 : 4 - 3 =$$

Relationszeichen (Beschreiben einer Beziehung)

- als Bedingung, um eine Unbekannte zu bestimmen
(Gesucht ist x mit $x^2 + x - 6 = 0$.)
- als Zusammenhang zwischen Größen
 $A_{\text{Trapez}} = 1/2 (a + c) \cdot h$; $K_n = K_0 (1 + p/100)^n$
- zwischen gleichwertigen Termen (formale Gleichheit)
 $(x - 2) \cdot (x + 3) = x^2 + x + 6$

Definitionszeichen (Setzung, normative Deutung)

Zum Definieren eines neuen Objekts

einer neuen Variablen $a := 2b$, einer Funktion $f(x) := 2x + 1$, einer neuen Größe $\sin(\alpha) := \text{Gegenkathete/Hypotenuse usw.}$

...und was man mit Variablen in den verschiedenen Rollen tun kann (Aspekte)

Die Rollen, die Variable spielen können
(Grundvorstellungen)

	Man kann Werte dafür einsetzen (Einsetzungsaspekt)	Man kann damit rechnen (Kalkülaspekt)	Man nutzt sie, um damit etwas zu beschreiben (Gegenstandsaspekt)
Variable als allgemeine Zahl <i>Beispiel:</i> $a + b = b + a$	Es können beliebige Zahlen eingesetzt werden. <i>Setze Zahlen ein, um das Gesetz zu überprüfen.</i>	✓ <i>Nutze das Gesetz bei einer Termumformung</i>	Mathematische Zusammenhänge (z. B. geometrische Formeln, Rechengesetze usw.). <i>Das Gesetz beschreibt die Kommutativität der Addition.</i>
Variable als Unbekannte <i>Beispiel:</i> $2x - 1 = x + 3$	Nur das Einsetzen der Lösungswerte erfüllt die Gleichung. <i>Lösung finden durch systematisches Probieren:</i> $2 \cdot 2 - 1 = 2 + 3$ $2 \cdot 3 - 1 = 3 + 3$ $2 \cdot 4 - 1 = 4 + 3$	✓ <i>Lösung finden durch Umformungen:</i> $2x - 1 = x + 3 \quad -x$ $x - 1 = 3 \quad +1$ $x = 4$	In Situationen, bei denen ein unbekannter Wert gesucht ist. <i>Gesucht ist die Zahl, deren Doppeltes um eins verringert genau so groß ist, wie die Zahl um drei erhöht.</i>
Variable als Veränderliche <i>Beispiel:</i> $f(x) = 2x + 3$	Die Werte der Definitionsmenge können eingesetzt werden $D = \mathbb{R}$	✓ <i>Zu einem gegebenen $f(x)$-Werte einen x-Wert bestimmen (z. B. Nullstellen).</i>	Unabhängige und abhängige Größen, die in Beziehung zu einander stehen. <i>Beziehung zwischen einer unabhängigen Größe x und einer davon abhängigen Größe $f(x)$ wird beschrieben.</i>

Tab. 1: Verschiedene Rollen von Variablen und welche Handlungen man jeweils damit vollzieht.

nicht mehr nur ein „Rechenaufforderungszeichen“. Es drückt eine *Beziehung* zwischen zwei Termen aus – „sie sollen gleich sein“. So auch bei der Form: $3 + 5 = \square + 6$. Hier muss die Gleichwertigkeit auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens erzielt werden. In der Grundschule stellt diese Erweiterung der Bedeutung des Gleichheitszeichens (*Beschreiben einer Beziehung und Finden der Unbekannten*) eine neue Schwierigkeit dar (s. Untersuchungen von Alibali u. a. 2007, S. 236, McNeil u. a. 2006, S. 380): Nur wenige Schülerinnen und Schüler können Aufgaben wie $3 + 5 = \square + 6$ korrekt lösen.

Für uns Lehrerinnen und Lehrer ist es wichtig, die unterschiedlichen Bedeutungen des Gleich-

heitszeichens (**Kasten 1**, nach Prediger 2008, Barzel/Holzäpfel 2011) zu kennen. Zum einen gelingt es leichter, diese Auffassungen in Schüleräußerungen wahrzunehmen und bei Fehlvorstellungen gezielt zu handeln. Zum anderen können wir durch entsprechende Aufgaben Probleme im Lernprozess reduzieren (vgl. Mathwerkstatt 8, S. 210):

→ Das Gleichheitszeichen hat mehrere Funktionen:
Es kann zum Rechnen auffordern: $6 + 5 = \dots$
Es kann die Gleichwertigkeit von Termen zeigen: $a + b = b + a$
Es kann zum Lösen einer Gleichung auffordern.
Dann ist ein Wert für die Variable gesucht, so-

Abb. 1: Je nach Blick auf dieselbe Situation entstehen unterschiedliche Terme, die denselben Zusammenhang beschreiben

$\square\square\square 2 \cdot 4 + 2$	$\square\square\square\square 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1$	$2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 8 + 4 + 7$	$2n + 2(n-2) + (n-3)$
$\square\square\square 1 + 3 \cdot 3$	$\square\square\square\square 1 + 3 \cdot 4$	$1 + 3 \cdot 50$	$1 + 3 \cdot n$
$\square\square\square 4 + 3 \cdot 2$	$\square\square\square\square 4 + 3 \cdot 3$	$4 + 3 \cdot 49$	$4 + 3(n-1)$
$\square\square\square 3 + 4 + 3$	$\square\square\square\square 4 + 5 + 4$	$50 + 51 + 50$	$n + (n+1) + n$

dass sich eine wahre Aussage ergibt: $2x + 3 = 7$.
Wofür steht hier jeweils das Gleichheitszeichen?

- (1) $5 = 2 - z$ (2) $3(a - b) = 3a - 3b$
(3) $3x + 6 = x$ (4) $2a + 3a =$
(5) $2x + 5y + 6 = 5 + 4y + 2x + y + 1$

Wozu führt es, wenn ...? Typische Fehler

Eine Forschergruppe um Kaye Stacey (Melbourne, Australien) konnte durch einige Studien eine Reihe von Fehlern und Fehlvorstellungen in verschiedenen Themenbereichen identifizieren (Steinle u. a. 2009). Daraus entstand der SMART-Test (specific mathematics assessment that reveal thinking), ein Diagnosetest für die Inhalte der Sek. I (unter anderem auch für Algebra). Der Test nutzt den Computer, um Muster in den Schülerantworten zu finden – dies ist für Lehrpersonen in dieser Komplexität nicht leistbar. Findet der Rechner Fehlvorstellungen, erhalten die Lehrkräfte eine entsprechende Rückmeldung. Einige der ersten Testfragen zur Algebra wurden von Judith Blomberg übersetzt und für die beiliegende Mathe-Welt zusammengestellt.

Probleme bei der Verwendung von Variablen

Viele Fehlvorstellungen zur Bedeutung von Variablen lassen sich im Detail benennen:

- *Für einen Buchstaben werden verschiedene Werte zugelassen*
Beispiel: $x + x = 12$ wird zu $10 + 2 = 12$. Dies könnte an der allgemeineren Platzhalter-Schreibweise aus der Grundschule $\Delta + \Delta = 12$ liegen, bei der unterschiedliche Zahlen in das gleiche Symbol Δ eingesetzt werden können.
- *Gleiche Werte für verschiedene Buchstaben werden abgeleitet*
Für gleiche Buchstaben werden immer gleiche Werte eingesetzt – wie bei einem Code, bei dem jeder Buchstabe für eine anderen Zahl steht.
- *„Fruchtsalat-Algebra“*
Variablen werden nicht durchgängig als Zahlenwerte, sondern als Abkürzung verwendet. Variable werden als Gegenstände und Koeffizienten als Lösung interpretiert. Beispiel: $3b$ steht für 3 Bananen. Das führt zu Problemen, wenn Terme zu Sachsituationen aufgestellt werden oder beim Verständnis von Termen wie $2a \cdot 3b$. Hier hilft es, Wortvariablen zu vermeiden, d. h. als Variable nicht den Anfangsbuchstaben des zu zählenden Objektes zu wählen und sprachlich sauber zu formulieren: „ x steht für die Zahl der Äpfel“.
- *Der Position des Buchstabens im Alphabet wird eine Bedeutung zugeschrieben*
Beispiele: Die Position im Alphabet entspricht dem Wert der Variablen, z. B. $d = 4$. Aufeinanderfolgende Buchstaben bedeuten aufeinanderfol-

gende Zahlen. Weil a vor c kommt, muss auch der Wert von a kleiner als der Wert von c sein. Für $x + y = 7$ wird als (einzige) Lösung von $x = 3$ und $x = 4$ akzeptiert, $x = 6$ und $y = 1$ nicht, usw.

Probleme beim Aufstellen und Umformen von Termen

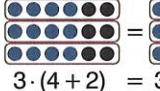
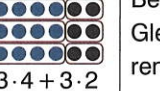
- *Fehlkonzepte in der Geometrie*
Beispiel: Terme zu geometrischen Figuren werden falsch aufgestellt, weil die Begriffe Umfang und Flächeninhalt nicht klar sind.
- *Variable ist immer der Minuend*
Beispiel: Subtraktionsterme werden stets so gebildet, dass die Variable der Minuend ist, etwa „ x Personen weniger als die angemeldeten 25 Teilnehmenden“ wird zu „ $x - 25$ “.
- *Vertauschen der Reihenfolge bei der Subtraktion*
Beispiel: „5 Euro weniger als der ursprüngliche Betrag x “ wird zu „ $5 - x$ “. Hier kann auch eine Wort-für-Wort-Übersetzung vorliegen.
- *Verwechseln von Koeffizienten und Exponenten*
Beispiel: x^4 und $4x$ wird verwechselt.
- *Bestimmen der falschen Größe*
Beispiel: Berechnen des Umfangs von Figuren anstelle des Flächeninhalts.

Probleme beim Umformen von Termen

- *Falscher Umgang mit Klammern*
Beispiel: $8(a + 3)$ wird zu $8a + 3$.
 - *Nur numerische Ergebnisse werden als Endergebnis anerkannt*
Beispiel: „ $2a$ “ ist keine Lösung.
 - *Weglassen von Teiltermen beim Ausmultiplizieren*
Beispiel: $(x + 3)(x + 7) = x^2 + 21$
 - *Teilterme werden nicht zusammengefasst*
Beispiel: $(x + 3)(x + 7) = x^2 + 7x + 3x + 21$ ohne weiteren Schritt zu $x^2 + 10x + 21$.
 - *Weglassen der Rechenzeichen + und –*
Beispiel: „35 ist ja auch $30 + 5$ “
Ursache kann die Übertragung der Konvention sein, dass bei der Multiplikation mit Variablen das Malzeichen weggelassen werden kann.
- Manche Schülerinnen und Schüler hadern auch mit Konventionen: Koeffizienten werden den Variablen nicht vorangestellt oder das Multiplikationszeichen bei Produkten mit Variablen nicht weggelassen. Das ist nicht weiter schlimm – letzteres kann auch helfen, Übertragungsfehler zu vermeiden. Teilweise treten auch Unsicherheiten beim Umformen von Termen mit einem Bruch als Koeffizienten auf. So ist $\frac{1}{2}a = \frac{a}{2} = a : 2$ nicht allen klar.

Probleme beim Aufstellen und Lösen von Gleichungen

- *Gleichung beschreibt den arithmetischen Prozess*
Mit der Gleichung wird der Lösungsweg dargestellt $x = (60 - 12 - 15) : 3$ anstelle des Zusammenhangs $x + (x + 12) + (x + 15) = 60$. Das funktioniert nur bei überschaubaren Gleichungen.

	Vorstellungen	Beispiel		Kognitive Aktivität
		Grundschule	5/6	
Grundschule und 5/6	Variablen als Unbekannte („Platzhalter“)	„Fülle die Lücke.“		Vorwärts und rückwärts rechnen (Umkehraufgaben) Passende Zahlen finden, um Gleichheit von Termen zu erzeugen.
		$3 + 4 = \square$ $3 + \square = 7$ $3 + 4 = \square + 5$	$5/6 + \square/4 = \square/12$ $\square/3 + \square/2 = 1$	
	... als Veränderliche	„Rechne im Kopf und setze fort.“		Systematisches Verändern einer Zahl in Rechnungen
		$2 \cdot 5 = \square$ $4 \cdot 5 = \square$ $6 \cdot 5 = \square$	$0,23 \cdot 10 =$ $0,23 \cdot 100 =$ $0,23 \cdot 1000 =$	
	... als allgemeine Zahl	„Wie viele Punkte sind an der 10. Stelle?“	„Wie viele Punkte sind an der x-ten Stelle?“	Strukturen erkennen und beschreiben; Weiterdenken („an der n-ten Stelle“; Buchstaben als Platzhalter einführen)
	Terme: Arithmetische Terme und ihre Gleichwertigkeit	„Finde mehrere Wege, diese Punkte geschickt zu zählen.“		Systematisch zählen, Situationen beschreiben, Beschreibungsgleichheit entdecken, Gleichwertige Terme zum Formulieren von Rechengesetzen entwickeln.
			 =  $3 \cdot (4 + 2) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2$	

Tab. 2: Die Reise beginnt in der Grundschule ...

- *Falsches Formalisieren von Abhängigkeiten*
Bei Größen, die voneinander abhängen (mehr/weniger, größer/kleiner als x) wird z. B. die Referenzgröße als Einheit verwendet (im Beispiel oben $12x$ statt $x + 12$) oder aus „12 mehr als x “ wird nur „+ 12“ ($x + 12 + 15 = 60$).
- *Vereinfachungsfehler*
Diese beruhen oft auf Fehlvorstellungen bei Termen. Beispiel: Bei $ax = b$ wird a von b subtrahiert, statt durch a zu dividieren. Dies könnte an einer Interpretation von ax als $a + x$ oder in der Übersetzung der Formulierung „ a wegnehmen“ begründet sein.

Grundsätzlich ist es wichtig, die auftretenden Fehler zu benennen und zu besprechen: Anhand verschiedener Visualisierungen kann die Struktur der Terme und die Bedeutung der Variablen erläutert werden. Dabei hilft es oft, konkrete Zahlenwerte einzusetzen, um etwa falsche Umformungen zu erkennen. In Sachsituationen werden Fehler oft von einer Bedeutungsebene her erkannt. So könnte für Anna die Verbindung mit einer inhaltlichen Vorstellung hilfreich sein, wenn sie meint: „ $2 + a$, $2a$, a^2 ... das soll immer was anderes sein? – Das ist mir zu kompliziert ...“ Säge sie a als die Länge einer Seite, dann würde $2a$ eine Verdoppelung der Länge bedeuten während a^2 den Flächeninhalt beschreibt. $2 + a$ könnte gut von $2a$ abgegrenzt werden, ebenso würde deutlich, dass 2 und a nicht zusammengefasst werden kann, wohl jedoch $a + a$. Eine gute Fehlerbesprechung geht also über die reine symbolische und syntaktischen Ebene (bloßes Nennen von Regeln) hinaus.

Algebra lernen: Wege und Prinzipien

Verständnis aufbauen

„Inhaltliches Denken vor Kalkül“ (Prediger 2009) lautet ein didaktisches Prinzip – wobei es nicht darum geht, ohne Kalkül auszukommen, denn diese Fertigkeit bleibt ein wichtiges Ziel des Algebraunterrichts. Vielmehr geht es um den Weg dorthin, der nicht zu einem sinnentleerten Hantieren mit Variablen und einem bloßen Rezept-Lernen mutieren darf, sondern mit Bedeutung und Verständnis erfolgen sollte. Schülerinnen und Schüler sollen lernen, wozu man Variablen, Terme und Gleichungen überhaupt braucht. Alleine der Verweis auf den späteren Mathematikunterricht reicht nicht zur Sinnstiftung. Deshalb ist es immer wieder wichtig, durch verschiedene Handlungen und Darstellungen die Möglichkeit zu schaffen, die Idee des Kalküls zu verstehen. Dabei spielen die kognitiven Aktivitäten *Verallgemeinern*, *Abstrahieren*, *Strukturieren*, *Darstellen*, *Konstruieren* und (*Um-*)*Deuten* eine wichtige Rolle (Fischer u. a. 2010, S. 4).

Die Schülerinnen und Schüler lernen also, Variablen, Terme und Gleichungen in ihrer Bedeutung so zu verstehen, dass sie damit souverän agieren können – einerseits im Rahmen von Modellierungen, d. h. beim Beschreiben und Bearbeiten von Problemen in Sachsituationen, andererseits im Rahmen innermathematischer Fragen, etwa wenn es darum geht, Terme umzuformen, Gleichungen zu lösen oder Regeln zu finden. Souverän agieren heißt für das Innermathematische wie das Außermathematische einen strukturellen Blick auf Terme und

Gleichungen zu nutzen, mit dem geschicktes Zusammenfassen und Berechnen als effizienter Weg erkannt und ermöglicht wird.

Aufbau über die Jahrgänge

Um algebraisches Denken nachhaltig zu vermitteln, empfiehlt es sich, den Gang der Algebra über die Jahrgänge hinweg zu denken (Stacey 2011). So

kann man gezielt an Vorheriges anknüpfen und die nachfolgenden Inhalte vorbereitend im Blick behalten. Der grobe Überblick in **Tab. 2** und **Tab. 3** stellt die einzelnen Teilthemen in einen größeren Zusammenhang. Der sukzessive Aufbau von Vorstellungen und Bedeutungen beginnt bereits in der Grundschule, wenn der Übergang von arithmetischen zu algebraischen Termen durch „Platzhalter“ und durch syste-

Tab. 3: ... und wird in der Sek. I weitergeführt

	Vorstellungen	Beispiel(-Aufgabe)	Kognitive Aktivität
5/6	Variable ... als allgemeine Zahl	Modellieren mit Zahlentermen: Wie viel Euro kosten der Musikunterricht und die Fahrt dorthin pro Woche? $10 + 2$ Wie viel ist das in einem Monat? $4 \cdot (10 + 2)$ Warum muss man hier Klammern setzen? Welche Kosten kommen durch die Anmeldegebühr noch dazu? $(4 \cdot (10 + 2)) + 20$ Sind hier alle Klammern wirklich notwendig?	Terme aufstellen, um Situationen zu beschreiben
7/8	Variable ... als allgemeine Zahl Terme Algebraische Terme	Modellieren mit Variablen: Micha will ein E-Bike kaufen. Ihn interessieren Preis, Akku-Reichweite, Akku-Lebensdauer. Um Angebote zu vergleichen, legt er eine Excel-Tabelle an. Es gibt Felder, deren Werte er verändern möchte (Preis, Kilometerzahl pro Jahr) und Felder, in denen sich die berechneten Werte (Gesamtkosten) dann automatisch ändern.	Sich verändernde Situationen mit Termen beschreiben; dazu Variablen nutzen. Tabellenkalkulation unterstützt mit dem Zellbezug, der in Formeln eingebunden wird, die Vorstellung der Variablen als allgemeine Zahl in einem Term
	Variable ... als allgemeine Zahl Terme ... und ihre Gleichwertigkeit	„Erfinde verschiedene Geschichten zu dem Term $12x + 50$.“ Taschengeld pro Jahr: Julia bekommt monatlich einen bestimmten Betrag und zum Geburtstag 50€. Der Basispreis bei einem Mietwagen kostet 50€ pro Tag; für jeden gefahrenen km werden zudem 12ct. berechnet.	Unterschiedliche, strukturgleiche Situationen mit einem algebraischen Term beschreiben. Terme auf ihre Gleichwertigkeit prüfen (Beschreibungsgleichheit und Einsetzungsgleichheit zum Vorstellungsaufbau nutzen)
7/8	Terme ... beschreiben veränderliche Situationen (Funktionsterme) Variable ... als allgemeine Zahl	Beim Aufbau funktionalen Denkens: „Beantworte mit Graph, Tabelle und einer Rechnung: Ein neues Haar wächst täglich um 0,3mm. Wie lang ist es nach drei Jahren?“ Parameter erkennen: „ $f(x) = m \cdot x + b$. Was bedeuten m, x und b?“	Beziehungen zwischen unabhängigen und abhängigen Variablen in verschiedenen Darstellungen beschreiben (sprachlich, graphisch, tabellarisch und algebraisch)
	Gleichungen ... aufstellen Variable ... als Unbekannte Gleichungen ... lösen	Finde den x-Wert zu einem gegebenen y-Wert: „Ein Ball kostet 2€. Wie viele Bälle kannst du für 16€ kaufen?“ Term 1: $2x + 8$ Term 2: $6x + 4$ Bestimme die Stelle, an der die Werte gleich sind. Erstelle dazu eine Tabelle und zeichne die Graphen. Überprüfe dein Ergebnis durch Einsetzen in den Term.	Werte für Variablen finden, damit verschiedene Terme den gleichen Wert haben Gleichungen auf verschiedenen Wegen lösen: z. B. systematisches Probieren / Rückwärtsrechnen / grafisch / äquivalentes Umformen Einen gemeinsamen Wert finden durch schrittweises Umformen einer Gleichung.
9/10	algebraische Objekte und Symbolik nutzen, z. B. in der Geometrie, bei Funktionen	Vergleich: Was beschreiben diese Terme? a) $2x + 2y$ b) $x^2 \cdot y$ c) $\pi \cdot x^2$ d) $\pi \cdot 2 \cdot x$ d) $\pi \cdot x^2 \cdot y$ e) $1/3 \cdot x \cdot y \cdot z$	Abhängigkeiten durch Terme beschreiben; Terme interpretieren

matische Variationen von Aufgaben angebahnt wird. Dabei werden Vorläufervorstellungen zur Variable als Unbekannte und Veränderliche aufgebaut. Auch das Gleichheitszeichen wird bereits in verschiedenen Deutungen genutzt.

Die Idee der Variable als allgemeine Zahl wird ebenfalls schon in der Grundschule vorbereitet, wenn Folgen von Punktmustern beschrieben werden und nach der Anzahl der Punkte an einer beliebigen Stelle gefragt wird. Die Frage „Wie geht es weiter?“ zielt darauf ab, die Variable als Veränderliche zu sehen und die Muster dahingehend zu untersuchen, was jeweils dazu kommt (z. B. „immer plus 3“) – ausgehend von einer bestimmten Startzahl. Das Strukturieren und Abstrahieren wird bereits hier eingeübt.

Das Modellieren mit Variablen, also das allgemeine Beschreiben strukturgleicher Situationen mit Hilfe eines algebraischen Terms, sollte gut eingebettet sein in kontextuelle Erfahrungen.¹ Dabei ist eine Tabellenkalkulation ein sinnvolles Medium: Zunächst werden Zahlenwerte in die Zellen eingetragen. Diese Zellen werden dann zum Aufstellen von Formeln und weiteren Berechnungen genutzt; sie fungieren also als Variable im Sinne einer allgemeinen Zahl, je nach Fragestellung auch als (abhängige) Variable im Sinne einer Veränderlichen:

fx	$=C5/10+E5+F5*0,06*1,9$
------	-------------------------

Für den sukzessiven Aufbau der Algebra über die Jahrgänge hinweg ist es sinnvoll, das Lösen von Gleichungen erst nach der Behandlung der (linearen) Funktionen zu erarbeiten. Im Zusammenhang mit funktionalen Betrachtungen eröffnen sich viele authentische und sinnstiftende Kontexte, die das Aufstellen und Lösen von Gleichungen plausibel und nachvollziehbar – und nicht zuletzt auch grafisch veranschaulichbar – machen.

Wohin geht die Reise?

Durch vielfältige Zugänge zur Algebra (in den Gebieten Variablen, Terme und Gleichungen) erfahren die Lernenden, wie wirkmächtig die Algebra ist. Ein genaues Nachfragen bleibt wichtig: Viele Schülerinnen und Schüler können ihr Vorgehen zwar beschreiben, jedoch zeigt sich oft, „dass aber hinter ihren Worten keine klaren Vorstellungen über die durchzuführenden Handlungen stecken“ (vgl. Malle 1993, S. 181). Dann helfen konkrete Situationen, Bedeutung aufzubauen, um sukzessive in eine Verallgemeinerung zu wechseln. So ist es sinnvoll, Zusammenhänge und Beziehungen zunächst an konkreten Beispielen erfahrbar zu machen (und dabei sollte auch systematisch an die Erfahrungen aus vorherigen Schuljahren, insbesondere auch an die Grundschule, angeknüpft werden).

Da sich sämtliche „Themenbereiche des Algebraunterrichts [...] als sehr fehleranfällig bei den Schülern erwiesen“ (Vollrath 2003, S. 1), ist es umso wichtiger, bei den Grundlagen auf einen stabilen Wissen- und Vorstellungsaufbau zu achten, denn gerade in der Algebra ist die Bedeutung des Fundaments für die weitere Arbeit in den höheren Klassen – gerade auch im Hinblick auf die Oberstufe – nicht hoch genug einzuschätzen. Hier zeigt sich nämlich eine zunehmende Abstraktion, bei der es sehr darauf ankommt, in den Grundlagen sicher operieren zu können (vgl. **Symmetrien von Gleichungen**, ab S. 38 in diesem Heft). Gelingt dies, ist auch der Übergang in die Hochschulmathematik mit weniger Hürden behaftet.

Anmerkung

- ¹ Beispiele für gute Kontexte sind zum Beispiel „Was kostet Autofahren?“ (MatheWelt in mathematik lehren, Heft 136, S. 4) oder „Wie viele Personen wohnen im Dachgeschoss?“ (mathematik lehren, Heft 169, S. 13–15).

Literatur

- Alibali, M. W./Knuth, E. J./Hattikudur, S./McNeil, N. M./Stephens, A. C. (2007): A longitudinal examination of middle school students' understanding of the equal sign and equivalent equations. – In: mathematical thinking and learning, 9(3), S. 221–247.
- Barzel, B./Holzäpfel, L. (2011): Gleichungen verstehen. – In: mathematik lehren Heft 169, S. 2–6.
- Fischer, A./Hefendehl-Hebeker, L./Prediger, S. (2010): Mehr als Umformen – algebraisch denken. – In: Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 33, Aulis.
- Holzäpfel, L./Loibl, K./Ufer, S. (2015): Fehler – Hindernis und Chance. mathematik lehren, Heft 191.
- Malle, G. (1993). Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Vieweg, Braunschweig.
- Marxer, M./Prediger, S. (2014): Bahn oder Auto? – Berechnungen beschreiben und durchdenken. – In: Leuders, T./Prediger, S./Barzel, B./Hußmann, S.: Mathewerkstatt 7, Cornelsen, Berlin.
- McNeil, N. M./Grandau, L./Knuth, E. J./Alibali, M. W./Stephens, A. C./Hattikudur, S./Krill, D. E.: (2006): Middle-School Students' Understanding of the Equal Sign: The Books They Read Can't Help, Cognition and Instruction, 24:3. S. 367–385.
- Nydegger, A. (2011): Wer wohnt wo? Terme und Gleichungen aus Sachsituationen gewinnen. – In: mathematik lehren, Heft 169, S. 16–20.
- Prediger, S. (2009): Inhaltliches Denken vor Kalkül. – In: Fritz, A./Schmidt, S. (Hrsg.): Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I, Beltz Verlag, Weinheim, S. 213–234.
- Stacey, K. (2011): Eine Reise über die Jahrgänge. – In: mathematik lehren, Heft 169, Friedrich Verlag, S. 8–12.
- Steinle, V./Gvozdenko, E./Price, B./Stacey, K./Pierce, R. (2009): Investigating students' numerical misconceptions in algebra. – In: Hunter, R./Bicknell, B./Burgess, T. (Hrsg.): Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Wellington: MERGA vol 2, S. 491–498.
- Vollrath, H.-J. (2003): Algebra in der Sekundarstufe. Spektrum, Berlin.
- Vom Hofe, R. (1992): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell. – In: Journal für Mathematik-Didaktik, 13(4), S. 345–364.
- Zwetzschler, L./Prediger, S. (2013): Der lange Weg zum Herstellen von Beziehungen. Fachdidaktische Entwicklungsforschung zur Gleichwertigkeit algebraischer Terme. Der lange Weg zum Unterrichtsdiseign – Zur Begründung und Umsetzung fachdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsprogramme. Waxmann, Münster S. 14–156.