C2: Unterrichtsplanung

15.04.2026

Marvin Krüger

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

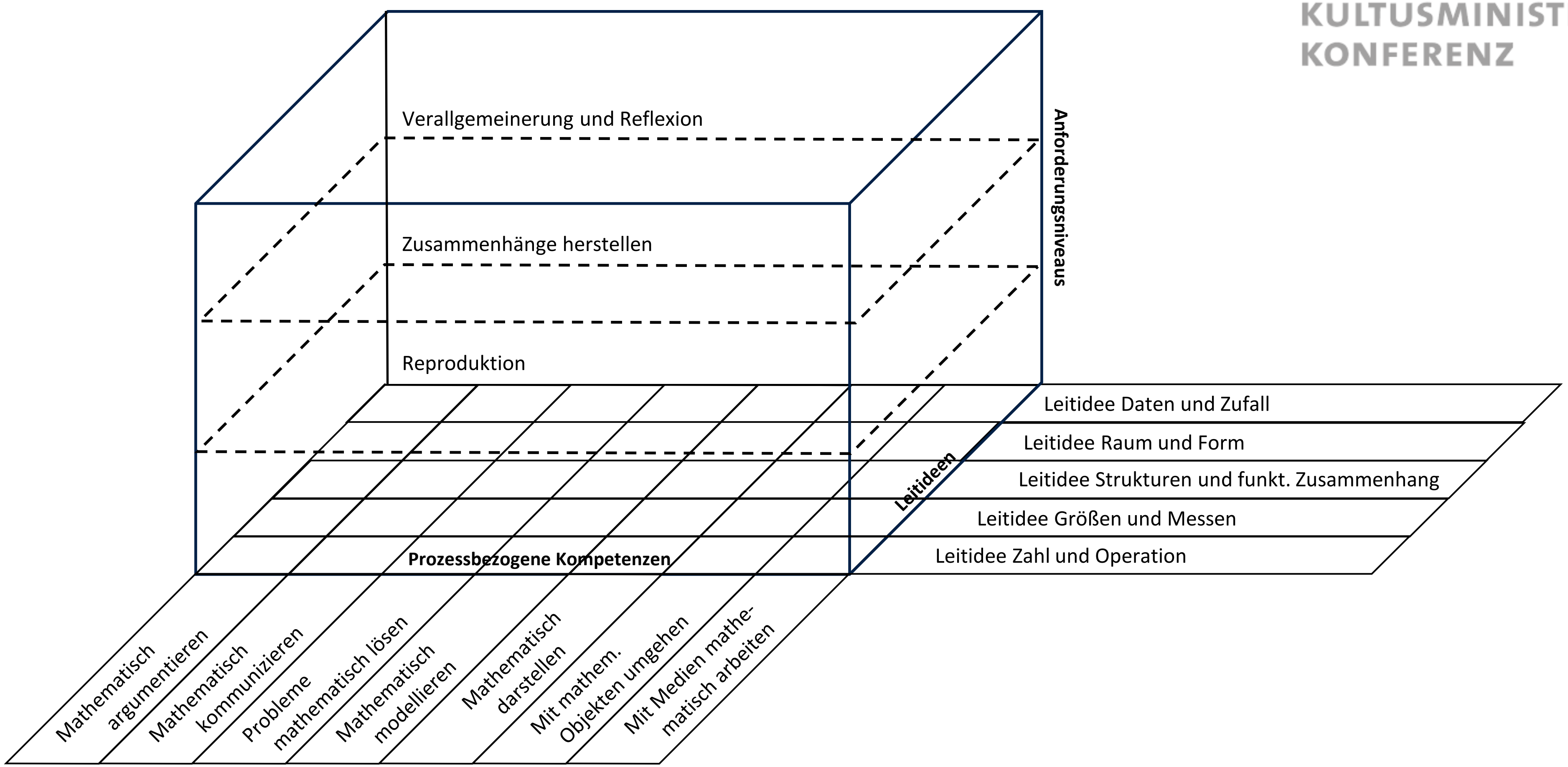
Ausbildungscurriculum

C2 Unterrichtsplanung am Bsp. aus der Sek. II

Ziel: Die LiV kennen die Phasen einer strukturierten Unterrichtsplanung, und können didaktische und methodische Entscheidungen begründet treffen und voneinander abgrenzen.

Anhand eines exemplarischen Beispiels werden die verschiedenen Phasen der Unterrichtsplanung behandelt: Fachliche Klärung und didaktische Analyse im Rahmen der didaktischen Rekonstruktion (also unter besonderer Berücksichtigung der Lernenden und mit Rückbezügen), Planung der Tiefenstruktur unter Zuhilfenahme eines Prozessmodells, sowie Planung der Sichtstruktur.

Kompetenzmodell



Kultusministerkonferenz (Hrsg.) (2022) Beschlüsse der Kultusministerkonferenz: Bildungsstandards im Fach Mathematik Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA) . Beschluss vom 14.10.2004 i.d.F. vom 23.06.2022.

Ausbildungstag

08:30	Begrüßung, Orga, Berichte aus der Praxis
09:20	Vorbereitung Hospitation / Pause
09:30	Unterrichtsstunde, 052
10:20	Pause und Vorbereitung Reflexion
10:30	Reflexion
11:30	Didaktische Rekonstruktion
12:30	Mittagspause
13:00	Prozessmodell
xx:xx	Pause
16:xx	Abschlussrunde

Unterrichtshospitation

Worauf muss geachtet werden?

- Handys ausschalten!
- Kein Essen/Trinken/Kaugummi!
- Keine Gespräche!
- Nicht helfen!
- Keine Photos!
- Machen Sie sich geeignete Notizen, um im Anschluss eine Rückmeldung geben zu können!

Seien Sie vorbildlich, respektvoll und passiv!

Unterrichtshospitation

Was soll ich beobachten?

Problematisierung und inhaltliche Kohärenz: An welchen Stellen ist der rote Faden zu erkennen, wo wird die Stundenfrage deutlich? Wie fügt sich die Problematisierung ein? Wer übernimmt Verantwortung dafür?

Sicherung: Wie wird die Sicherungsphase angebahnt und durchgeführt? Bei wem liegt die Verantwortung? Was nehmen die Schüler*innen aus der Stunde mit?

Differenzierung: Wie wird die Adaptivität sichergestellt? Welche Angebote werden gemacht und wie werden sie angenommen? Differenzierte Förderung, nicht homogenisierende Förderung!

Kognitive Aktivierung: Wie wird kognitive Selbstständigkeit ermöglicht? Anknüpfung an Vorwissen? Aktivierung durch Kommunikation? (Achten Sie explizit auch auf einige ausgewählte Schüler*innen)

Ziel ist eine Reflexion in Hinblick auf den <u>eigenen Unterricht</u>! Was nehme ich für meinen Unterricht mit? Welche Erfahrungen habe ich in ähnlichen Situationen gemacht? Wie würde ich zukünftig handeln?

Organisatorisches

Module

Termine SJ 2026/2027

Stand 14.04.2026

HJ	Datum	Modul	LiV	Ort
1[a]	Sommerferien			
	26.08.2026	A1		
	23.09.2026	A2		
	Herbstferien			
	04.11.2026	A3		
	02.12.2026	A4		
	Weihnachtsferien			
	13.01.2027	A5		
2				

Gemeinsam Ausbilden
Für Ausbildungslehrkräfte

Titel:	Gemeinsam ausbilden im Fach Mathematik
Kennung:	AUS0650
Datum:	18.05.2026
Uhrzeit:	16:00 – 18:00
Ort:	online
Referentin:	Dr. Maike Tesch
Schwerpunkt:	Konstruktive Unterstützung

Bitte weitergeben!

Bewertungskriterien

Fachkompetenz
Hat die LiV sachlich und fachlich korrekt unterrichtet?

Didaktische Kompetenz
Hat die LiV den Unterricht sinnvoll strukturiert und flexibel auf sich veränderte Situationen reagiert?
Konnte die LiV ihr didaktisches Konzept und dessen Realisierung angemessen reflektieren?

Methodische Kompetenz
Hat die LiV die Selbstständigkeit der Lernenden (…) gefördert?
Hat die LiV präzise und verständlich formuliert?

Diagnostische Kompetenz
Hat die LiV die unterschiedlichen Voraussetzungen und Kompetenzen der Lernenden berücksichtigt?

Leitungskompetenz
Ist die LiV überzeugend und als Vorbild aufgetreten?
Ist die LiV mit den Lernenden respektvoll und wertschätzend umgegangen?

Die „neuen“ Fachanforderungen

(2. Auflage von 2024)

Sekundarstufe I:
Überarbeitung auf der Grundlage der Bildungsstandards von 2022

Sekundarstufe II:
„nur“ Anpassungen,
insb. beim Abitur auf gA

https://fachportal.lernnetz.de/sh/fachanforderungen.html

Der fachliche Teil der FA gilt seit dem Schuljahr 2024/25 aufwachsend von Kl. 5 und 11.
Der Allgemeine Teil trat zum Schuljahr 2024/25 für alle Stufen und Fächer in Kraft!

	Jahrgangsstufe					
SJ	5	6	7	8	9	10
2024 / 25	neu	alt	alt	alt	alt	alt
2025 / 26	neu	neu	alt	alt	alt	alt
2026 / 27	neu	neu	neu	alt	alt	alt
2027 / 28	neu	neu	neu	neu	alt	alt
2028 / 29	neu	neu	neu	neu	neu	alt
2029 / 30	neu	neu	neu	neu	neu	neu
2030 / 31	neu	neu	neu	neu	neu	neu

Berichte aus der Unterrichtspraxis

Unterrichtsplanung

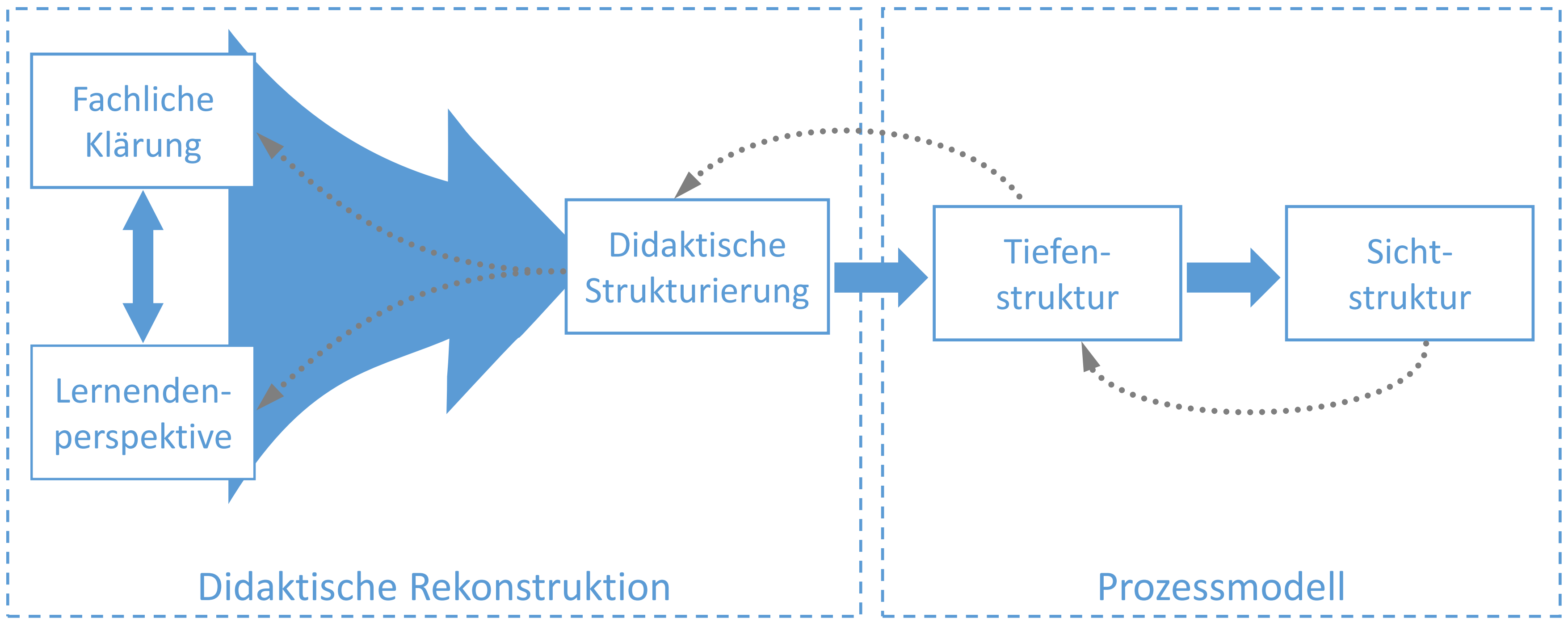
Unterrichtsplanung
Murmelphase

Erfahrungen? Probleme? Freude? …

Didaktische Rekonstruktion

Unterrichtsplanung

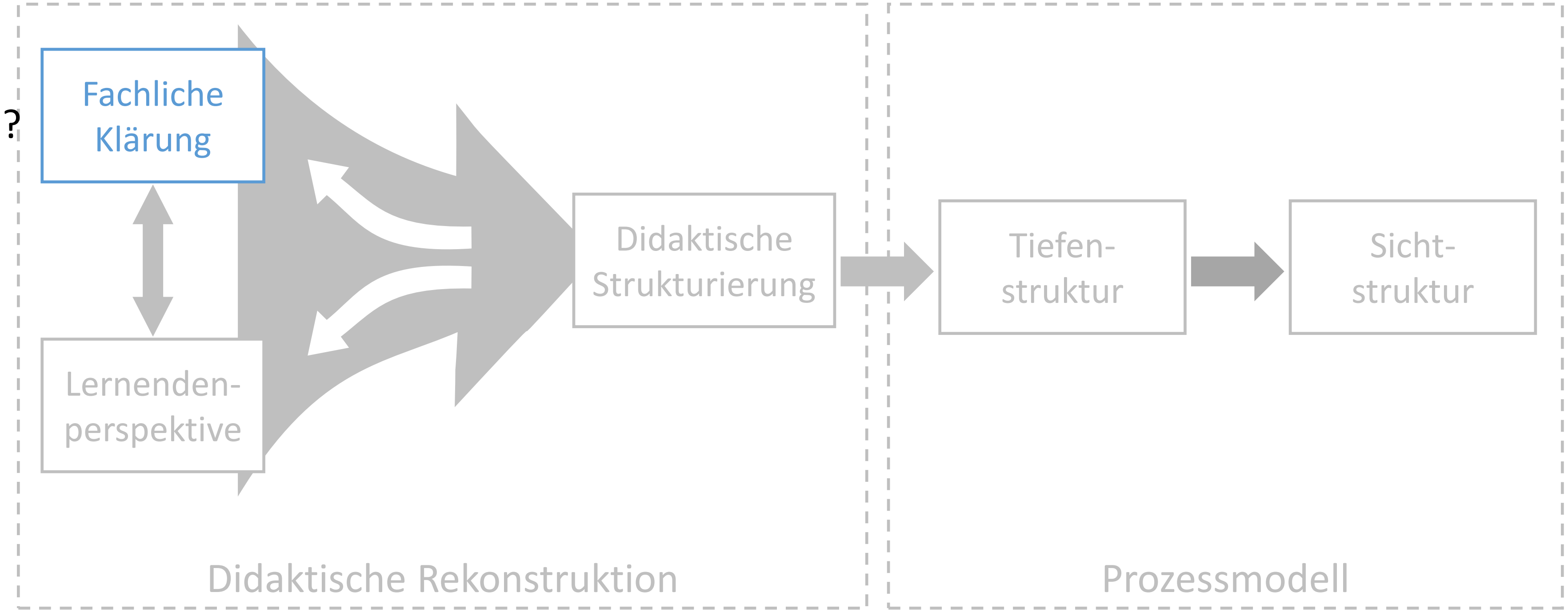
Übersicht



Unterrichtsplanung

1. Schritt: Fachliche Klärung

Worum geht es?



Vorabaufgaben

1. Schritt: Fachliche Klärung

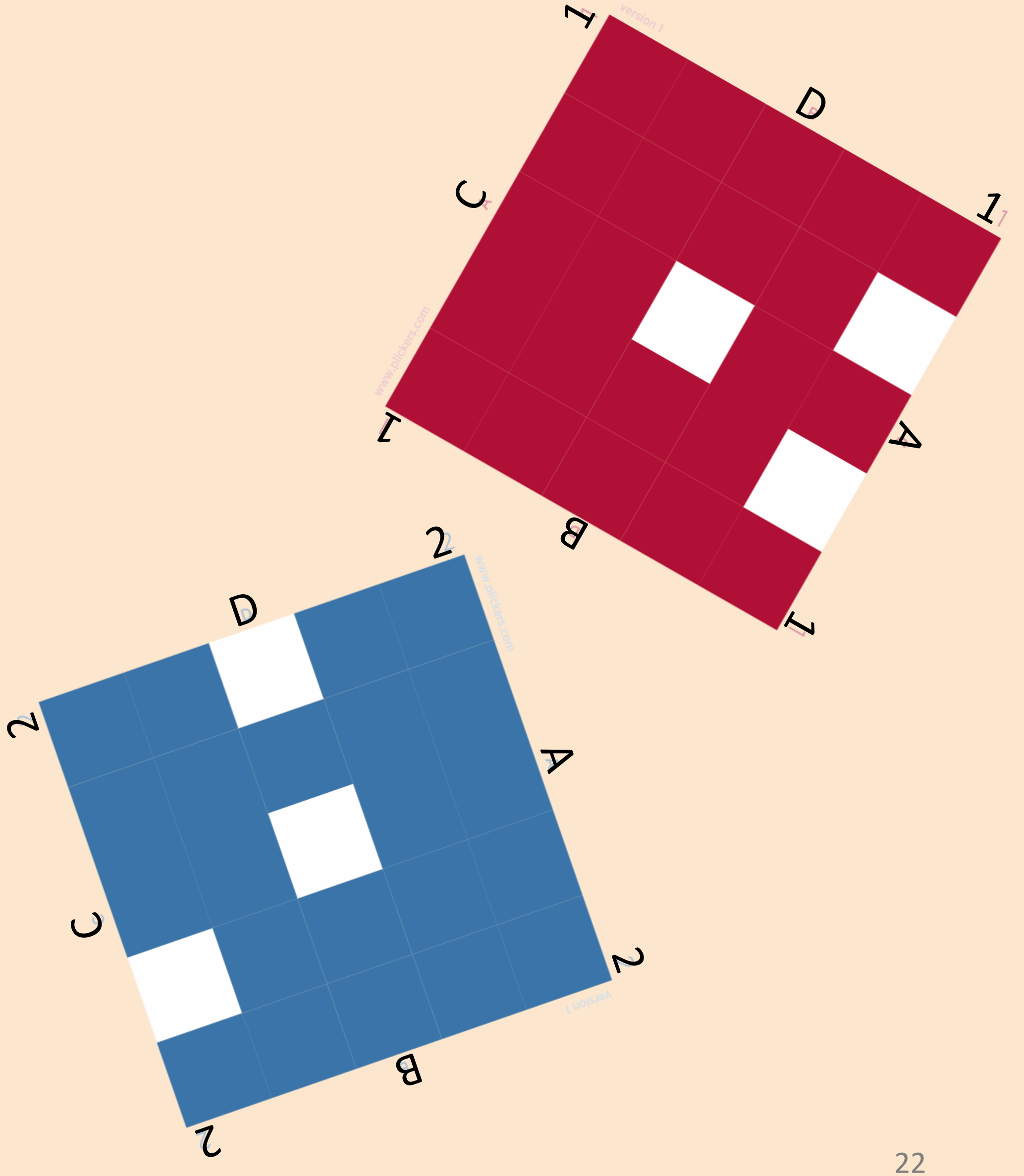
… mit ***Plickers***:

– Jede*r erhält eine Code-Karte.

– Es werden Single-Choice-Fragen gestellt.

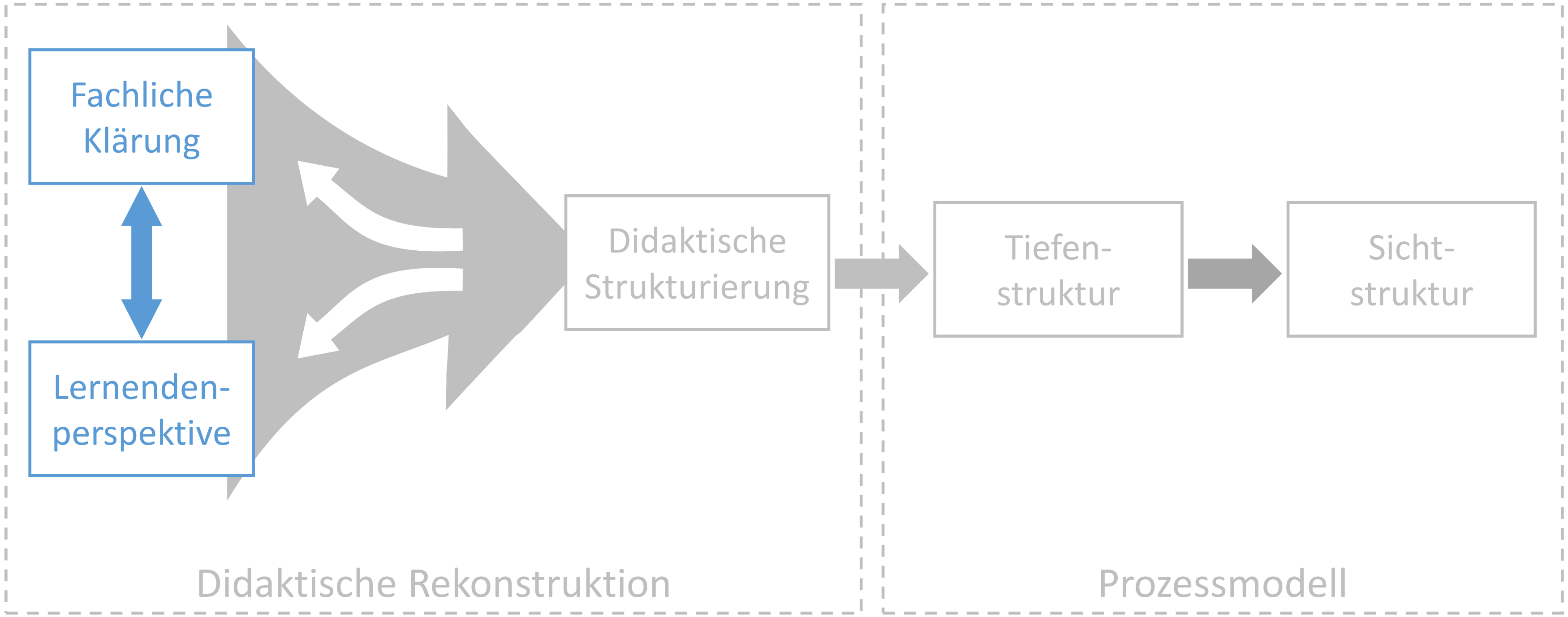
– Die TN antworten durch Hochhalten ihrer Code-Karte in entsprechender Ausrichtung.

– Das Gruppenergebnis wird visualisiert, die Einzelantworten nicht.



Unterrichtsplanung

2. Schritt: + Lernendenperspektive



Unterrichtsplanung

2. Schritt: + Lernendenperspektive

Fachliche Klärung	Lernende
Bedeutung des Gegenstands innerhalb der Schulmathematik	Bedeutung des Gegenstands für SuS
Fachliche Zugänge, ggf. Anwendungsbezüge	Zugängliche Betrachtungsweisen für SuS
Benötigte Vorkenntnisse / Zusammenhänge mit anderen UE	Erwartete Vorstellungen / Vorkenntnisse von SuS
Wichtige Definitionen, Sätze und math. Tätigkeiten	Zu fördernde inhaltliche und prozessbezogene Kompetenzen
Mögliche fachliche Schwierigkeiten	Fachl. Schwierigkeiten für SuS und typische Fehlvorstellungen
Didaktischen Ansätze / Grundvorstellungen	Mögliche unterrichtliche Zugänge und ggf. Darstellungsformen
Übliche Schreib- und Sprechweisen	Sprachliche Voraussetzungen der SuS

ABSHAGEN in BASISWISSEN LEHRERBILDUNG: Mathematik unterrichten, S. 234/235

Unterrichtsplanung

Fachliche Klärung mit Blick auf die Lernenden

Suchen Sie sich zu zweit/dritt Aspekte aus der vorherigen Tabelle, zu denen Sie unterrichtsplanerische Vorüberlegungen anstellen.

Notieren Sie Ihre Ergebnisse bei OPSH:

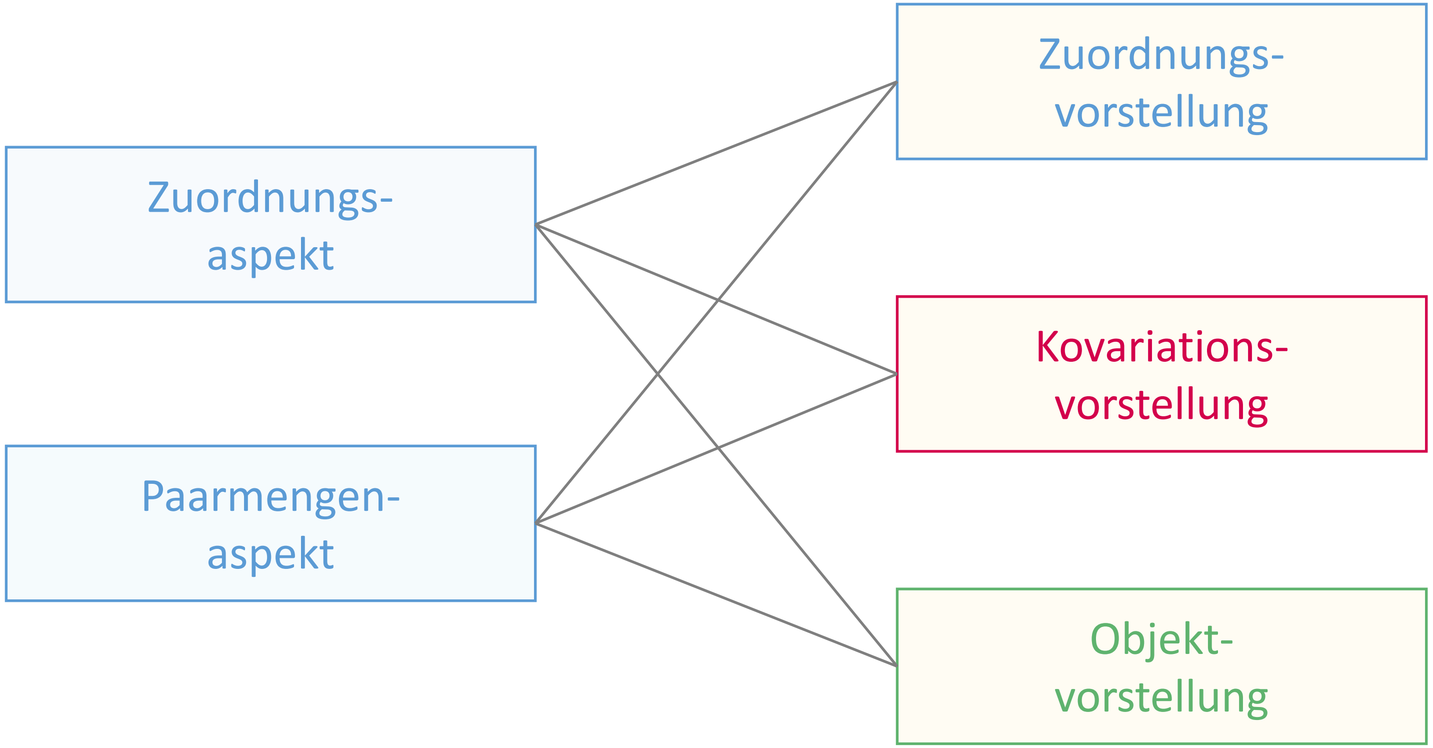
https://opsh.lernnetz.de/pl/c66c642b9a41d0e644578145bd86aa0d

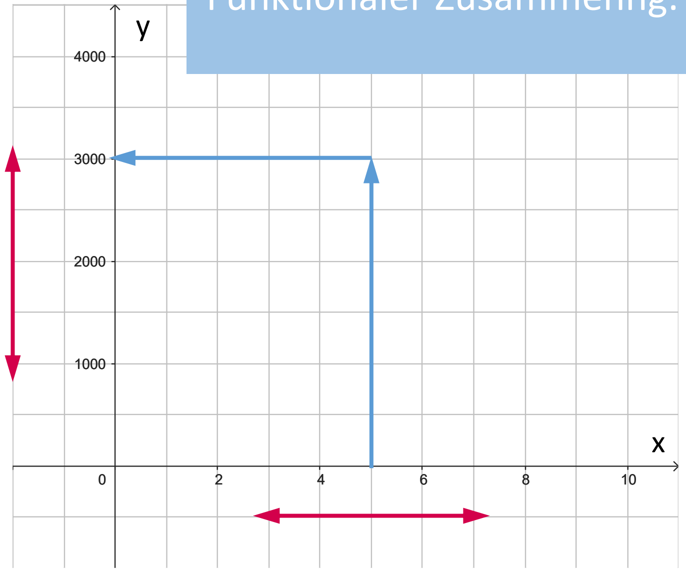
25 min

Funktionen

Aspekte und Grundvorstellungen

Wdh. aus **Modul B2**
Funktionaler Zusammenhg.





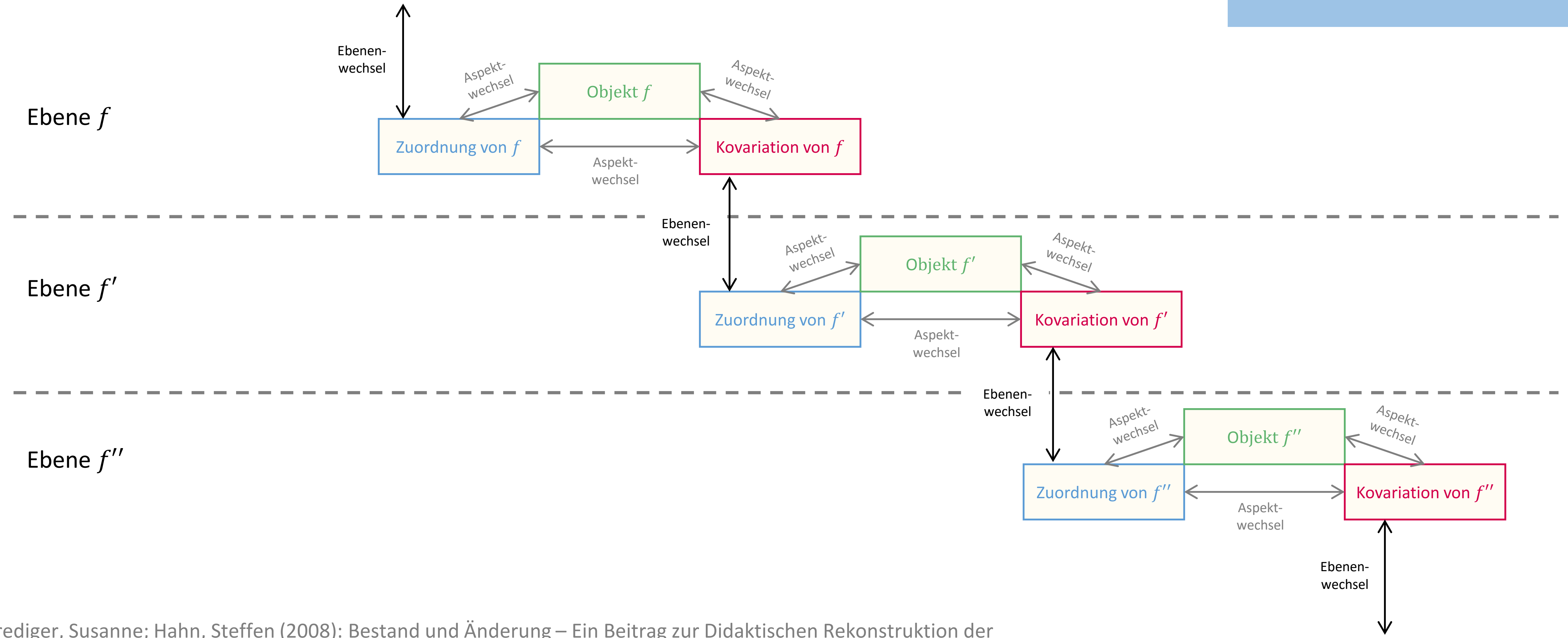
x	y
4,0	2850
4,5	2890
5,0	3000
5,5	2920
6,0	2960

Greefrath, G. u. a. (2016): *Didaktik der Analysis*, Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag

Lernendenperspektive

Schwierigkeiten beim Ebenenwechsel im funktionalen Zusammenhang

Wdh. aus **Modul B3**
Funkt. Zusammenhg. SEK II



Prediger, Susanne; Hahn, Steffen (2008): Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. In Journal für Mathematikdidaktik 29 (2008) 3/4 , S. 163-198.

Lernendenperspektive

Schwierigkeiten beim Ebenenwechsel im funktionalen Zusammenhang

Wdh. aus **Modul B3**
Funkt. Zusammenhg. SEK II

Zu den Aspektwechseln im funktionalen Zusammenhang (also dem Zusammenhang der damit verbundenen Grundvorstellungen) kommt nun noch ein Ebenenwechsel zwischen Änderungsrate und Bestand hinzu.

Zwischen den Funktionen auf den verschiedenen Ebenen besteht ein (übrigens auch **funktionaler**) **Zusammenhang**. Der **Kovariationsaspekt von f** wird also in Zusammenhang gebracht mit dem **Zuordnungsapekt von f‘ oder F**.

D.h., die Lernenden müssen nicht nur erfassen, wie sich beide Größen der Funktion f miteinander verändern, sondern dieser Veränderung auch noch einen Wert zuordnen (eben den Funktionswert von f‘ bzw. F).

Prediger, Susanne; Hahn, Steffen (2008): Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. In Journal für Mathematikdidaktik 29 (2008) 3/4 , S. 163-198.

Ebenenwechsel im Kontext

Bedeutung von $f(x)$ für $a \leq x \leq b$	Bedeutung von $\int_a^b f(x)\,dx$
Die Ordinate eines Punktes (auf einer geeigneten Kurve oberhalb der x-Achse) an der Stelle x	Flächeninhalt der von der x-Achse und der Kurve begrenzten Fläche zwischen den Stellen a und b
Geschwindigkeit zum Zeitpunkt x	
An der Wegstelle x wirkende Kraftkomponente	
	Volumen der Kugelschale vom inneren Radius a und äußeren Radius b
Flächeninhalt der Querschnittsfläche eines Körpers in der Höhe x	
	Ordinatenzuwachs der Kurve zwischen den Stellen a und b

5 min

Ebenenwechsel im Kontext

Bedeutung von $\boldsymbol{f(x)}$ für $\boldsymbol{a \leq x \leq b}$	Bedeutung von $\boldsymbol{\int_a^b f(x)\, dx}$
Die Ordinate eines Punktes (auf einer geeigneten Kurve oberhalb der x-Achse) an der Stelle x	Flächeninhalt der von der x-Achse und der Kurve begrenzten Fläche zwischen den Stellen a und b
Geschwindigkeit zum Zeitpunkt x	Länge der zwischen den Zeitpunkten a und b zurückgelegten Strecke
An der Wegstelle x wirkende Kraftkomponente	zwischen den Stellen a und b verrichtete Arbeit
Oberflächeninhalt der Kugel mit dem Radius x	Volumen der Kugelschale vom inneren Radius a und äußeren Radius b
Flächeninhalt der Querschnittsfläche eines Körpers in der Höhe x	Volumen des Körpers zwischen den Höhen a und b
Steigung einer Kurve im Punkt an der Stelle x	Ordinatenzuwachs der Kurve zwischen den Stellen a und b

Integralbegriff

Aspekte

Maß-
aspekt

Produktsummen-
aspekt

Stammfunktions-
aspekt

Greefrath, G. u. a. (2016): *Didaktik der Analysis*, Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag

Integralbegriff
Grundvorstellungen

klassischer Zugang

Flächeninhalts-vorstellung	Möglichst genaue Bestimmung des Inhalts einer (krummlinig) berandeten Fläche
(Re)Konstruktions-vorstellung	(Re-)Konstruktion einer Größe aus geg. Änderungsdaten als auch die (Re-)Konstruktion einer Stammfunktion einer geg. Funktion.
Kumulations-vorstellung	Prozess der Sammlung bzw. des Aufsummierens von Teilprodukten zu einer (Produkt-)Summe.
Mittelwerts-vorstellung	Berechnung des Mittelwertes einer gegebenen Funktion über einem bestimmten Intervall mithilfe des Integrals über diesem Intervall, dividiert durch die Länge des Intervalls

Greefrath, G. u. a. (2016): *Didaktik der Analysis*, Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag

Integralbegriff
Grundvorstellungen

Flächeninhalts-vorstellung

(Re)Konstruktions-vorstellung

Kumulations-vorstellung

Mittelwerts-vorstellung

Die Schülerinnen und Schüler können….

Leitidee: Algorithmus und Zahl (L1)

- Grenzwerte auf Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs bei der Bestimmung nutzen.

Leitidee: Messen (L2)

- Inhalte von Flächen, die durch Graphen begrenzt sind, bestimmen.
- Bestände aus Änderungsraten und Anfangsbestand berechnen.
- das Volumen von Körpern bestimmen, die durch Rotation um die Abszissenachse entstehen.

Leitidee: Funktionaler Zusammenhang (L4)

- das bestimme Integral deuten, insbesondere als (re-) konstruierten Bestand.
- geometrisch-anschaulich den Hauptsatz als Beziehung zwischen Ableitungs- und Integralbegriff begründen.
- Funktionen mittels Stammfunktionen integrieren.

Ergänzte Kompetenzen:

- das bestimmte Integral als verallgemeinerte Flächenbestimmung deuten.
- den Stammfunktionsgraphen aus dem Funktionsgraphen entwickeln und umgekehrt.
- das bestimmte Integral als verallgemeinerte Mittelwertberechnung deuten.
- Mittelwerte mit Hilfe des Integrals bestimmen

Greefrath, G. u. a. (2016): *Didaktik der Analysis*, Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag

KMK (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allg. Hochschul-reife* (Beschl. D. Kultusministerkonf. vom 18.10.2012). Köln: Wolters Kluwer.

Integralbegriff
Grundvorstellungen

klassischer Zugang

Flächeninhalts-vorstellung

(Re)Konstruktions-vorstellung

Kumulations-vorstellung

Mittelwerts-vorstellung

Die Schülerinnen und Schüler können….

Leitidee: Algorithmus und Zahl (L1)

- **Grenzwerte auf Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs bei der Bestimmung nutzen.**

Leitidee: Messen (L2)

- **Inhalte von Flächen, die durch Graphen begrenzt sind, bestimmen.**
- Bestände aus Änderungsraten und Anfangsbestand berechnen.
- das Volumen von Körpern bestimmen, die durch Rotation um die Abszissenachse entstehen.

Leitidee: Funktionaler Zusammenhang (L4)

- das bestimme Integral deuten, insbesondere als (re-) konstruierten Bestand.
- **geometrisch-anschaulich den Hauptsatz als Beziehung zwischen Ableitungs- und Integralbegriff begründen.**
- Funktionen mittels Stammfunktionen integrieren.

Ergänzte Kompetenzen:

- **das bestimmte Integral als verallgemeinerte Flächenbestimmung deuten.**
- den Stammfunktionsgraphen aus dem Funktionsgraphen entwickeln und umgekehrt.
- das bestimmte Integral als verallgemeinerte Mittelwertberechnung deuten.
- Mittelwerte mit Hilfe des Integrals bestimmen

Greefrath, G. u. a. (2016): *Didaktik der Analysis*, Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag

KMK (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allg. Hochschul-reife* (Beschl. D. Kultusministerkonf. vom 18.10.2012). Köln: Wolters Kluwer.

Integralbegriff

Grundvorstellungen

Flächeninhalts-
vorstellung

(Re)Konstruktions-
vorstellung

Kumulations-
vorstellung

Mittelwerts-
vorstellung

Die Schülerinnen und Schüler können….

Leitidee: Algorithmus und Zahl (L1)

- **Grenzwerte auf Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs bei der Bestimmung nutzen.**

Leitidee: Messen (L2)

- Inhalte von Flächen, die durch Graphen begrenzt sind, bestimmen.
- **Bestände aus Änderungsraten und Anfangsbestand berechnen.**
- das Volumen von Körpern bestimmen, die durch Rotation um die Abszissenachse entstehen.

Leitidee: Funktionaler Zusammenhang (L4)

- **das bestimme Integral deuten, insbesondere als (re-) konstruierten Bestand**.
- **geometrisch-anschaulich den Hauptsatz als Beziehung zwischen Ableitungs- und Integralbegriff begründen.**
- Funktionen mittels Stammfunktionen integrieren.

Ergänzte Kompetenzen:

- das bestimmte Integral als verallgemeinerte Flächenbestimmung deuten.
- den Stammfunktionsgraphen aus dem Funktionsgraphen entwickeln und umgekehrt.
- das bestimmte Integral als verallgemeinerte Mittelwertberechnung deuten.
- Mittelwerte mit Hilfe des Integrals bestimmen

Greefrath, G. u. a. (2016): *Didaktik der Analysis*, Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag

KMK (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allg. Hochschul-reife* (Beschl. D. Kultusministerkonf. vom 18.10.2012). Köln: Wolters Kluwer.

Integralbegriff

Grundvorstellungen

Flächeninhalts-vorstellung

(Re)Konstruktions-vorstellung

Kumulations-vorstellung

Mittelwerts-vorstellung

Die Schülerinnen und Schüler können….

Leitidee: Algorithmus und Zahl (L1)

- **Grenzwerte auf Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs bei der Bestimmung nutzen.**

Leitidee: Messen (L2)

- Inhalte von Flächen, die durch Graphen begrenzt sind, bestimmen.
- Bestände aus Änderungsraten und Anfangsbestand berechnen.
- **das Volumen von Körpern bestimmen, die durch Rotation um die Abszissenachse entstehen.**

Leitidee: Funktionaler Zusammenhang (L4)

- das bestimme Integral deuten, insbesondere als (re-) konstruierten Bestand.
- geometrisch-anschaulich den Hauptsatz als Beziehung zwischen Ableitungs- und Integralbegriff begründen.
- Funktionen mittels Stammfunktionen integrieren.

Ergänzte Kompetenzen:

- **das bestimmte Integral als verallgemeinerte Flächenbestimmung deuten.**
- **den Stammfunktionsgraphen aus dem Funktionsgraphen entwickeln und umgekehrt.**
- das bestimmte Integral als verallgemeinerte Mittelwertberechnung deuten.
- Mittelwerte mit Hilfe des Integrals bestimmen

Greefrath, G. u. a. (2016): *Didaktik der Analysis*, Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag

KMK (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allg. Hochschul-reife* (Beschl. D. Kultusministerkonf. vom 18.10.2012). Köln: Wolters Kluwer.

Integralbegriff

Grundvorstellungen

Flächeninhalts-vorstellung

(Re)Konstruktions-vorstellung

Kumulations-vorstellung

Mittelwerts-vorstellung

Die Schülerinnen und Schüler können….

Leitidee: Algorithmus und Zahl (L1)

- Grenzwerte auf Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs bei der Bestimmung nutzen.

Leitidee: Messen (L2)

- Inhalte von Flächen, die durch Graphen begrenzt sind, bestimmen.
- Bestände aus Änderungsraten und Anfangsbestand berechnen.
- das Volumen von Körpern bestimmen, die durch Rotation um die Abszissenachse entstehen.

Leitidee: Funktionaler Zusammenhang (L4)

- das bestimme Integral deuten, insbesondere als (re-) konstruierten Bestand.
- geometrisch-anschaulich den Hauptsatz als Beziehung zwischen Ableitungs- und Integralbegriff begründen.
- Funktionen mittels Stammfunktionen integrieren.

Ergänzte Kompetenzen:

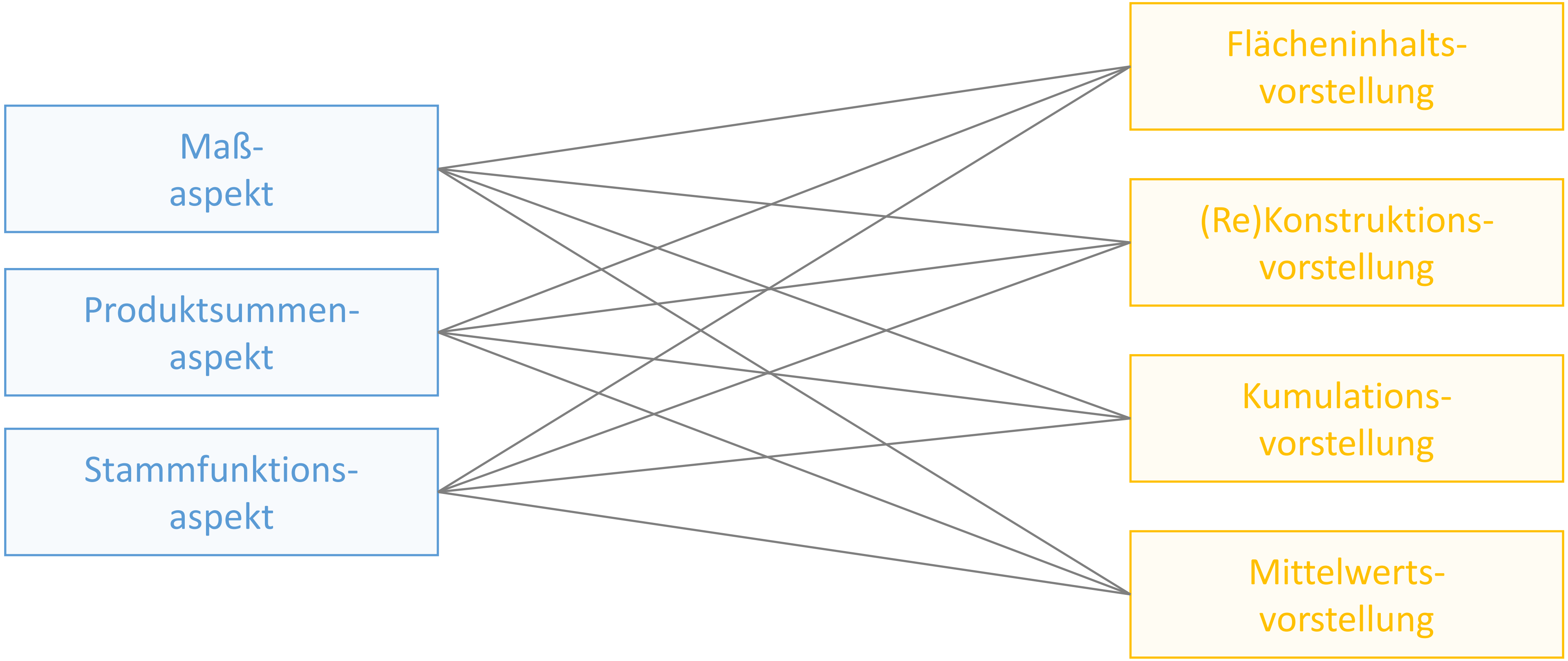
- das bestimmte Integral als verallgemeinerte Flächenbestimmung deuten.
- den Stammfunktionsgraphen aus dem Funktionsgraphen entwickeln und umgekehrt.
- **das bestimmte Integral als verallgemeinerte Mittelwertberechnung deuten.**
- **Mittelwerte mit Hilfe des Integrals bestimmen**

Greefrath, G. u. a. (2016): *Didaktik der Analysis*, Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag

KMK (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allg. Hochschul-reife* (Beschl. D. Kultusministerkonf. vom 18.10.2012). Köln: Wolters Kluwer.

Integralbegriff

Aspekte und Grundvorstellungen



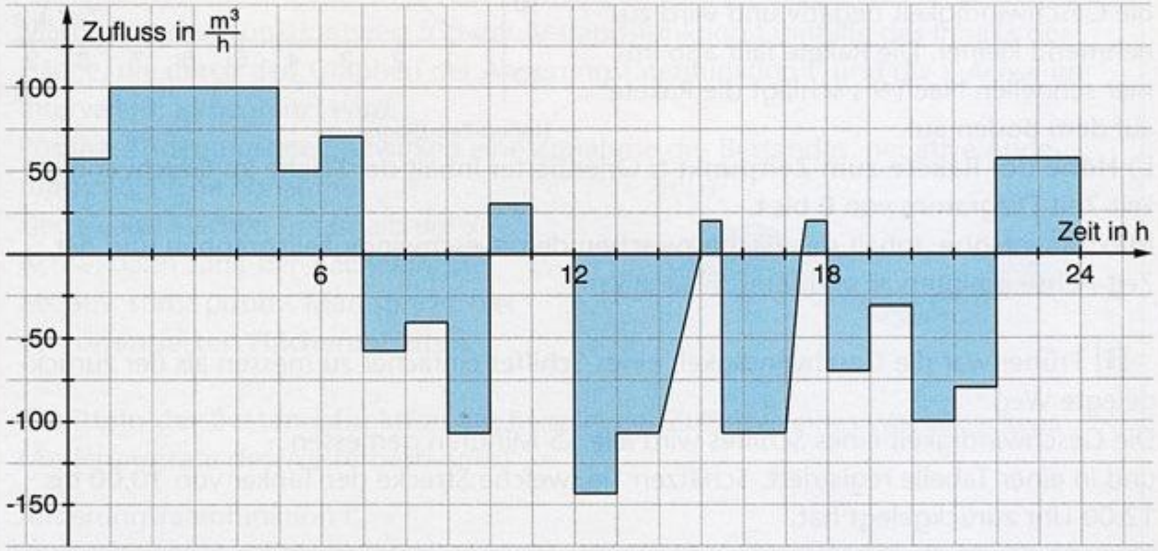
Ziel im Unterricht: Vermittlung eines umfassenden Bildes der Grundvorstellungen und Aspekte zum Integralbegriffs.

Greefrath, G. u. a. (2016): *Didaktik der Analysis*, Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag

Integralbegriff

Zugang: Beispiel A

6 In einem Pumpspeicherkraftwerk wird in Zeiten von „Stromüberschuss“ Wasser in einen Speichersee gepumpt. Im Bedarfsfall fließt Wasser aus dem Speichersee durch die stromerzeugenden Turbinen ab, um Spitzen des Stromverbrauches aufzufangen. In der Abbildung ist der Zufluss über 24 Stunden dargestellt.



a) Interpretieren Sie das Diagramm.

b) Schätzen Sie mit dem Diagramm die Wassermenge, um die sich die Gesamtwassermenge in den dargestellten 24 Stunden verändert hat.

c) Skizzieren Sie einen Graphen, der zu jedem Zeitpunkt die zugeflossene Wassermenge seit Beginn der Messung darstellt.

Schmidt, G, Körner, H., Lergenmüller, A. (Hrsg.) (2011). *Mathematik Neue Wege. Arbeitsbuch für Gymnasien, Analysis II*. Braunschweig: Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers.
Zitiert in: Greefrath, G. u. a. (2016): *Didaktik der Analysis*, Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag

Integralbegriff

Zugang: Beispiel B

Zeichnen Sie dreimal den Graphen G_f der Funktion f: $f(x) = x^2$; $D_f = \mathbb{R}$, für $0 \leq x \leq 1$; Einheit: 10 cm.

a) Das Intervall [0; 1] wird in zwei gleich lange Teilintervalle zerlegt. Über jedem Teilintervall werden zwei Rechtecke errichtet, die dem Graphen G_f (1) „einbeschrieben" bzw. (2) „umbeschrieben" sind. Berechnen Sie den Wert der „Untersumme" s_2, den Wert der „Obersumme" S_2 sowie den Wert der Differenz $S_2 - s_2$.

b) Das Intervall [0; 1] wird in vier gleich lange Teilintervalle zerlegt. Über jedem Teilintervall werden zwei Rechtecke errichtet, die dem Graphen G_f (1) „einbeschrieben" bzw. (2) „umbeschrieben" sind. Berechnen Sie den Wert der „Untersumme" s_4, den Wert der „Obersumme" S_4 sowie den Wert der Differenz $S_4 - s_4$.

c) Das Intervall [0; 1] wird in acht gleich lange Teilintervalle zerlegt. Über jedem Teilintervall werden zwei Rechtecke errichtet, die dem Graphen G_f (1) „einbeschrieben" bzw. (2) „umbeschrieben" sind. Berechnen Sie den Wert der „Untersumme" s_8, den Wert der „Obersumme" S_8 sowie den Wert der Differenz $S_8 - s_8$.

Übertragen Sie die Tabelle in Ihr Heft und ergänzen Sie sie dann dort.

n	s_n	S_n	$S_n - s_n$
2			
4			
8			

Was fällt Ihnen auf?

Schätz, U., Eisentraut, F. (Hrsg.) (2013). *delta 12. Mathematik für Gymnasien*. Bamberg: Buchners.
Zitiert in: Greefrath, G. u. a. (2016): *Didaktik der Analysis*, Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag

Integralbegriff

Zugang: Beispiel C

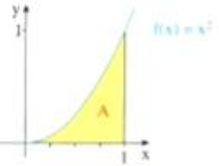
2. Die Streifenmethode des Archimedes

A. Die Grundidee

Der bedeutendste Mathematiker der Antike war *Archimedes von Syrakus*, der 287 v. Chr. bis 212 v. Chr. lebte. Ihm gelang die exakte Bestimmung des Flächeninhalts eines Parabelsegments. Damit war er seiner Zeit um 2000 Jahre voraus, denn erst um 1630 wurden seine Theorien durch Cavalieri sowie später durch Newton und Leibniz fortgesetzt (um 1670) und weiterentwickelt, sodass Differential- und *Integralrechnung* entstanden, mathematische Grundpfeiler der modernen Naturwissenschaften.
Das Flächenberechnungsverfahren des Archimedes ist auch heute noch von zentraler Bedeutung für das Verständnis der Integralrechnung. Daher versuchen wir nun, die Grundidee des Archimedes nachzuvollziehen, die *Streifenmethode*.

Archimedes – Sohn des Astronomen Pheidias – lebte in Syrakus. Er bestimmte den Kreisumfang und die Kreiszahl Pi, berechnete Volumen und Oberfläche der Kugel, baute Brennspiegel, Wurfmaschinen und die archimedische Schraube und entdeckte die Gesetze des Hebels, des Schwerpunktes, des Auftriebes und der geneigten Ebene.
Im Zweiten Punischen Krieg wurde er von römischen Legionären getötet, die Syrakus eroberten. Seine letzten Worte sollen gelautet haben: „Noli turbare circulos meos!" (Störe meine Kreise nicht!)

Beispiel: Der Flächeninhalt A des abgebildeten Parabelsegments, welches zwischen dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ und der x-Achse über dem Intervall $[0 ; 1]$ liegt, soll näherungsweise bestimmt werden.



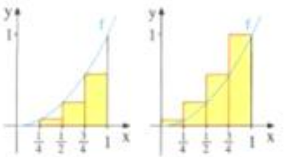
Lösung:

Wir unterteilen die Fläche in eine Anzahl von vertikalen Streifen. Die Fläche eines jeden solchen Streifens lässt sich durch zwei Rechtecke einschachteln.

So ergibt sich z. B. bei einer Einteilung in 4 Streifen eine untere Abschätzung von A durch die Inhaltssumme der ganz unter der Kurve liegenden Rechtecke (*Untersumme* U_4) sowie eine obere Abschätzung durch die Summe der Inhalte der über die Kurve hinausragenden Rechtecke (*Obersumme* O_4).

164-1

Einschachtelung durch Rechteckstreifen:



Untersumme $U_4 \leq A \leq$ Obersumme O_4

Alle Rechteckstreifen besitzen die Breite $\frac{1}{4}$, während ihre Höhen Funktionswerte der Funktion $f(x) = x^2$ an den Stellen $0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1$ sind, also
$0^2, \left(\frac{1}{4}\right)^2, \left(\frac{2}{4}\right)^2, \left(\frac{3}{4}\right)^2$ und 1^2.

$$U_4 = \frac{1}{4} \cdot \left[0^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right] = \frac{14}{64}$$

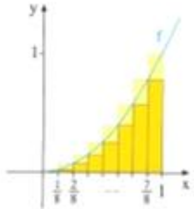
$$O_4 = \frac{1}{4} \cdot \left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1^2\right] = \frac{30}{64}$$

$$\frac{14}{64} \leq A \leq \frac{30}{64}$$

$$0{,}21 \leq A \leq 0{,}47$$

Damit kann man U_4 und O_4 wie rechts dargestellt berechnen und erhält eine Einschachtelung des gesuchten Flächeninhalts A, die leider noch nicht sehr genau ist.

Um eine größere Genauigkeit zu erzielen, kann man die Anzahl der Streifen erhöben. Geht man z. B. auf 8 Streifen, so erhält man die nebenstehende Figur (Untersumme U_8 kräftig gelb, Obersumme O_8 schwach gelb).



Die Berechnung der Rechtecksummen ergibt für den Flächeninhalt A die Abschätzung $0{,}27 \leq A \leq 0{,}40$, die schon genauer ist.

$$U_8 = \frac{1}{8} \cdot \left[0^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{2}{8}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{7}{8}\right)^2\right] = \frac{35}{128}$$

$$O_8 = \frac{1}{8} \cdot \left[\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{2}{8}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{7}{8}\right)^2 + 1^2\right] = \frac{51}{128}$$

$$\frac{35}{128} \leq A \leq \frac{51}{128}$$

$$0{,}27 \leq A \leq 0{,}40$$

Weitere Rechnungen mit noch kleineren Streifenbreiten führen auf die nebenstehende Tabelle, aus der auch ersichtlich ist, dass die Differenz aus Obersumme und Untersumme mit zunehmender Streifenzahl kleiner wird, sodass der gesuchte Inhalt A immer genauer approximiert wird. Bei 256 Streifen erhält man $A \approx 0{,}33$ auf 2 Nachkommastellen genau. Allerdings ist der Rechenaufwand dann schon extrem hoch, sodass ein Computer eingesetzt werden muss.

n	U_n	O_n	$O_n - U_n$
4	0,21	0,47	0,25
8	0,27	0,40	0,13
16	0,30	0,37	0,07
32	0,32	0,35	0,03
64	0,325	0,341	0,016
128	0,329	0,337	0,008
256	0,331	0,335	0,004

$A \approx 0{,}33$

Interessant: Das arithmetische Mittel von U_n und O_n liefert schon ab $n = 4$ einen ziemlich guten Schätzwert, nämlich 0,345.

Übung 1
Rechnen Sie das Tabellenergebnis für die Untersumme U_{16} und für die Obersumme O_{16} mithilfe Ihres Taschenrechners nach.

Bigalke, J.; Köhler, N. u. a (2001): Mathematik Analysis Band 1. Berlin: Cornelsen-Verlag

Integralbegriff

Zugang: Beispiel D

13. Berechne das Flächenstück, das von der Parabel $y = x^2$, der x-Achse und der Geraden $x = 1$ begrenzt wird, indem du in dem Ausdruck $\sum y \Delta x$ **a)** zunächst die Streifenbreite $\Delta x = 0{,}1$, **b)** dann $\Delta x = 0{,}01$ annimmst und schließlich **c)** zur Grenze $\Delta x \to 0$ übergehst. Dabei ist die Formel (vgl. § 2, Aufgabe 17)

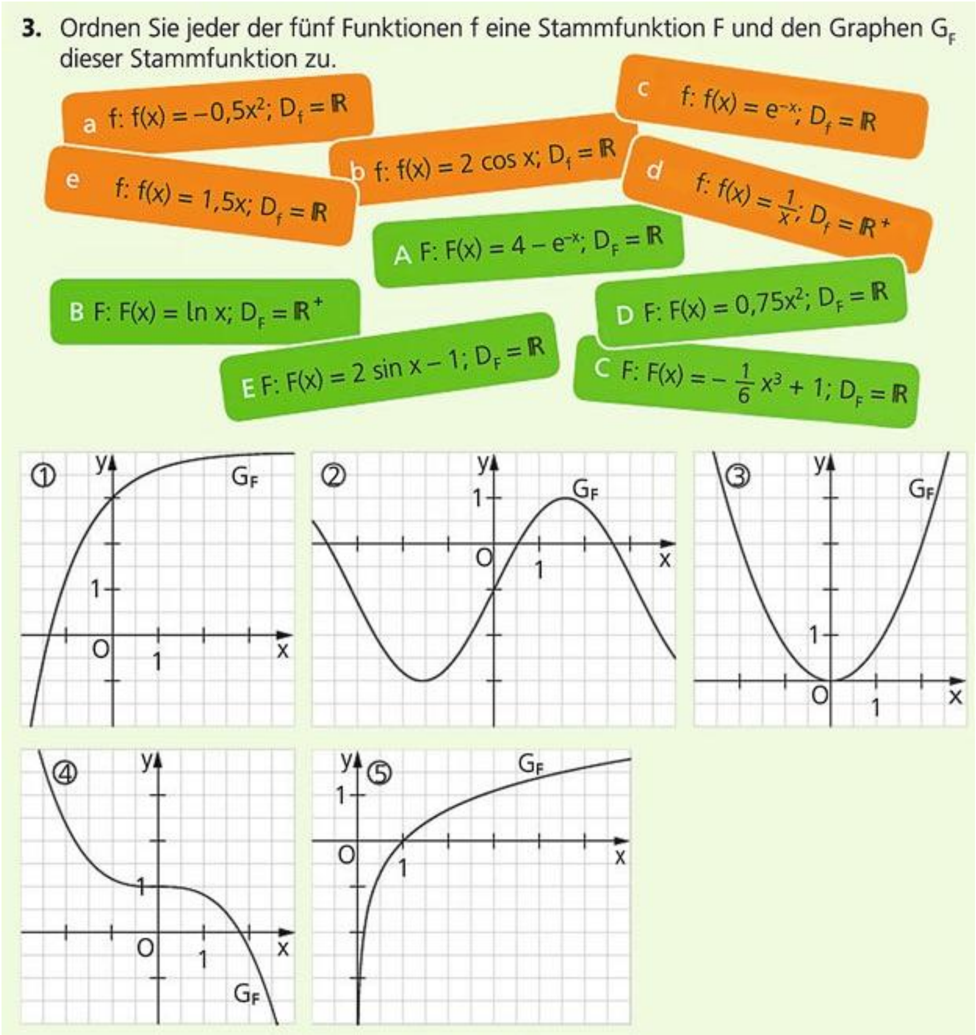
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3!}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

anzuwenden.

Lietzmann, W., Zühlke, P. (1930). *Aufgabensammlung und Leitfaden für Arithmetik, Algebra und Analysis*. Leipzig, Berlin: Teubner.
Zitiert in: Greefrath, G. u. a. (2016): *Didaktik der Analysis*, Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag

Integralbegriff

Zugang: Beispiel E



3. Ordnen Sie jeder der fünf Funktionen f eine Stammfunktion F und den Graphen G_F dieser Stammfunktion zu.

a f: $f(x) = -0{,}5x^2$; $D_f = \mathbb{R}$

b f: $f(x) = 2\cos x$; $D_f = \mathbb{R}$

c f: $f(x) = e^{-x}$; $D_f = \mathbb{R}$

d f: $f(x) = \frac{1}{x}$; $D_f = \mathbb{R}^+$

e f: $f(x) = 1{,}5x$; $D_f = \mathbb{R}$

A F: $F(x) = 4 - e^{-x}$; $D_F = \mathbb{R}$

B F: $F(x) = \ln x$; $D_F = \mathbb{R}^+$

C F: $F(x) = -\frac{1}{6}x^3 + 1$; $D_F = \mathbb{R}$

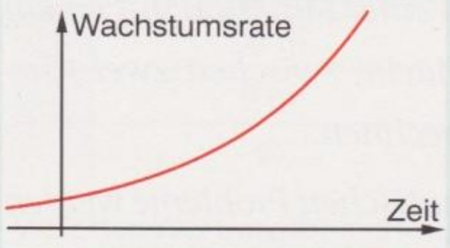
D F: $F(x) = 0{,}75x^2$; $D_F = \mathbb{R}$

E F: $F(x) = 2\sin x - 1$; $D_F = \mathbb{R}$

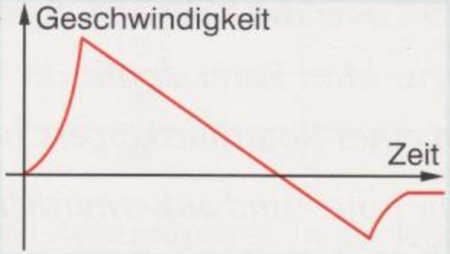
Schätz, U., Eisentraut, F. (Hrsg.) (2013). *delta 12. Mathematik für Gymnasien*. Bamberg: Buchners.
Zitiert in: Greefrath, G. u. a. (2016): *Didaktik der Analysis*, Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag

Integralbegriff

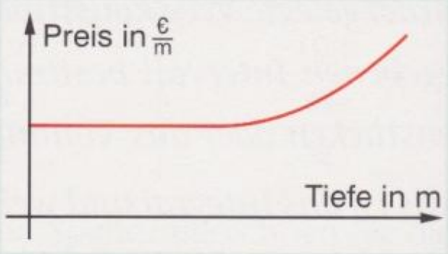
Zugang: Beispiel F



Ein Biologe kennt die Wachstumsraten einer Population über einen bestimmten Zeitraum. Er möchte die Funktion finden, die die Anzahl der Individuen in dieser Population in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.



Eine Physikerin kennt den Geschwindigkeitsverlauf einer senkrecht nach oben geschossenen Rakete und möchte die Funktion ermitteln, die die Höhe der Rakete in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.



Bei der Nutzung von Erdwärme werden häufig bis zu 3 km tiefe Bohrungen durchgeführt. Experten können die Kosten für eine Bohrung pro Meter in Abhängigkeit von der erreichten Tiefe abschätzen. Damit wollen sie die Funktion ermitteln, die der Tiefe der Bohrung die Gesamtkosten der Bohrung zuordnet.

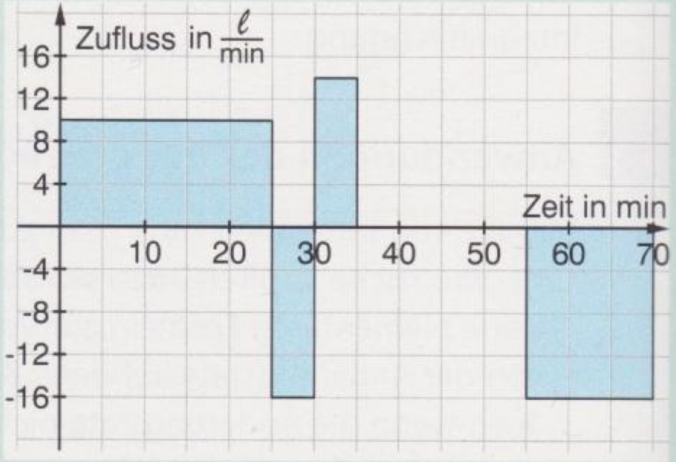
Schmidt, G.; Körner, H. Lergenmüller, A. (Hrsg.) (2010): Mathematik Neue Wege. Arbeitsbuch für Gymnasien. Analysis. Braunschweig: Schroedel

Integralbegriff

Zugang: Beispiel G

1 *Der Zufluss liefert die Füllmengen – ein vereinfachtes Beispiel*

a) In der nebenstehenden Abbildung ist der Zufluss und Abfluss von Wasser in einer Badewanne dargestellt. Interpretieren Sie den Graphen im Sachzusammenhang und mit entsprechenden mathematischen Fachbegriffen.



b) Erstellen Sie eine Tabelle mit der Füllmenge (dem „Bestand“) der Badewanne nach 5 (10, … 70) Minuten. Stellen Sie die Füllmenge der Badewanne in Abhängigkeit von der Zeit dar. Vergleichen Sie diesen Graphen mit dem Graphen in der Abbildung. Was fällt Ihnen auf?

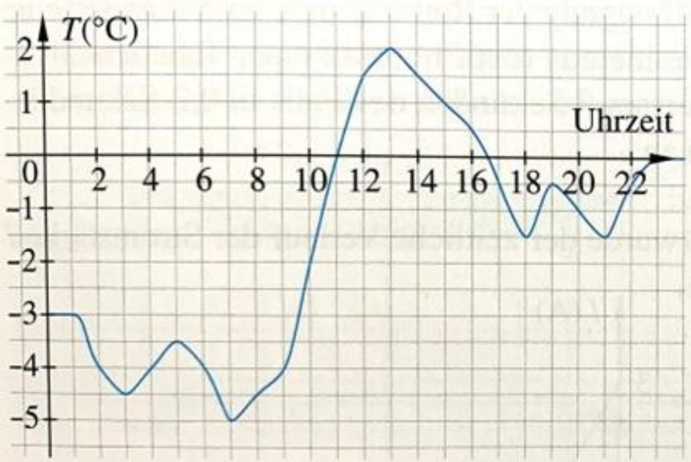
c) *Geometrische Interpretation:* Zur Berechnung der Füllmenge nach 5 Minuten muss das Produkt $5 \cdot 10$ berechnet werden. Das Produkt kann als Flächeninhalt des entsprechenden Rechtecks in der Grafik interpretiert werden. Interpretieren Sie geometrisch entsprechend die Füllmenge nach 20 (25, 30, 70) Minuten.

Schmidt, G.; Körner, H. Lergenmüller, A. (Hrsg.) (2010): Mathematik Neue Wege. Arbeitsbuch für Gymnasien. Analysis. Braunschweig: Schroedel

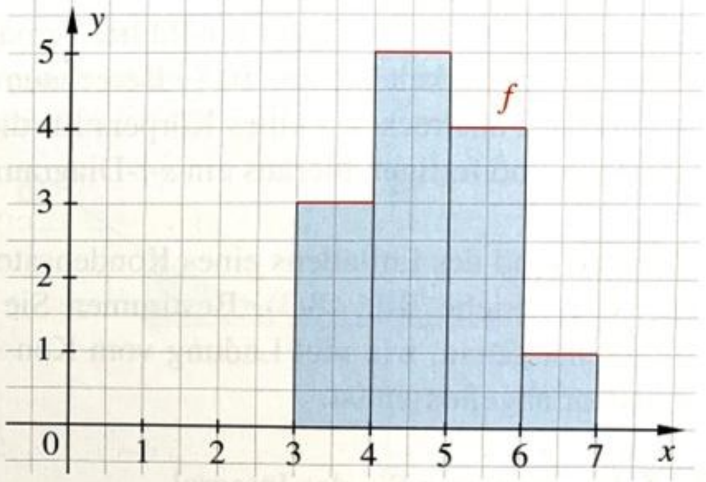
Integralbegriff

Zugang: Beispiel H

20 Bestimmen Sie möglichst genau die mittlere Tagestemperatur für die Temperaturkurve im Bild 47/1.



47/1



47/2

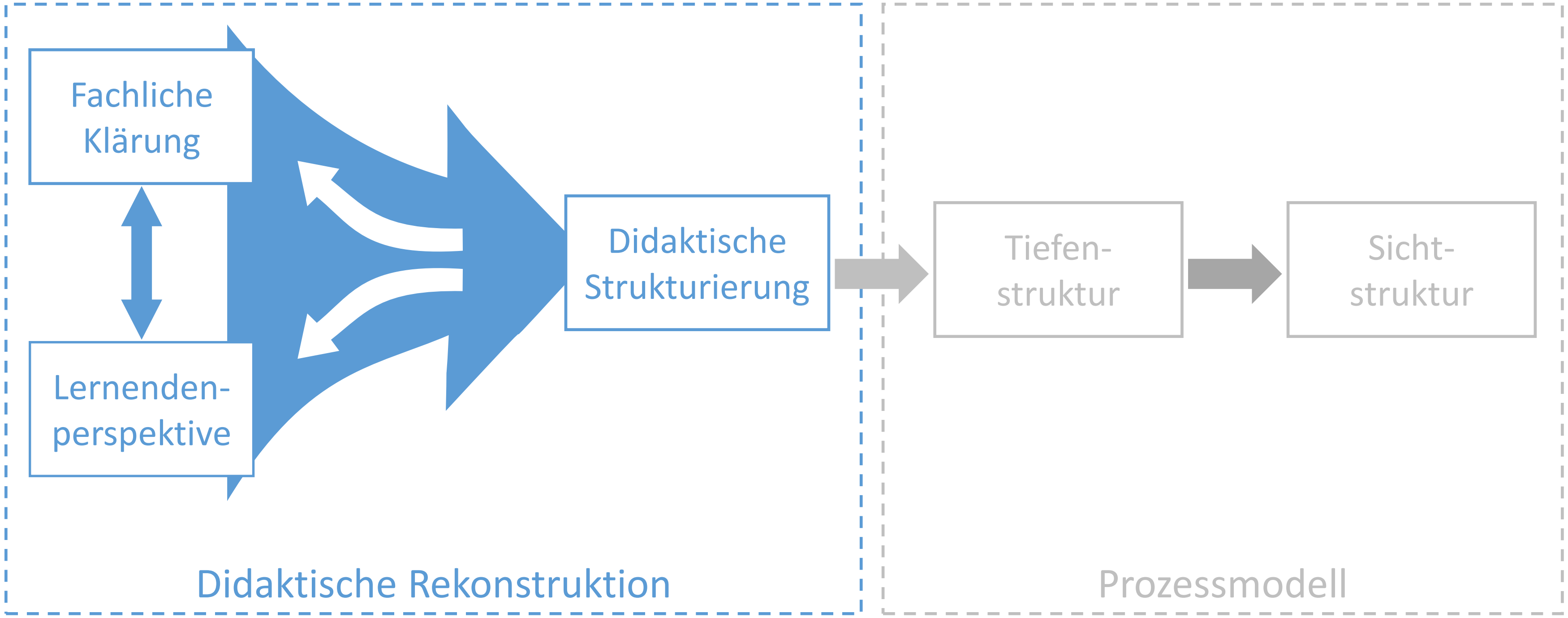
21 Berechnen Sie den Mittelwert $\overline{y}$ von $y_1 = 3$, $y_2 = 5$, $y_3 = 4$ und $y_4 = 1$.
Die Werte sind im Bild 47/2 als Säulendiagramm mit Säulenbreite 1 LE dargestellt. Ein solches Histogramm lässt sich als Graph einer Treppenfunktion f interpretieren.

Begründen Sie, warum der Mittelwert auch mit $\overline{y} = \frac{1}{7-3}\int_3^7 f(x)\,dx$ berechnet werden kann.

KRYSMALSKI u.a. (Hrsg.)(2012): Fokus Mathematik Lehrerfassung – Qualifikationsphase gymnasiale Oberstufe, Ausgabe N, Cornelsen

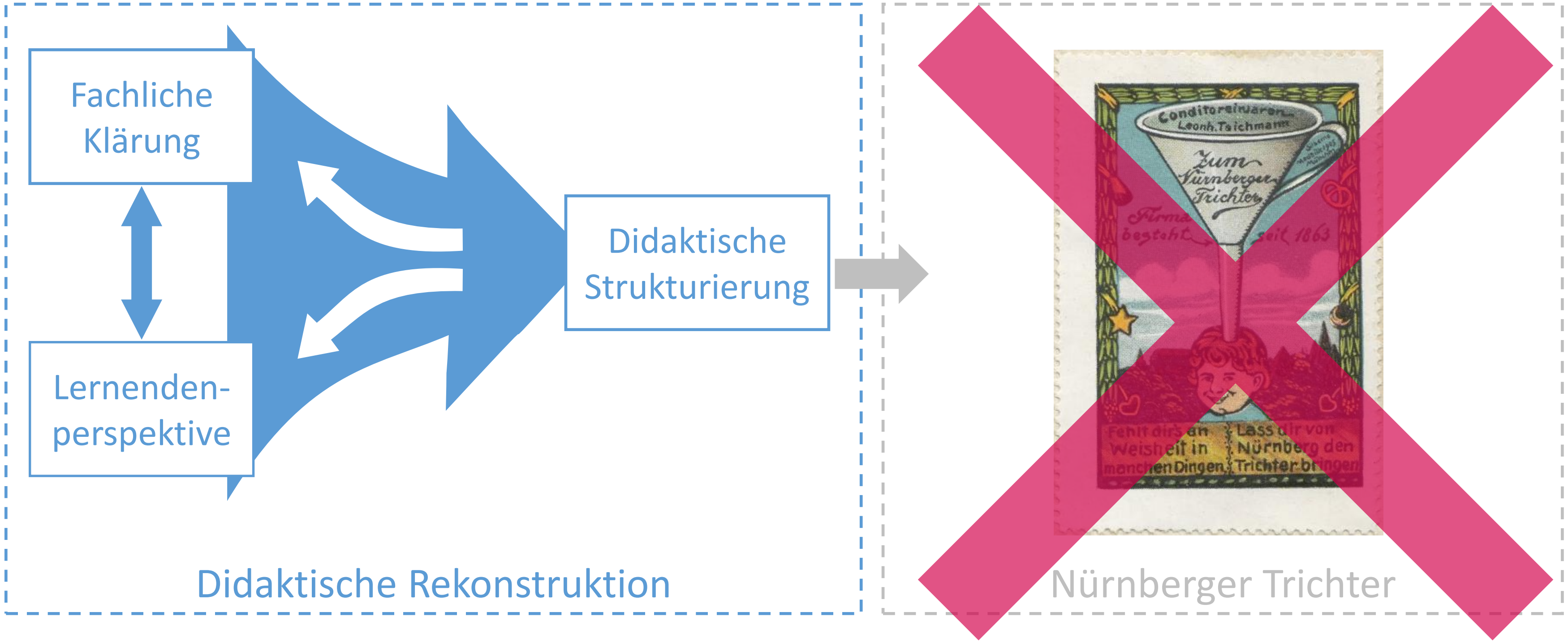
Unterrichtsplanung

3. Schritt: Didaktische Rekonstruktion

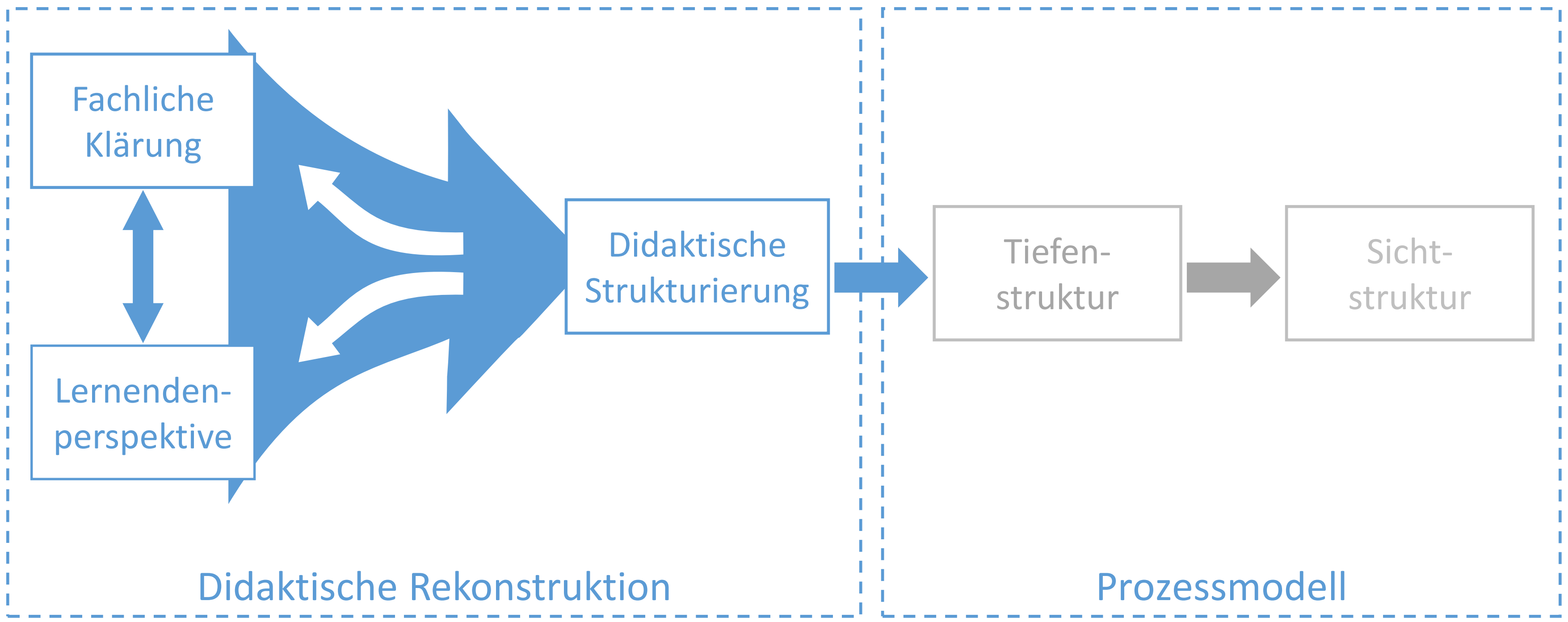


Die didaktische Rekonstruktion versucht eine **didaktische Struktur** des Unterrichtsgegenstands zu erzeugen, indem die Lernenden in den Blick genommen werden:
Wie kann der Inhalt angemessen vermittelt werden?
Wie muss der Inhalt angeordnet werden (wie soll die Einheit strukturiert werden), damit er für die Schülerinnen und Schüler logisch, angemessen, kognitiv aktivierend, aber nicht überfordernd ist?

Unterrichtsplanung



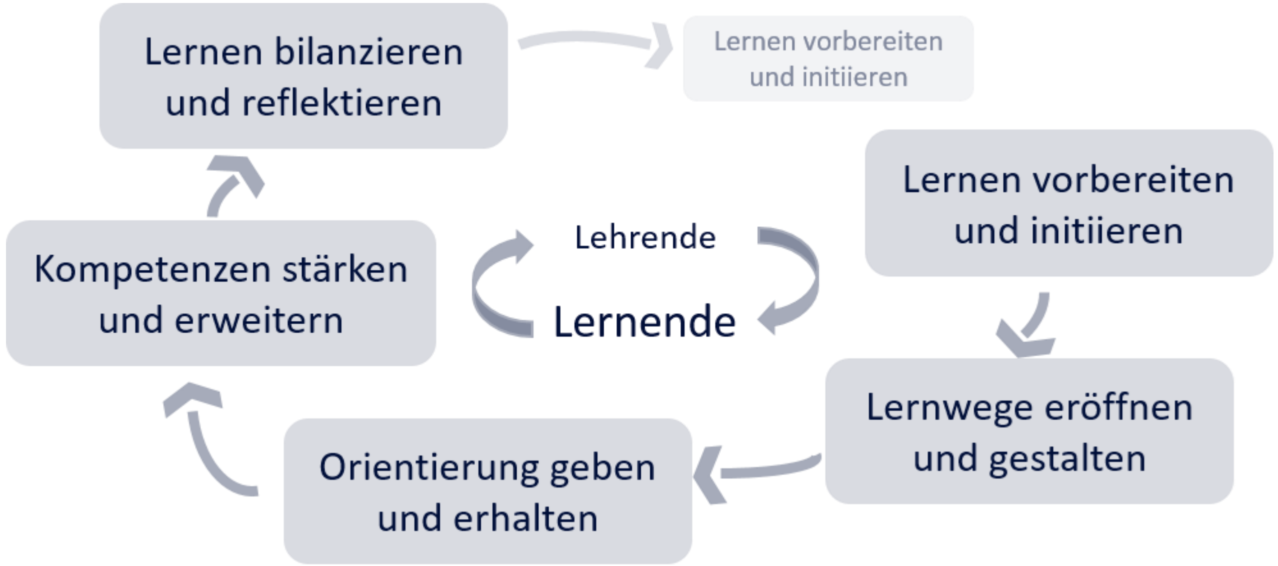
Unterrichtsplanung
Prozessmodelle



Prozessmodell: Schritte des Wissenserwerbs (anknüpfen, erkunden, systematisieren und sichern, üben und nutzen) planen.

Prozessmodell

nach Bauch u. a. (2011)



Bauch, Werner; Maitzen, Christopher & Katzenbach, Michael (2011): Auf dem Weg zum kompetenzorientierten Unterricht – Lehr- und Lernprozesse gestalten. Ein Prozessmodell zur Unterstützung der Unterrichtsentwicklung. Frankfurt/M.: Amt für Lehrerbildung (AfL).

Prozessmodell

nach Bauch u. a. (2011)

1.	**Lernen initiieren**: Die Lernausgangslage wird ermittelt und der rote Faden aufgezeigt.
2.	**Lernwege gestalten und begleiten**: Es folgt eine straffe Erarbeitung, in der die Lernwege dokumentiert werden.
3.	**Orientierung**: Eine Zwischendiagnose wird als Selbst- oder Partnerdiagnose durchgeführt.
4.	**Konsolidierung**: In dieser Phase wird selbständig geübt.
5.	**Lernergebnisse bilanzieren**: Leistungsaufgaben Lehr- und Lernprozesse **evaluieren**: Reflexion durch den Vergleich der Auswertung der Bilanz mit der Selbstdiagnose. Dies ist der Ausgangspunkt für die nächste Einheit.

Bauch, Werner; Maitzen, Christopher & Katzenbach, Michael (2011): Auf dem Weg zum kompetenzorientierten Unterricht – Lehr- und Lernprozesse gestalten. Ein Prozessmodell zur Unterstützung der Unterrichtsentwicklung. Frankfurt/M.: Amt für Lehrerbildung (AfL).

Prozessmodell

KOSIMA-Strukturmodell

1.	**Anknüpfen:** Aktivieren von Vorerfahrungen, Hinführen mit Kernfragen. Lernende erinnern sich und werfen Fragen auf.
2.	**Erkunden:** An anregenden Problemen eigene Wege gehen. Durch Problemlösen oder Untersuchen von Phänomenen werden Begriffe aufgebaut, Verfahren entwickelt und Zusammenhänge herausgearbeitet.
3.	**Ordnen:** Systematisieren und Sichern durch Zuordnen, Ergänzen von Beispielen, Erklären erfolgt ein individuelles Aneignen der Mathematik.
4.	**Vertiefen:** Flexibles Üben, Wiederholen, Vernetzen und Erweitern erfolgt durch Behandlung verschiedener Aufgabentypen (Bruder, 2012, Büchter und Leuders, 2005)
5.	Selbst**diagnose** zum Beispiel mittels Checkliste

Prediger, Susanne & Leuders, Timo & Barzel, Bärbel & Hußmann, Stephan. (2013). Anknüpfen, Erkunden, Ordnen, Vertiefen – Ein Modell zur Strukturierung von Design und Unterrichtshandeln.

Prozessmodell

nach Oser & Patry (1990)

Modell zum Wissensaufbau

1.	**Bewusstmachung der bisher erworbenen Wissensstruktur**: Das neue Wissen soll an altes anknüpfen.
2.	**Durcharbeiten eines Prototyps**, in dem die Elemente des neuen Wissens vollständig enthalten sind: Das Einstiegsbeispiel sollte besonders gut ausgewählt werden, damit es als Repräsentant dient.
3.	**Präsentation** bzw. Repräsentationen eines oder mehrerer **neuer Elemente**, die der bisherigen Struktur fremd sind.
4.	**Erarbeitung der neuen Wissenselemente**: Verschiedene Beispiele werden behandelt, dabei erfolgt ein Vergleichen, in-Beziehung-setzen, Einschließen und Trennen.
5.	**Anwendung der neuen Wissenselemente**: In dieser Phase werden nicht nur Beispiele des neuen Typs behandelt, sondern geprüft, welche Aufgaben zum neuen Typ gehören und welche nicht.

Oser, F. & Patry, J.L. (1990). Choreographien unterrichtl. Lernens. Basismodelle des Unterrichts. Berichte z. Erziehungsw. 89. Freiburg: Päd. Inst.

Prozessmodell

nach Oser & Patry (1990)

Verschiedene Basismodelle

Name des Basismodells		Zieltyp des Lernens	Notwendige Merkmale	Beispiel einer Sichtstruktur
1	Lernen durch Eigenerfahrung	Aneignung von Erfahrungswissen	Unmittelbarer Lebensbezug	Arbeit in Sozial- und Produktionsbetriebe
2	Entwicklungsför-dernd./Strukturver-änderndes Lernen	Transformation von Tiefenstrukturen (z.B. moralisches Urteil)	Disäquilibrations-vorgänge	Kontroverse Diskussionen
3	Problemlösen (entdeckendes Lernen)	Lernen durch Versuch und Irrtum	Hypothesenbildung, Hypothesentestung	Experimentieren, Konfliktlösen
4a	Wissensaufbau	Memorierbare Fakten Fähigkeiten, ‚Narrativs“	Struktur und Strukturierung von Lehrgängen	Darbietender und entwickelnder Unterricht
4b	Konzeptbildung	Verwendung von Schemata	Differenzierung und Analogiebildung	Lernen durch Anwen-dung/ Transfer komple-xer Denksysteme

Fortführung der Tabelle »

Oser, F. & Patry, J.L. (1990). Choreographien unterrichtl. Lernens. Basismodelle des Unterrichts. Berichte z. Erziehungsw. 89. Freiburg: Päd. Inst.

Prozessmodell

nach Oser & Patry (1990)

Verschiedene Basismodelle

	Name des Basismodells	Zieltyp des Lernens	Notwendige Merkmale	Beispiel einer Sichtstruktur
5	Betrachtendes Lernen	Assimilation von ästhetischen Gegebenheiten	Nachahmung als innerer Prozess, me-ditativ. Wahrnehmen	Stille-Übung, geführte Bildbetrachtung
6	Lernen von Strategien	Lernen Lernen (Metalernen)	Gebrauch und Einsatz von allerlei Strategien	Reflexion über eigenes Lernen
7	Routinebildung & Training von Fertigkeiten	Routine & Fertigkeiten ohne Belastung des Bewusstseins verwenden	Hohe Übungsfre-quenz im Feld (Auto-fahren, mathm. Reihen, Vokabeln lernen)	Differenzierender Unterricht und Übungsqualität
8	Motilitätsmodell	Verarbeitung affektiver Spannungen durch schöpferisches Tun	Aufbau von affektiver Erregung, Indignation, Freude, Trauer etc. durch Narration vermittelt	Gestalterisches Zeichnen, Musizieren, „Dichten“, Tanzen, gestalterisches Mimik

Fortführung der Tabelle »

Prozessmodell

nach Oser & Patry (1990)

Verschiedene Basismodelle

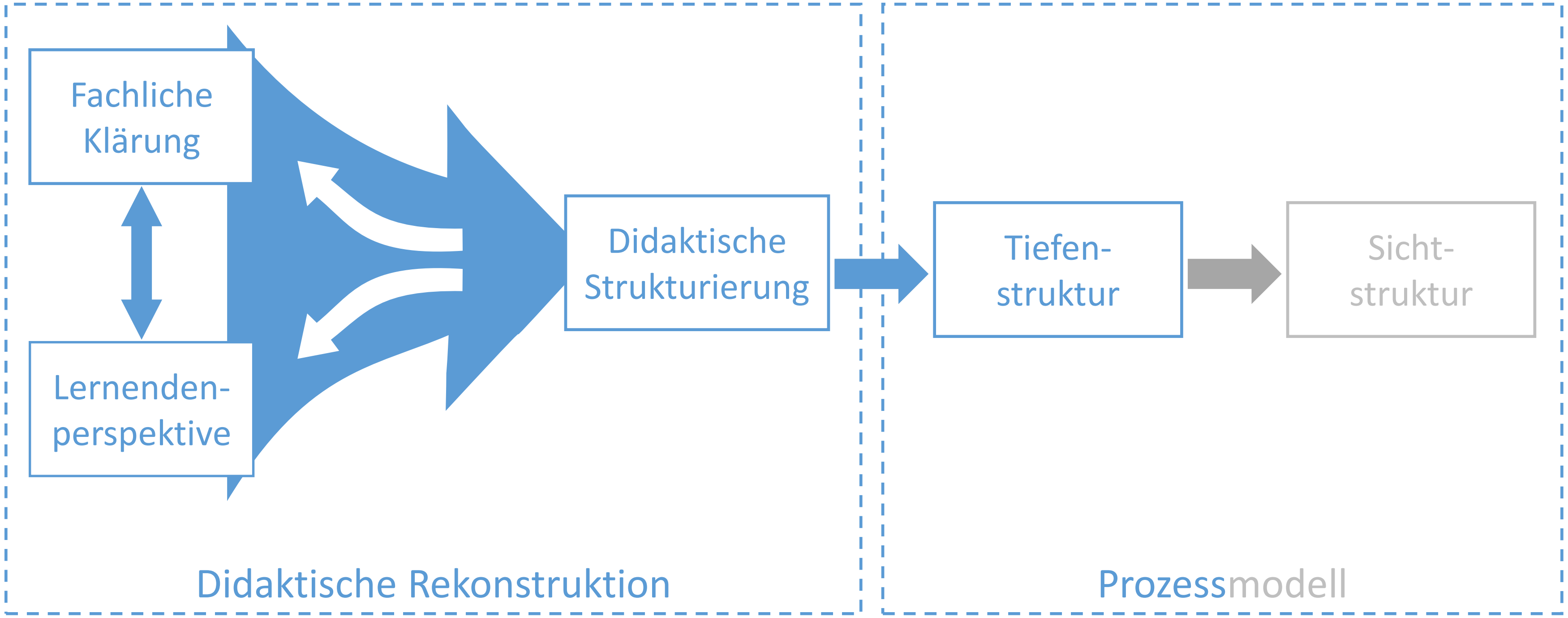
	Name des Basismodells	Zieltyp des Lernens	Notwendige Merkmale	Beispiel einer Sichtstruktur
9	Lernen dyn. Be-ziehungen, Lernen gem. Normen d. Partizipation (Ko-operationslernen)	Assimilation von ästhetischen Gegebenheiten	Nachahmung als innerer Prozess, me-ditativ. Wahrnehmen	Gestaltung von Freund-schaften, Kooperations-arbeiten, Schulver-sammlungen
10	Wert- und Identitätsaufbau	Wandel des Wertbe-wusstseins (politische, menschliche, religiöse Werte)	Reflektierte Hierarchien von Werten	Wertklärungsverfahren, politische Bildung, Kunsterziehung
11	Hypertextlernen	Komplexes Lernen, wenn die Begriffe schon vorhanden sind.	Suchen und Verar-beiten von Informa-tionen über ein be-stimmtes Thema, zu dem man schon alle Grundbegriffe aufge-baut hat	Vorbereiten von Vorträgen, Erstellen von größeren schriftlichen Arbeiten

Fortführung der Tabelle »

Oser, F. & Patry, J.L. (1990). Choreographien unterrichtl. Lernens. Basismodelle des Unterrichts. Berichte z. Erziehungsw. 89. Freiburg: Päd. Inst.

Unterrichtsplanung

4. Schritt: Tiefenstruktur



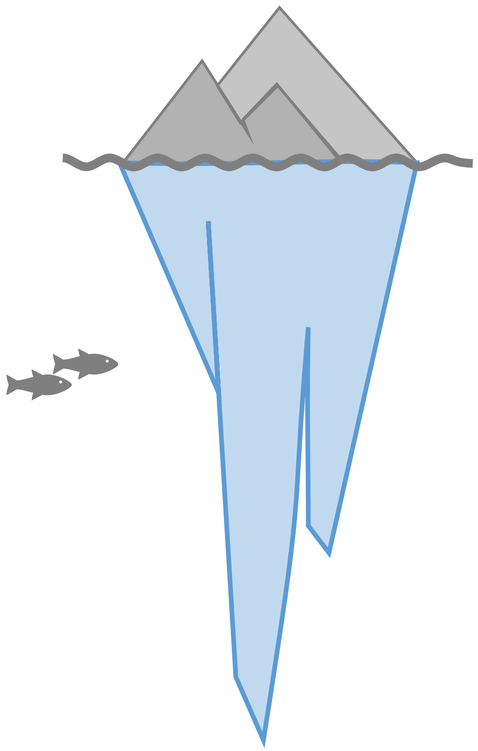
Tiefenstruktur: Kognitive Aktivierung,

Konstruktive Unterstützung

Klassenführung

Tiefenstruktur

Planung von Unterricht



Kognitive Aktivierung:	• Zieltransparenz in allen Unterrichtsphasen; smarte Ziele für die Stunden/Einheiten • Anknüpfen an das Vorwissen, Wissensvernetzung der SuS • Angemessenes Tempo • Angemessene und anspruchsvolle Aufgaben • Reflexion der Ergebnisse und des Lernprozesses
Klassenführung:	• Roten Faden in der ganzen Stunde sichtbar - Gestaltung von Übergängen • Reibungsloser Ablauf • Alle SuS im Blick
Konstruktive Unterstützung:	• Sicherheit und Verbindlichkeit, Erreichbarkeit • Gute Kommunikation • Fehler als Lernanlass / Fehlertoleranz • Unterscheidung von Lern- und Leistungssituationen • Formatives Feedback • Individuelle Unterstützung, Eigenreflexion stärken

Didaktische Analyse

Blick auf den Lernenden

Tiefenstruktur		Anpassung an die Lernenden
• Welche typischen Konzepte, Strategien oder Verfahren sollen gelernt werden?	→	• Welcher Fachwortschatz (Fachwörter, fachsprachliche Redewendungen, bildungssprachliche Lernziele) soll vermittelt werden?
• Welche Kontexte eignen sich, das Thema im Rahmen einer Themenorientierung zu unterrichten? • Welches Potential bzgl. Grundvorstellungen und welche Gefahren bzgl. Fehlvorstellungen birgt der Kontext?	→	• Passt der Kontext zur Lerngruppe (auch kulturelle Rahmenbedingungen sollten berücksichtigt werden)? • Welcher Wortschatz für den Kontext oder die Themen-orientierung muss vermittelt werden?
• Welche typischen Aufgaben und Fragestellungen eignen sich? • Welches sind Ausnahmen und Spezialfälle?	→	• Welche exemplarischen Beispiele passen zur Lerngruppe?
• Welche Möglichkeiten gibt es, Fehlvorstellungen möglichst zu vermeiden? • Wie kann man damit umgehen, wenn sie doch auftreten?	→	• An welchen Beispielen können die Fehlvorstellungen als Fehler kenntlich gemacht werden?
		• Welche Methoden sollen an welcher Stelle eingesetzt werden?

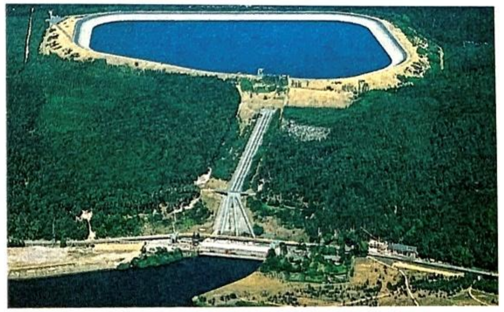
nach ABHAGEN in BASISWISSEN LEHRERBILDUNG: Mathematik unterrichten, S. 236

Pumpspeicherkraftwerk

Klassiker

5.

In einem Pumpspeicherwerk wird nachts Wasser aus einem unteren Becken in ein oberes Speicherbecken gepumpt. Zur Stromerzeugung kann das Wasser am Tag über eine Turbine wieder abgelassen werden.
Zwischen 20 und 22 Uhr werden folgende Messungen (alle 15 min) für die einlaufende Wassermenge ins Speicherbecken aufgezeichnet:



Zeit in min	0	15	30	45	60	75	90	105	120
Zulaufstärke in m^3 pro min	14	8	10	27	30	46	71	75	99

a) Stellen Sie die Daten grafisch dar. Welcher Funktionsterm passt gut zu den Daten?

b) Wie groß ist näherungsweise die gesamte Wassermenge, die zwischen 20 und 22 Uhr einfließt?

c) Welche Menge fließt durchschnittlich pro Minute ein?

aus: GRIESEL u.a. (2006): Elemente der Mathematik SII Gesamtband, Schroedel

Unterrichtsplanung

Themenorientierung

Entscheiden Sie sich für eine Themenorientierung (Pumpspeicherwerk oder Free-Fall-Tower).

Machen Sie sich mit dem vorgeschlagenen Unterrichtsgang vertraut. Bearbeiten Sie dazu auch exemplarisch Aufgaben.

Kommentierten und konkretisieren Sie das Vorgehen vor dem Hintergrund des zuvor Erarbeiteten.

Zuflüsse bei einem Pumpspeicherwerk

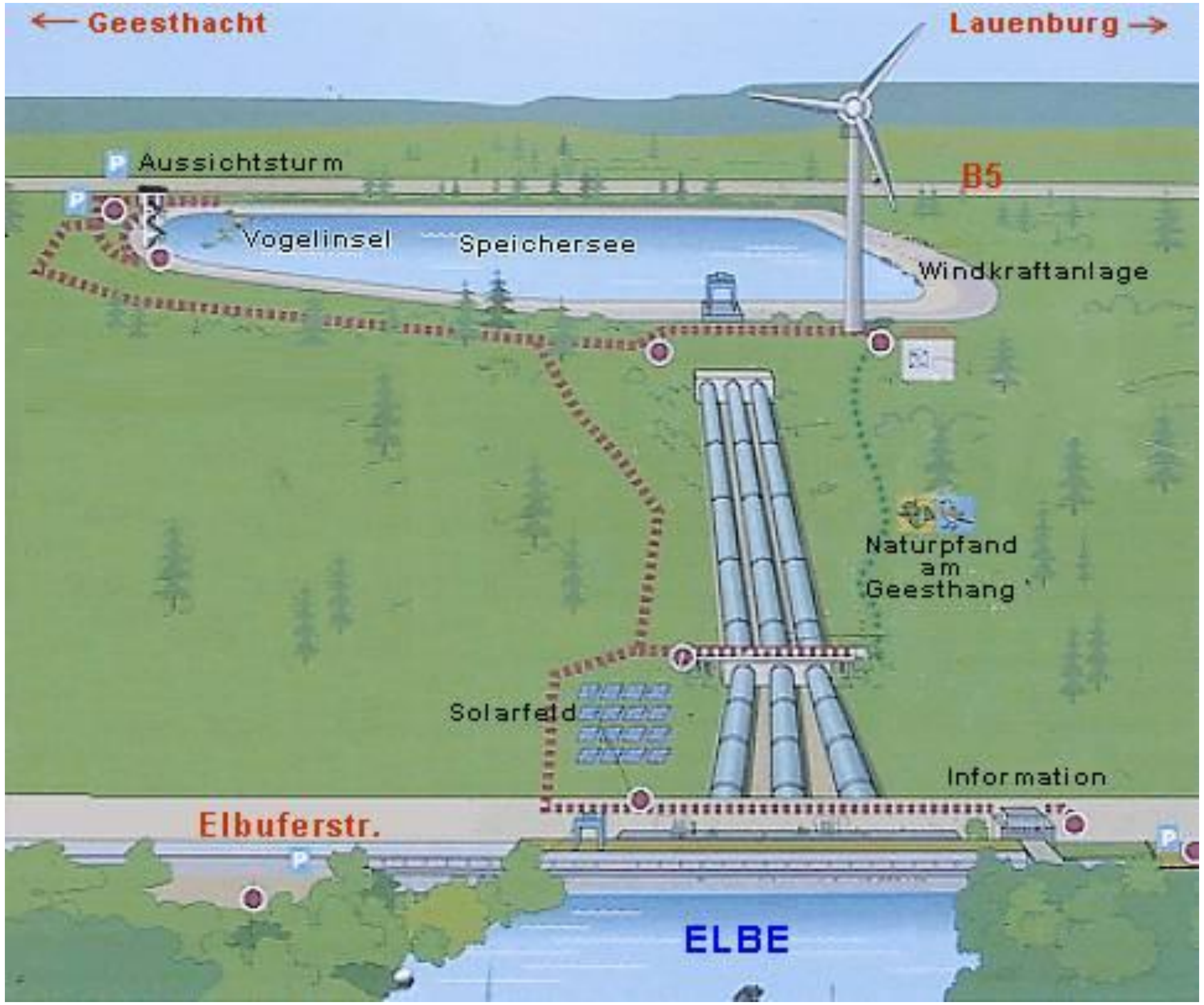
Bildquelle: https://metropolregion.hamburg.de/industriekultur/kraftwerke/7148118/pumpspeicherkraftwerk-geesthacht/

Pumpspeicherwerk

Geestacht

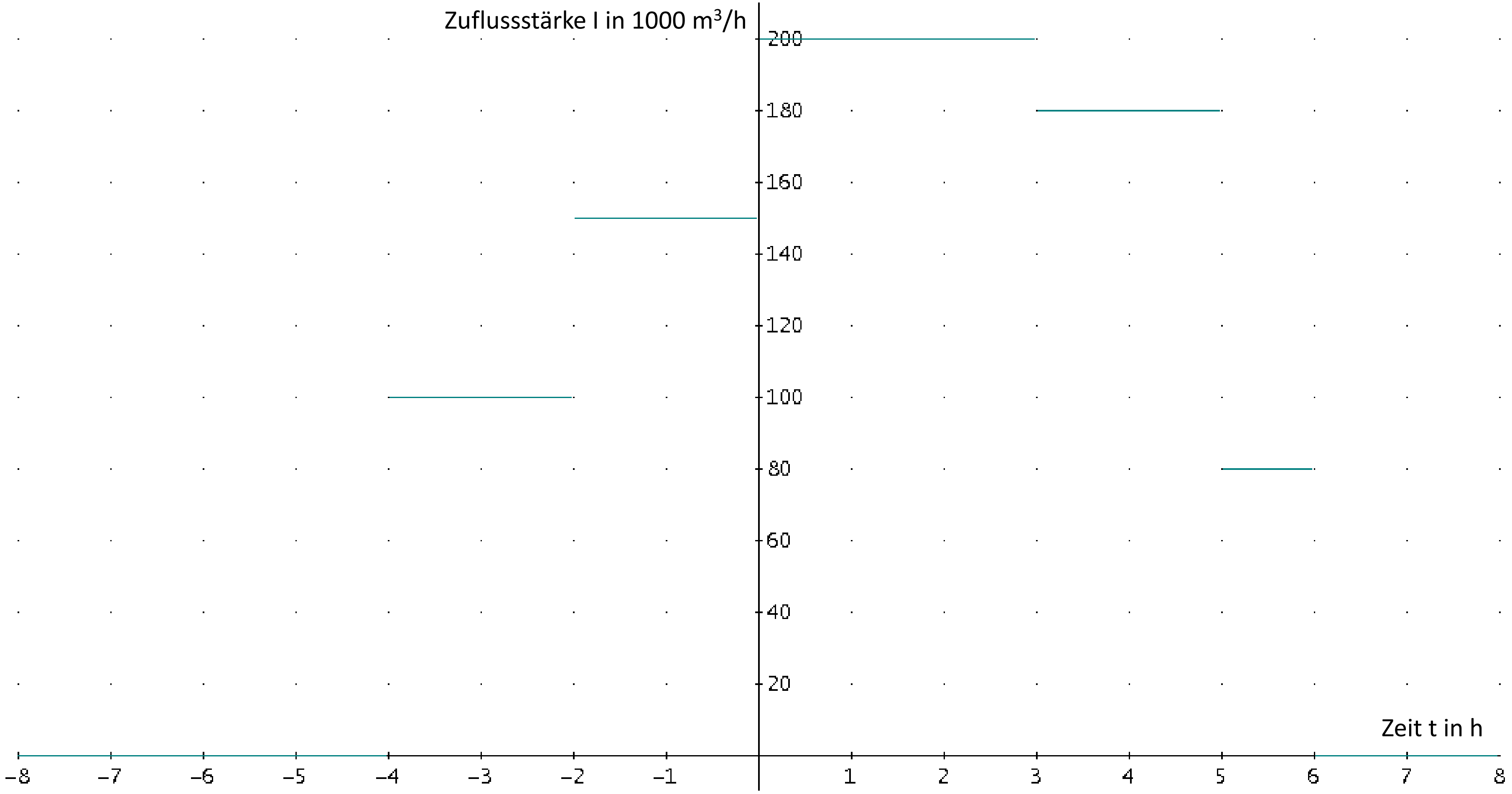
Pumpspeicherwerk

Geestacht



Pumpspeicherwerk

Zuflussstärke in der Nacht



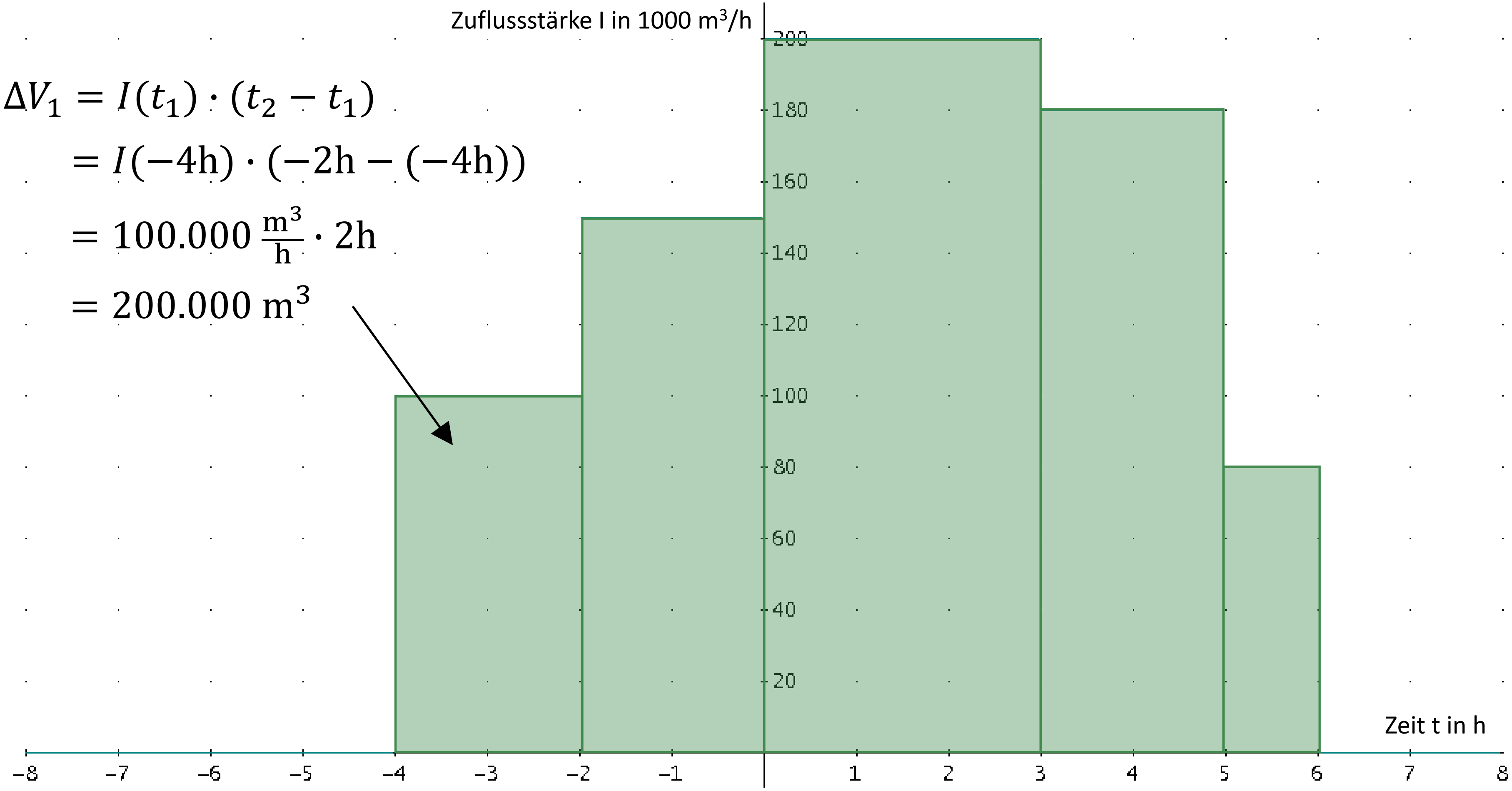
Pumpspeicherwerk
Mögliche Fragen

1. Wie viel Wasser wird in der Nacht in das Becken gepumpt?
2. Wie viel Wasser wird zu einer bestimmten Zeit hochgepumpt sein?
3. Wie viel Wasser befindet sich nach der Nacht im Speicherbecken?
4. Wie viel Wasser befindet sich wann im Speicherbecken?

Pumpspeicherwerk

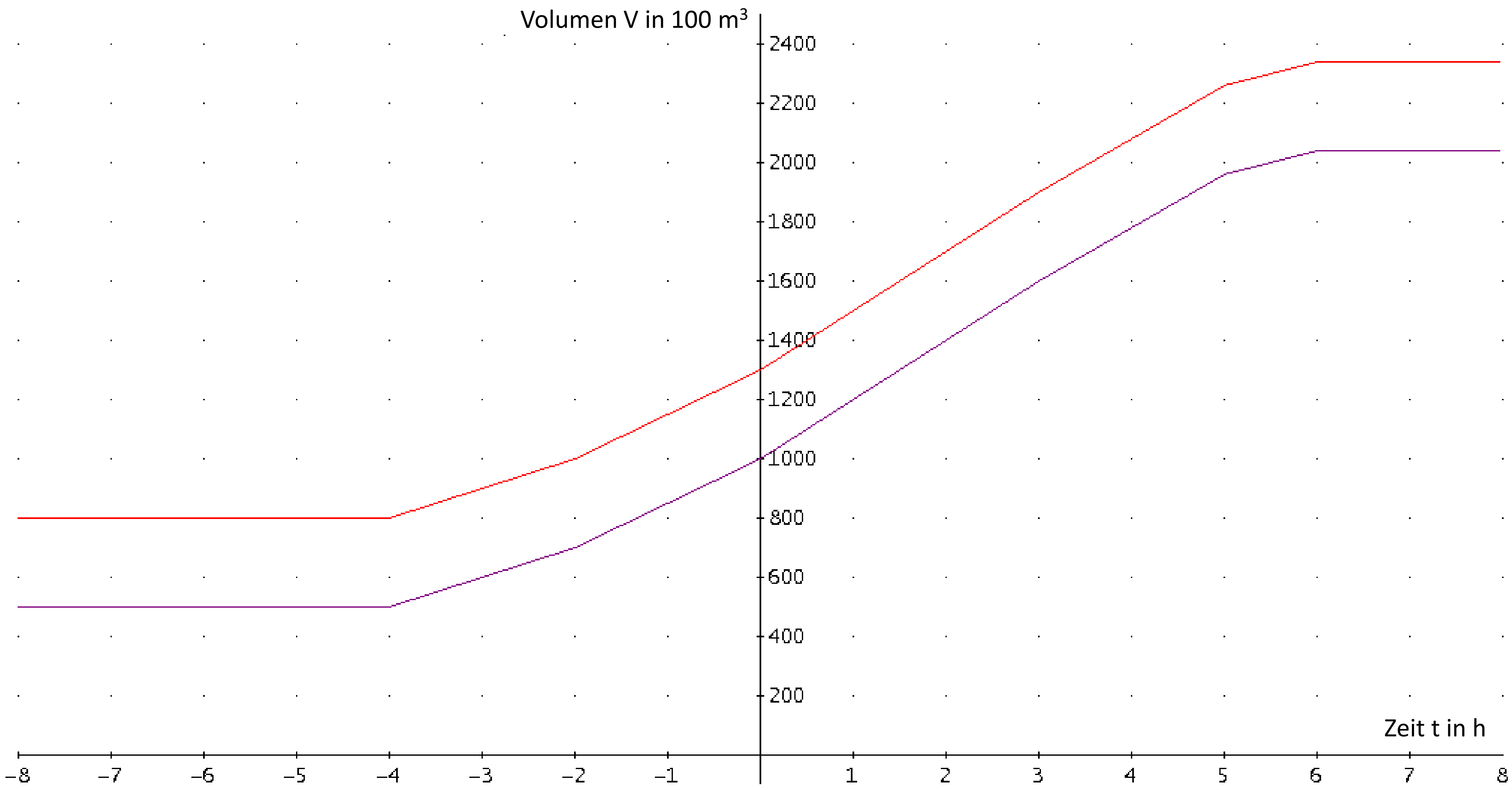
Bestimmung der hochgepumpten Menge

$$\Delta V_1 = I(t_1) \cdot (t_2 - t_1)$$
$$= I(-4\text{h}) \cdot (-2\text{h} - (-4\text{h}))$$
$$= 100.000\,\frac{\text{m}^3}{\text{h}} \cdot 2\text{h}$$
$$= 200.000\ \text{m}^3$$



Pumpspeicherwerk

Zwei Volumenfunktionen



Pumpspeicherwerk

Zwischenergebnisse

- Das hochgepumpte Volumen ΔV ist bekannt.
- Die Menge des zu einer bestimmten Zeitpunkts im Becken vorhandenen Wassers lässt sich nicht bestimmen. Es fehlt die Angabe des Anfangswertes.
- Ist dieser bekannt, so lässt sich die Volumenfunktion $V(t)$ angeben.

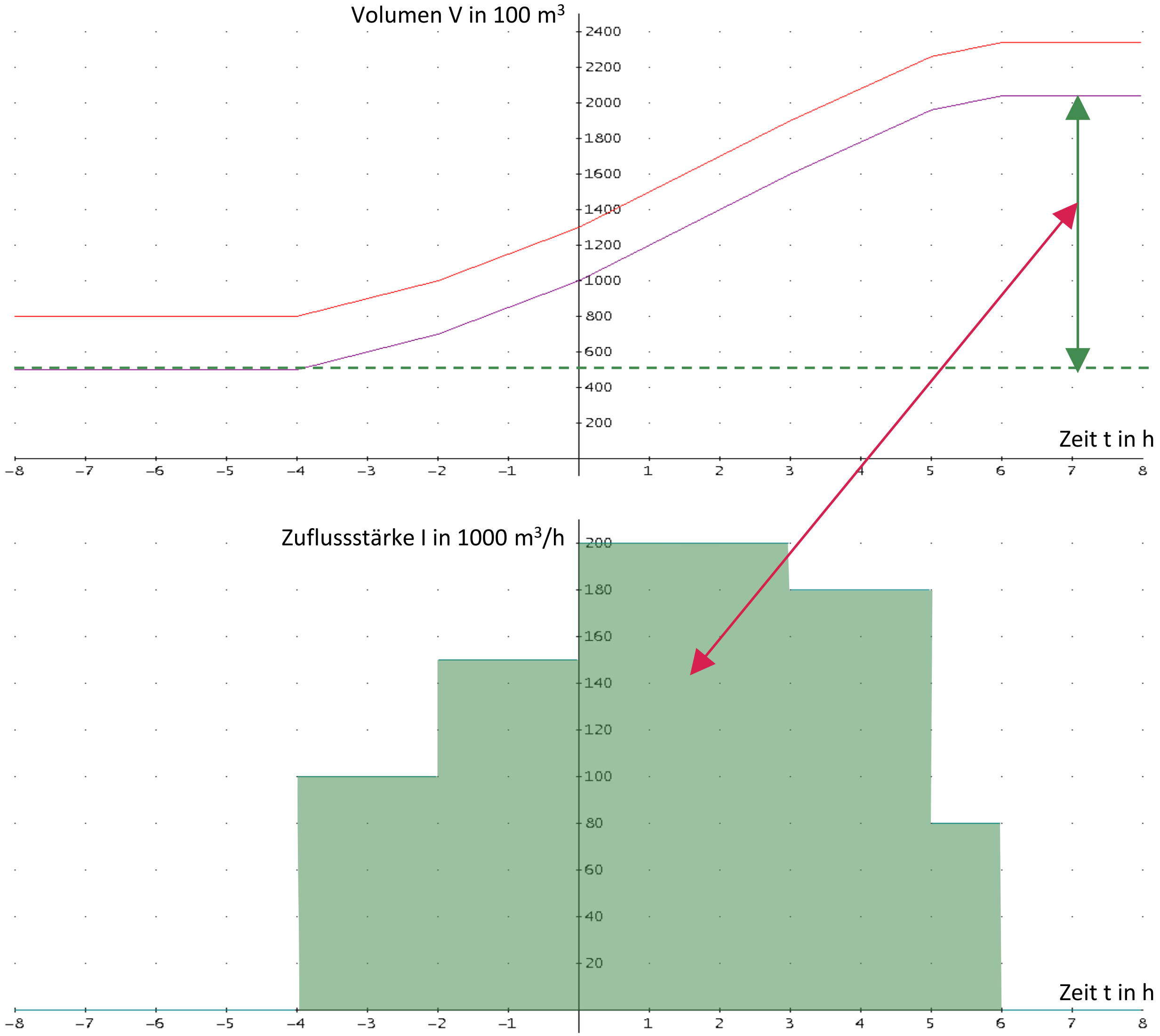
Zusammenhänge

erkennen

zugeflossene Menge =

Differenz zweier Funktionswerte

Ableitung



„Aufleitung“

zugeflossene Menge =

(Netto-)Flächeninhalt

Hochfahren einer Pumpe

Bildquelle: https://www.wikiwand.com/de/Pumpspeicherwerk_
Vianden#Media/Datei:SEO_main_cavern_Stolzembourg.jpg

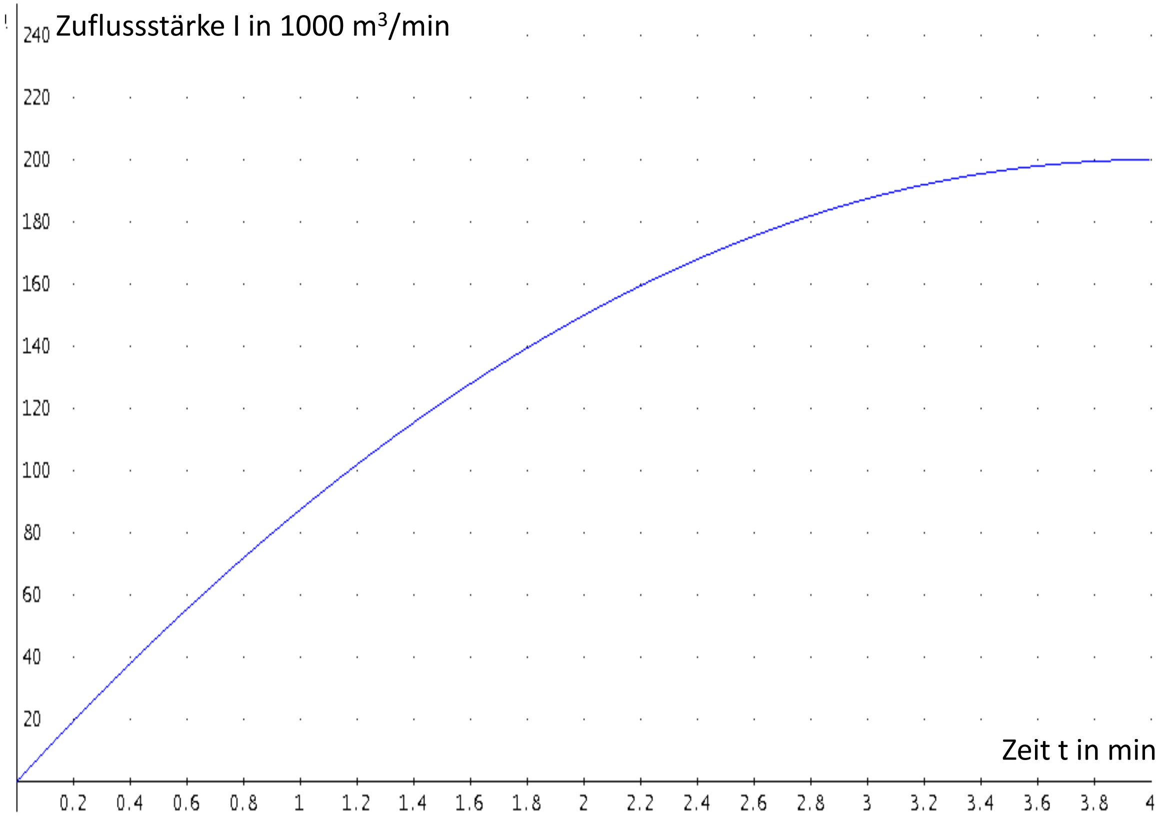
Hochfahren einer Pumpe

Aufgabe

Bestimmen Sie Näherungswerte für die in den ersten 4 Min. gepumpte Menge. Geben Sie an, ob Ihr Näherungswert zu groß oder zu klein ist.

t in min	I(t) in m^3/min
0	0,00
0,1	9,88
0,2	19,50
0,3	28,88
0,4	38,00
0,5	46,88
0,6	55,50
0,7	63,88
0,8	72,00
0,9	79,88
1,0	87,50
1,1	94,88
1,2	102,00
1,3	108,88
1,4	115,50
1,5	121,88
1,6	128,00
1,7	133,88
1,8	139,50
1,9	144,88

t in min	I(t) in m^3/min
2,1	154,88
2,2	159,50
2,3	163,88
2,4	168,00
2,5	171,88
2,6	175,50
2,7	178,88
2,8	182,00
2,9	184,88
3	187,50
3,1	189,88
3,2	192,00
3,3	193,88
3,4	195,50
3,5	196,88
3,6	198,00
3,7	198,88
3,8	199,50
3,9	199,88
4	200,00



$$I(t) = -\frac{25}{2}x^2 + 100t$$

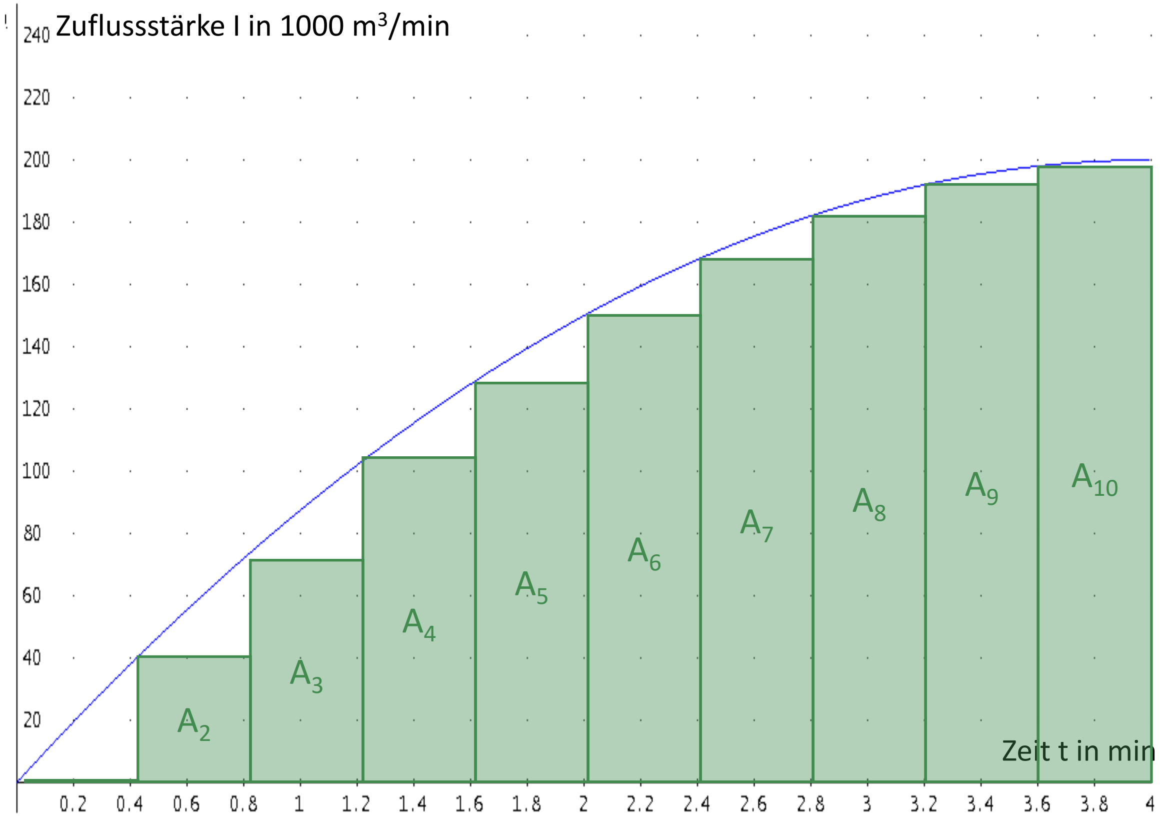
Hochfahren einer Pumpe

Erste Näherung

1 Eine erste Näherung durch Summen von Produkten:

$$\Delta V_{10} = I(0) \cdot 0{,}4 + I(0{,}4) \cdot 0{,}4 \ + \\ \ldots + I(3{,}6) \cdot 0{,}4$$

$$= \sum_{i=0}^{9} I(0 + i \cdot 0{,}4) \cdot 0{,}4$$



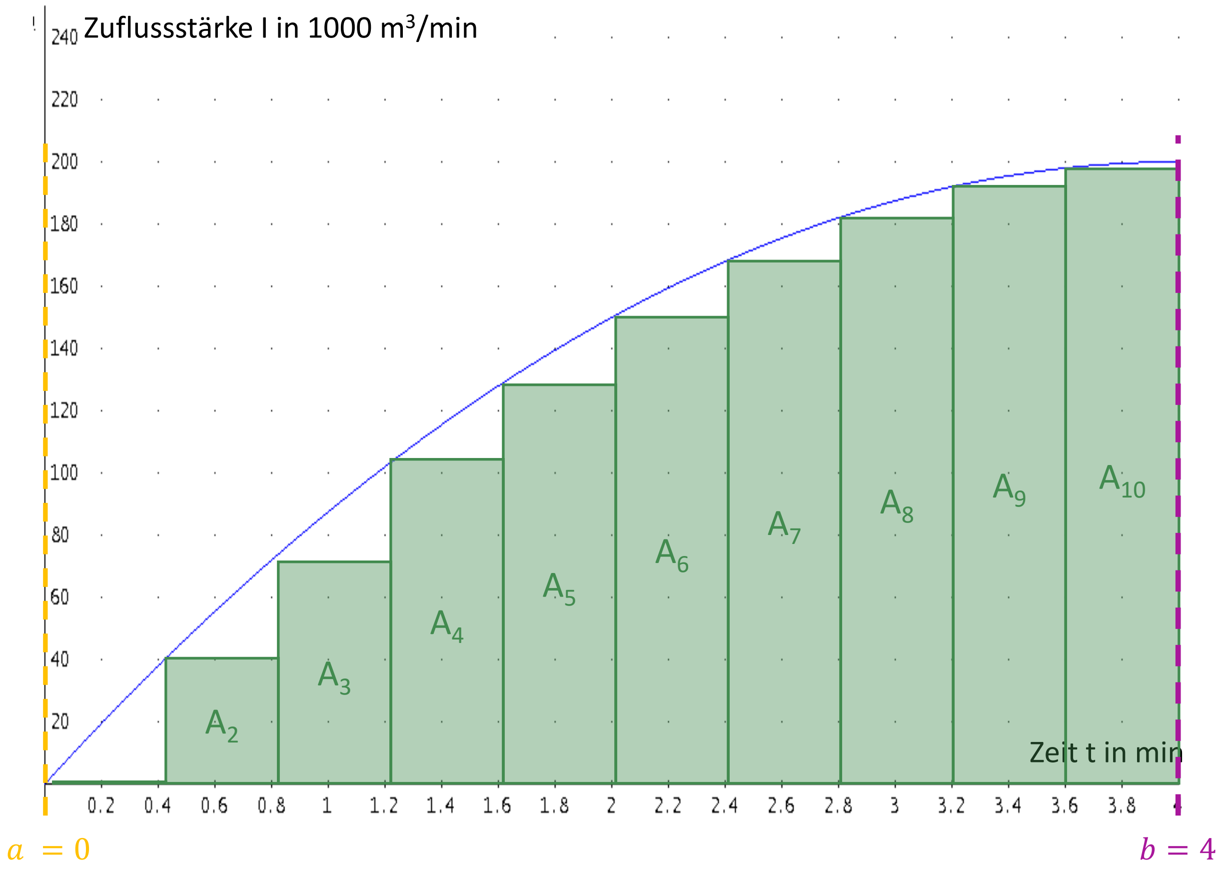
Hochfahren einer Pumpe

Verallgemeinerung

1. Eine erste Näherung durch Summen von Produkten:

$$\Delta V_{10} = I(0) \cdot 0{,}4 + I(0{,}4) \cdot 0{,}4 \; + \; \ldots + I(3{,}6) \cdot 0{,}4$$

$$= \sum_{i=0}^{9} I(0 + i \cdot 0{,}4) \cdot 0{,}4$$



2. Allgemein mit Intervallgrenzen $a < b$ und bei einer Unterteilung in n Intervalle der Breite $\Delta t = \frac{b-a}{n}$

$$\Delta V_n = I(a) \cdot \Delta t + I(a + 1 \cdot \Delta t) \cdot \Delta t + \ldots + I(a + (n-1) \cdot \Delta t) \cdot \Delta t$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} I(a + i \cdot \Delta t) \cdot \Delta t$$

Hochfahren einer Pumpe

Grenzwertbildung

3 Den exakten Wert erhält man durch Grenzwertbildung mit $n \to \infty$ bzw. $\Delta t \to 0$

$$\begin{aligned} \Delta V &= \lim_{n\to\infty} \Delta V_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} I(a + i \cdot \Delta t) \cdot \Delta t \\ &\coloneqq \boxed{\int_a^b I(t) \cdot dt} \end{aligned}$$

<u>Achtung:</u>

- Das Problem ist noch nicht gelöst!
- Das bestimmte Integral ist nur eine Notation für den weiterhin unbekannten Wert!
- Die Durchführung der un-endlich feinen Summation ist (auf Umwegen) unmöglich.

Wir bekommen den Integralwert auch anders!

Hochfahren einer Pumpe

Grenzwertbildung

2 Produktsummen für die Intervallgrenzen $a = 0$ und $b < 0$:

$$\Delta V_n = \sum_{i=0}^{n-1} I(i \cdot \Delta t) \cdot \Delta t = \sum_{i=0}^{n-1} I\left(i \cdot \frac{b}{n}\right) \cdot \frac{b}{n}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\left(-\frac{25}{2}\left(i \cdot \frac{b}{n}\right)^2 + 100 \cdot \frac{b}{n} \cdot i\right) \cdot \frac{b}{n}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\left(-\frac{25}{2}\left(i \cdot \frac{b}{n}\right)^2 + 100 \cdot \frac{b}{n} \cdot i\right) \cdot \frac{b}{n}$$

$$= -\frac{25}{2} \cdot \frac{b^3}{n^3} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + 100 \cdot \frac{b^2}{n^2} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i$$

Mit entspr. Summenformeln gilt:

$$\Delta V_n = -\frac{25}{2} \cdot \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} + 100 \cdot \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{n^2 - n}{2}$$

$$= -\frac{25}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{2 \cdot n^3} \cdot b^3 + 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n^2 - n}{n^2} \cdot b^2$$

$$= -\frac{25}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) \cdot b^3 + 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot b^2$$

3 Grenzwertbildung:

$$\Delta V = \lim_{n\to\infty} \Delta V_n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{25}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{3}{2n^1} + \frac{1}{2n^2}\right) \cdot b^3 + 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot b^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$= -\frac{25}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot b^3 \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right)}_{=1} + 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot b^2 \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{=1}$$

$$= -\frac{25}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot b^3 + 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot b^2$$

Konkret für $b = 4$ min:

$$\Delta V = -\frac{25}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 4^3 + 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4^2$$

$$= \frac{1600}{3}$$

$$\approx 533$$

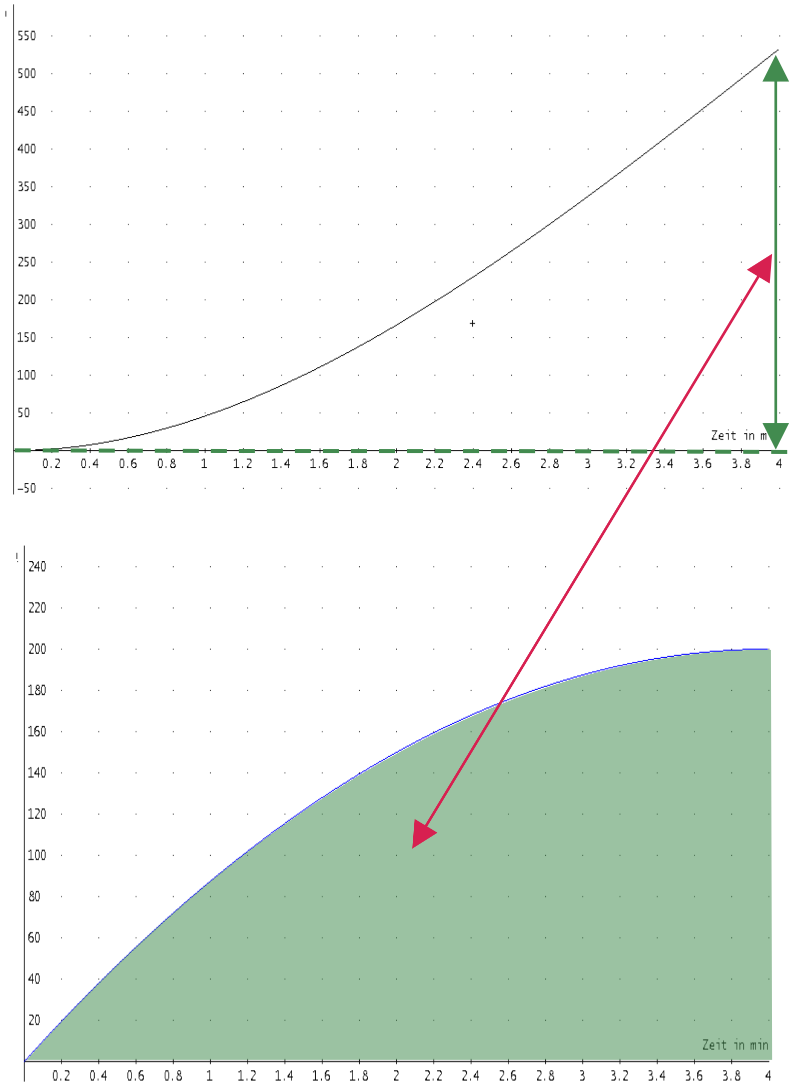
Wir bekommen den Integralwert auch anders!

Zusammenhänge – übertragen

zugeflossene Menge =

Differenz zweier Funktionswerte

Ableitung



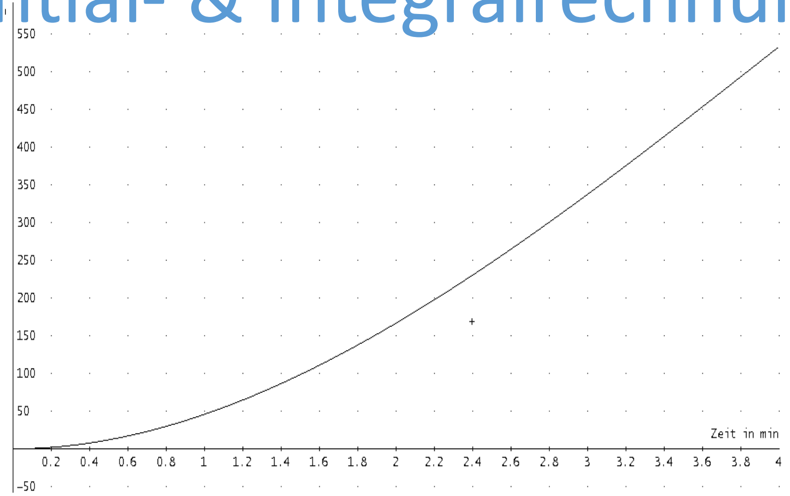
„Aufleitung“

zugeflossene Menge =

(Netto-)Flächeninhalt

Zusammenhänge - nutzen

Hauptsatz der Differential- & Integralrechnung



Dabei ist V(t) eine beliebige Stammfunktion von I(t), also eine Funktion, deren Ableitung gleich I(t) ist. Dann gilt:

$$\Delta V = \int_{a=0}^{b=4} I(t) \cdot \, dt = V(4) - V(0)$$

Zusammenhänge - beweisen

Hauptsatz der Differential- & Integralrechnung

Die Funktion $F_a(x)$ gebe für $x \in [a; b]$ die Flächenbilanz zwischen dem Graphen von f und der x-Achse auf dem Intervall $[a; x]$ an. Es gilt also:

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)dt\,.$$

Um zu zeigen, dass $F_a' = f$ ist, wird der Differenzenquotient von F_a betrachtet: $\frac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h}$.

In Diagramm 1 sind die Flächenstücke $F_a(x)$ mit und $F_a(x+h)$ mit dargestellt. Die Differenz $F_a(x+h) - F_a(x)$ ist der Inhalt der -Fläche.

Er kann durch Rechtecke der Breite h mit den Höhen $f(x)$ bzw. $f(x+h)$ nach unten bzw. nach oben abgeschätzt werden (Diagramm 2):

$$f(x) \cdot h \leq F_a(x+h) - F_a(x) \leq f(x+h) \cdot h$$

$$f(x) \leq \frac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h} \leq f(x+h)$$

Durch den Grenzübergang ergibt sich:

$$\lim_{h\to 0} f(x) \leq \lim_{h\to 0} \frac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h} \leq \lim_{h\to 0} f(x+h)$$

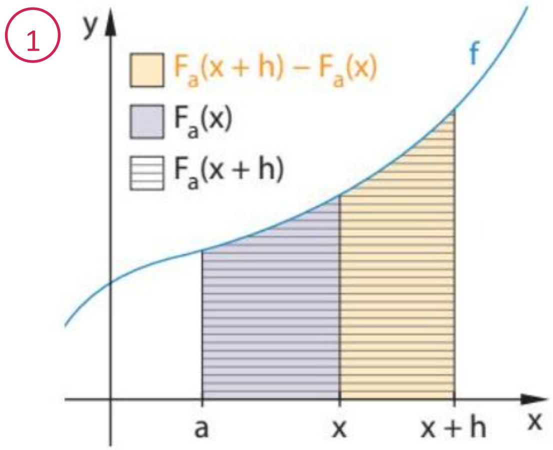
$$f(x) \leq F_a'(x) \leq f(x)$$

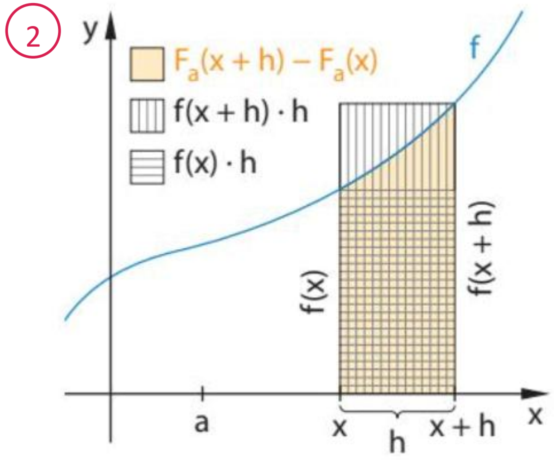
Die Funktion $F_a(x)$ ist also eine Stammfunktion von f und unterscheidet sich von jeder anderen Stammfunktion nur durch eine additive Kon-stante C, es gilt $F_a(x) = F(x) + C$.

Wegen $F_a(a) = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)dt &= F_a(b) \\ &= F_a(b) - F_a(a) \\ &= (F(b) + C) - (F(a) + C) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

■





Block, Jan u. a. (2021): Fundamente der Mathematik Nordrhein-Westphalen Qualifizierungsphase Grundkurs. Berlin: Cornelsen

Weiteres Vorgehen

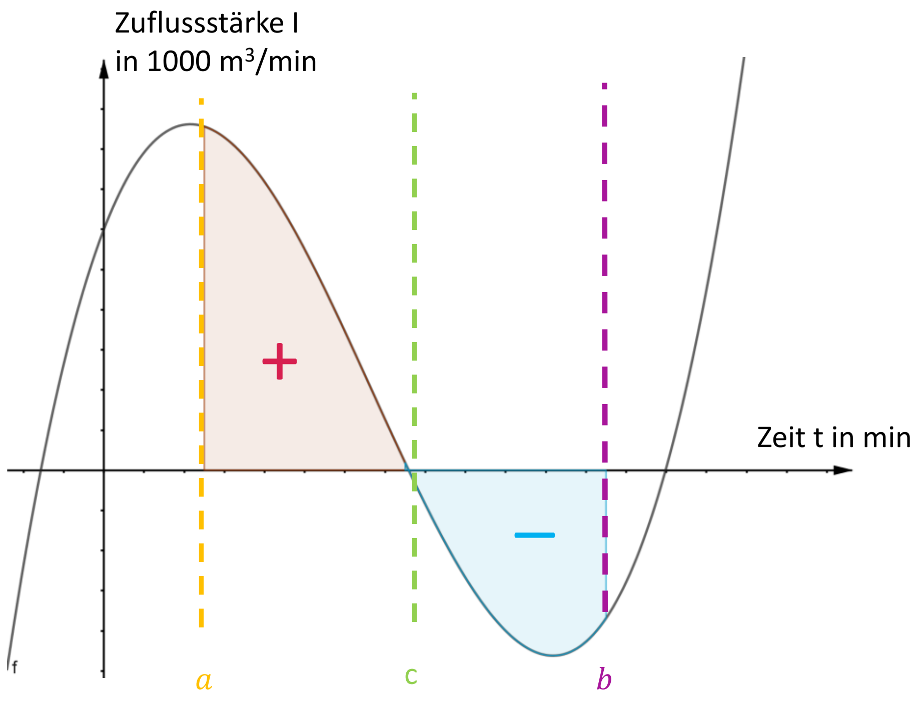
Zu- und Abfluss

bisher: $I(t) > 0$ momentaner Zufluss

$\int_a^c I(t) \cdot dt > 0$ (Gesamt-)Zufluss

jetzt: $I(t) < 0$ momentaner Abfluss

$\int_c^b I(t) \cdot dt < 0$ (Gesamt-)Abfluss



Negative Werte des bestimmten Integrals als Abfluss interpretierbar.

↓

Orientierte Flächeninhalte

Weiteres Vorgehen

Netto-Zufluss

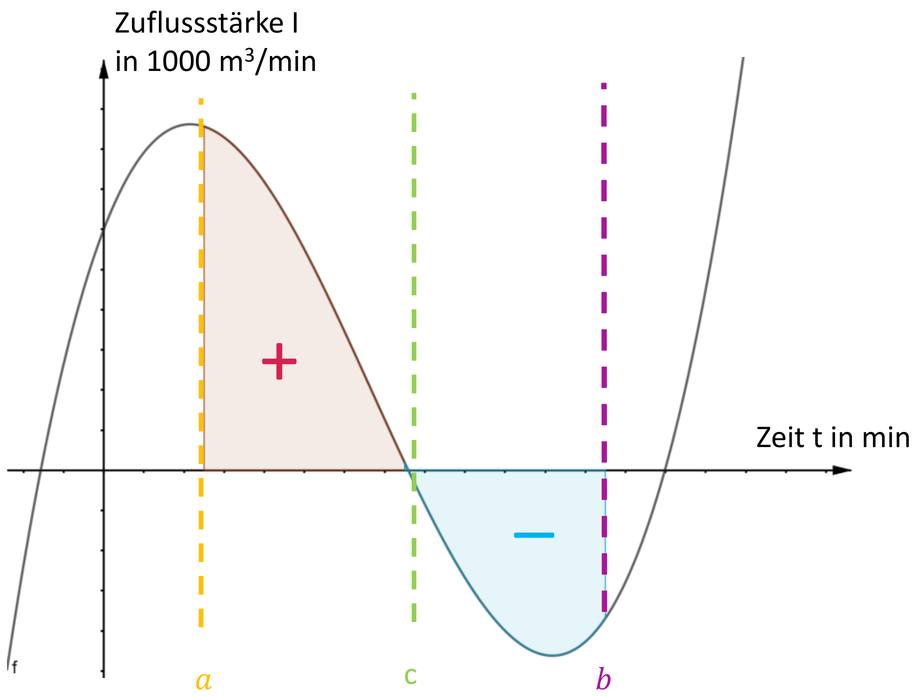
bisher: $I(t) > 0$ momentaner Zufluss

$\int_a^c I(t) \cdot dt > 0$ (Gesamt-)Zufluss

jetzt: $I(t) < 0$ momentaner Abfluss

$\int_c^b I(t) \cdot dt < 0$ (Gesamt-)Abfluss

$\int_a^b I(t) \cdot dt$ netto Zufluss im (Zeit-) Intervall $[a, b]$



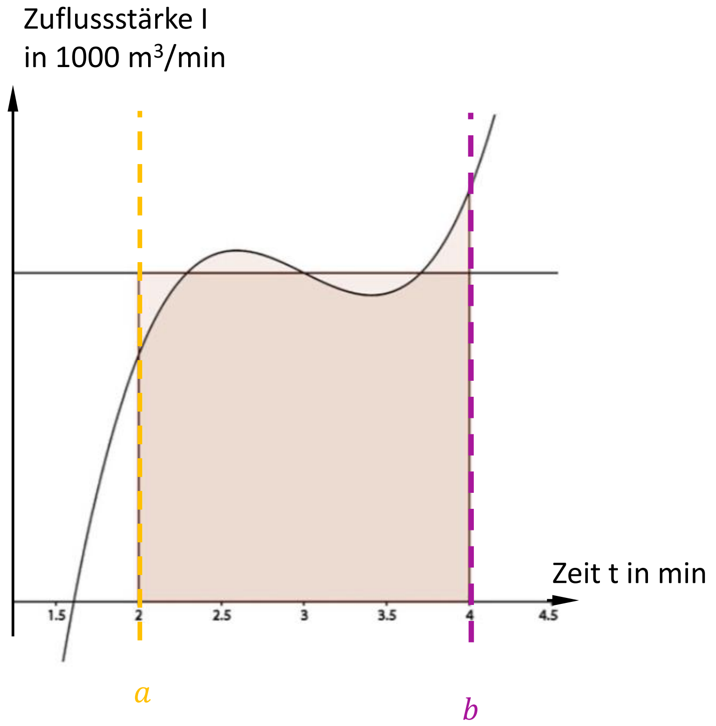
Hinweis: Möchte man absolute Flächeninhalte messen, dann ist das Gesamtintervall so aufzuteilen, dass der Integrand in keinem Teilintervall einen Vorzeichenwechsel hat und die Beträge der Integrale summieren.

Weiteres Vorgehen

Mittlerer Zufluss

$$\bar{I}_{a,b} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b I(t) \cdot dt$$

mittlerer momentaner Zufluss im (Zeit-)Intervall $[a, b]$



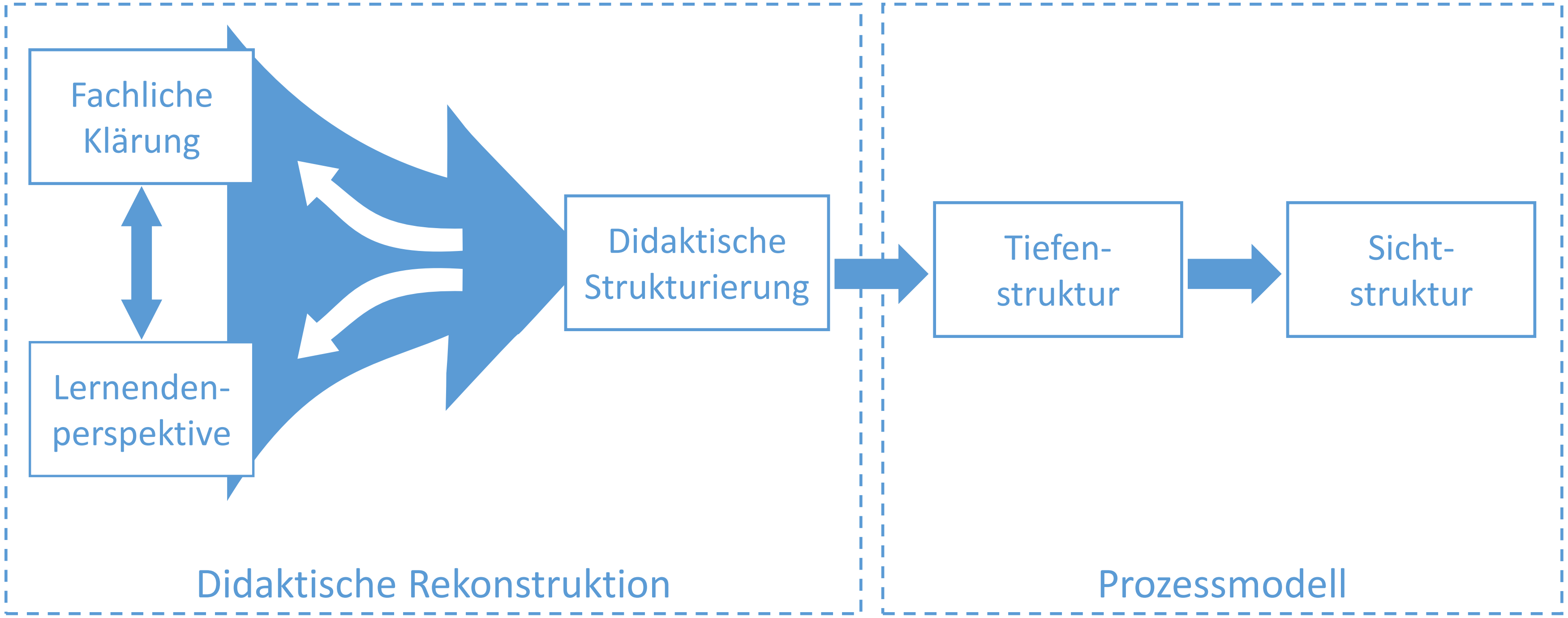
Sichtstruktur

5. Schritt

Bildquelle: https://www.hyperkulturell.de/multimedial-lernen/

Unterrichtsplanung

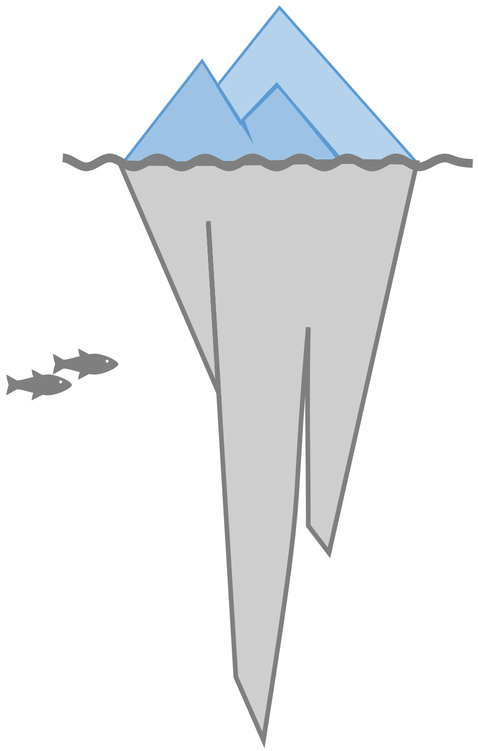
4. Schritt: Tiefenstruktur



Festlegung der **Sichtstruktur**: Wie soll das Prozessmodell umgesetzt werden?

Sichtstruktur

Aspekte und Beispiele



Lernprodukt	Auswahl der Aufgabe und des Produktes sowie Formulierung einer passenden Aufgabenstellung
Sozialform	z. B. Einzel-, Partner-, Gruppenarbeit
Methoden	z.B. Direkte Instruktion, Frontalunterricht, Projektarbeit, Freiarbeit
Organisationsform	z.B. Klassenunterricht, kleine Lerngruppe, Förderunterricht
Medien	z.B. Blatt, PPT, OHP, Tafel,
Differenzierungsform	Ziel: alle SuS kognitiv aktiveren (vgl. Kieler Modell)

Prozessmodell → Sichtstruktur

nach Oser & Patry (1990)

Verschiedene Basismodelle

	Name des Basismodells	Zieltyp des Lernens	Notwendige Merkmale	Beispiel einer Sichtstruktur
1	Lernen durch Eigenerfahrung	Aneignung von Erfahrungswissen	Unmittelbarer Lebensbezug	Arbeit in Sozial- und Produktionsbetriebe
2	Entwicklungsför-dernd./Strukturver-änderndes Lernen	Transformation von Tiefenstrukturen (z.B. moralisches Urteil)	Disäquilibrations-vorgänge	Kontroverse Diskussionen
3	Problemlösen (entdeckendes Lernen)	Lernen durch Versuch und Irrtum	Hypothesenbildung, Hypothesentestung	Experimentieren, Konfliktlösen
4a	Wissensaufbau	Memorierbare Fakten Fähigkeiten, ‚Narrativs"	Struktur und Strukturierung von Lehrgängen	Darbietender und entwickelnder Unterricht
4b	Konzeptbildung	Verwendung von Schemata	Differenzierung und Analogiebildung	Lernen durch Anwen-dung/ Transfer komple-xer Denksysteme

Fortführung der Tabelle »

Oser, F. & Patry, J.L. (1990). Choreographien unterrichtl. Lernens. Basismodelle des Unterrichts. Berichte z. Erziehungsw. 89. Freiburg: Päd. Inst.

Prozessmodell → Sichtstruktur

nach Oser & Patry (1990)

Verschiedene Basismodelle

Name des Basismodells		Zieltyp des Lernens	Notwendige Merkmale	Beispiel einer Sichtstruktur
5	Betrachtendes Lernen	Assimilation von ästhetischen Gegebenheiten	Nachahmung als innerer Prozess, me-ditativ. Wahrnehmen	Stille-Übung, geführte Bildbetrachtung
6	Lernen von Strategien	Lernen Lernen (Metalernen)	Gebrauch und Einsatz von allerlei Strategien	Reflexion über eigenes Lernen
7	Routinebildung & Training von Fertigkeiten	Routine & Fertigkeiten ohne Belastung des Bewusstseins verwenden	Hohe Übungsfre-quenz im Feld (Auto-fahren, mathm. Reihen, Vokabeln lernen)	Differenzierender Unterricht und Übungsqualität
8	Motilitätsmodell	Verarbeitung affektiver Spannungen durch schöpferisches Tun	Aufbau von affektiver Erregung, Indignation, Freude, Trauer etc. durch Narration vermittelt	Gestalterisches Zeichnen, Musizieren, „Dichten“, Tanzen, gestalterisches Mimik

Fortführung der Tabelle »

Oser, F. & Patry, J.L. (1990). Choreographien unterrichtl. Lernens. Basismodelle des Unterrichts. Berichte z. Erziehungsw. 89. Freiburg: Päd. Inst.

Prozessmodell → Sichtstruktur

nach Oser & Patry (1990)

Verschiedene Basismodelle

	Name des Basismodells	Zieltyp des Lernens	Notwendige Merkmale	Beispiel einer Sichtstruktur
9	Lernen dyn. Be-ziehungen, Lernen gem. Normen d. Partizipation (Ko-operationslernen)	Assimilation von ästhetischen Gegebenheiten	Nachahmung als innerer Prozess, me-ditativ. Wahrnehmen	Gestaltung von Freund-schaften, Kooperations-arbeiten, Schulver-sammlungen
10	Wert- und Identitätsaufbau	Wandel des Wertbe-wusstseins (politische, menschliche, religiöse Werte)	Reflektierte Hierarchien von Werten	Wertklärungsverfahren, politische Bildung, Kunsterziehung
11	Hypertextlernen	Komplexes Lernen, wenn die Begriffe schon vorhanden sind.	Suchen und Verar-beiten von Informa-tionen über ein be-stimmtes Thema, zu dem man schon alle Grundbegriffe aufge-baut hat	Vorbereiten von Vorträgen, Erstellen von größeren schriftlichen Arbeiten

Fortführung der Tabelle »

Oser, F. & Patry, J.L. (1990). Choreographien unterrichtl. Lernens. Basismodelle des Unterrichts. Berichte z. Erziehungsw. 89. Freiburg: Päd. Inst.

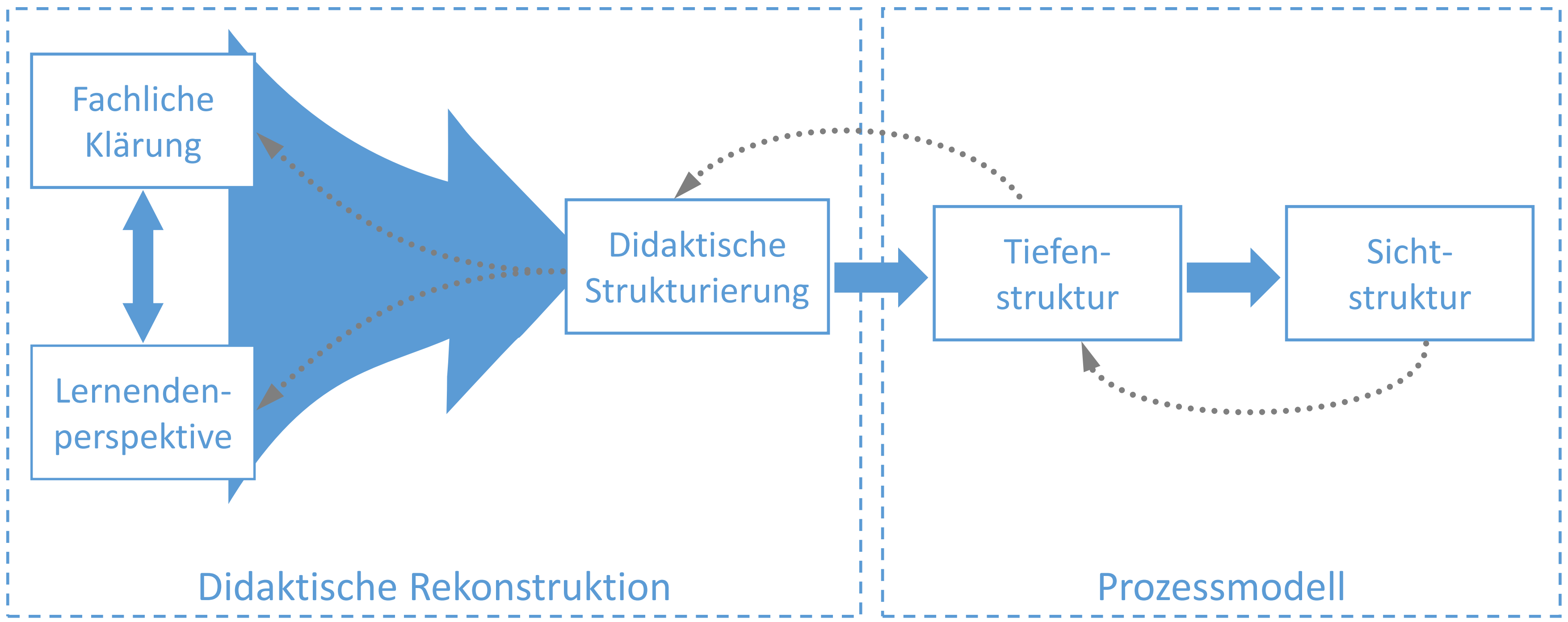
Reflexion

6. Schritt

Bildquelle: https://www.lehrer-online.de/artikel/fa/cartoon-der-woche-kundenorientierung/

Unterrichtsplanung

5. Schritt: Reflexion



Festlegung der **Sichtstruktur**: Wie soll das Prozessmodell umgesetzt werden?

Reflexion

Waren **Arbeitsaufträge** klar und zielführend formuliert (Abgleich mit den eigenen Erwartungen)?

- Stand den Schülern ausreichend Zeit zur Bearbeitung der Arbeitsaufträge zur Verfügung?
- Wurde das Vorwissen effizient genutzt?
- Gab es Bereiche/Strategien, die in Zukunft stärker trainiert werden müssen?
- War es jedem Schüler möglich, sich aktiv zu beteiligen?
- Habe ich Schüler nachdenklich beobachtet?

War die **Struktur** des Unterrichts (Methoden, Phasierung, Organisation) in Bezug auf Lerngruppe und Inhalt effizient gewählt?

- Waren die Unterrichtsziele/Produkte transparent?
- Wurde die Möglichkeit einer Metakommunikation (Methode, Inhalt, Ziele, Reflexion, Evaluation) genutzt?
- Wurde der Umgang mit den Schülern lernförderlich gestaltet ((Fach-) Kommunikation, Loben, Sinnvolle Tipps)?

War der Unterricht **kompetenzorientiert** ausgerichtet im Sinne der Bildungsstandards?

- Haben die Schüler die Möglichkeit gehabt, Ziele durch selbstreguliertes Vorgehen zu erreichen?
- Wurden Strategien benutzt?
- Konnten individuelle Ideen entwickelt werden?

Wird den Schülern die Möglichkeit für Anmerkungen, Wünsche und Bewertungen in Bezug auf den Unterricht gegeben?

Unterrichtsplanung

These

Entwickeln Sie eine These im Themenfeld des heutigen Moduls. Nennen Sie Stichpunkte zur Thesenbegründung.

Abschluss

Unterrichtsplanung

Eigene Einheit

Betrachten Sie die aktuelle Unterrichtseinheit in einer Ihrer Mathematikklassen.

Verorten Sie den Fortschritt innerhalb der Einheit in einem Prozessmodell.

Formulieren Sie ein Vorhaben für deine weitere Unterrichtsplanung in dieser oder der nächsten Einheit.
(Was nehmen Sie mit? Was möchten Sie ausprobieren?)

Ausblick

Das nächste Modul findet statt

am	**13.05.2026**
bei	**Herrn Danker**
an	**BvS**
in	**Geesthacht**