

Marcus Nührenbörger

„Mein Daumen ist ungefähr einen Zentimeter breit“

Stützpunktvorstellungen entwickeln – Zahlvorstellungen ausbauen

Um Stützpunktvorstellungen zu entwickeln, sind naturgemäß konkrete Erfahrungen mit Objekten und Situationen bedeutsam. Weitaus weniger bedacht wird die Bedeutung von Zahl- und Operationsvorstellungen beim Aufbau von Stützpunktvorstellungen.



Abb. 1:
Messplakate
entwerfen

Das Schätzen mit Stützpunktvorstellungen setzt grundlegende Erfahrungen des Vergleichens und Messens mit größenspezifischen Repräsentanten einer Maßeinheit voraus. Um beispielsweise Vorstellungen zu 1 kg, 1 m oder 1 h aufzubauen, sind konkrete Erfahrungen enaktiver, ikonischer und symbolisch-sprachlicher Art mit entsprechenden Repräsentanten (z. B. Gewichtssätze, Meterstäbe, Zeitabschnitte) zu durchdenken. Verinnerlichte Handlungserfahrungen sind – wenn sie als Stützpunktvorstellungen genutzt werden sollen – nicht allein mit dem Wissen um die jeweilige Größe und die größenspezifischen Einheitsbezeichnungen verknüpft. Sie stellen vielmehr innere Bilder von geeigneten Objekten dar, die flexibel in Beziehung zu anderen Objekten gesetzt werden können und zugleich verhaftet sind mit

dem Wissen um Maßzahlen. Die mentalen Stützpunkte können somit auf statische Weise Objekte repräsentieren, die ein spezifisches Maß abbilden und die mental mit anderen Objekten qualitativ verglichen werden. Zudem ist es für den Schätzprozess unabdingbar, dass Objekte auch auf dynamische Weise als mentale Maßeinheit wiederholt abgetragen oder zerlegt werden.

Um Vorstellungen zu entwickeln, die als Stützpunkte für Maße gedanklich zur Verfügung stehen, reicht es nicht aus, wenn Kinder diese auf Arbeitsblättern oder in Arbeitsheften als „Stützpunktvorbild“ kennen und auswendig lernen. Dadurch erwerben sie lediglich träges Wissen über Stützpunkte, ohne diese aktiv inhaltlich zu einer Vorstellung aufzubauen, die mental beim Schätzen genutzt werden kann. Um Stützpunktvor-

stellungen zu entwickeln, gehört es in erster Linie dazu, dass sich Kinder diese eigenständig aneignen, indem sie ihren Bleistift, ihren Daumen oder ihre Handspanne ausmessen, dokumentieren und als eigene Stützpunkte verinnerlichen (Abb. 1).

Bei größeren Maßeinheiten ist es – ebenso wie im großen Zahlenraum – schwierig, sich passende Repräsentanten vorzustellen. Um den Lernenden dennoch Zugang zu tragfähigen Vorstellungen zu bieten, können Größen zwischen unvorstellbaren Zahlen und Einheiten vermitteln. Beispielsweise sind größere Längenangaben („Wie weit wohnst du weg?“) kaum sinnvoll für Schülerinnen und Schüler zu beantworten, wenn sie auf das Längenmaß reduziert werden. Hingegen können vorstellbare Zeitspannen hier eine Vermittlerrolle zwischen unsichtbaren Längen und

Beispiel 1:

$3\text{ m} < 20\text{ cm}$, da $3 < 20$

Fehlermuster:

Fokus liegt ausschließlich auf der Zahlengröße.

Beispiel 2:

$1\text{ m } 20\text{ cm} > 125\text{ cm}$, da $\text{m} > \text{cm}$

Fehlermuster:

Fokus liegt ausschließlich auf der Einheitsrelation.

Abb. 2:
Fehlermuster
beim Vergleichen
von Längen

erfahrbaren Zeitspannen einnehmen („10 min mit dem Fahrrad“). Die Verschmelzung von Größen schafft so eine Grundlage für den Aufbau von Stützpunktvorstellungen.

Zahlvorstellungen und Maßzahlvorstellungen

Maßzahlen verbinden sozusagen Zahlen und Einheiten miteinander. Dadurch schaffen sie eine Brücke zwischen abstrakten mathematischen Objekten und konkreten Erfahrungen, die als repräsentative Situationen und Objekte der Einheit zugeordnet sind. Im Unterricht werden Maßzahlen im Zuge der Erkundung der unterschiedlichen Größen immer wieder aufs Neue erörtert und thematisiert. Hierbei lernen die Schülerinnen und Schüler, dass mit einer Maßzahl unterschiedliche Gegenstände oder Lebewesen (z. B. eine Tür, eine Tafel, ein Tisch, eine Lehrkraft) unter der gemeinsamen Eigenschaft der Länge verglichen und zu einzelnen Klassen mit der gleichen Länge geordnet werden können. Diese können dann mit einer Maßzahl (z. B. 2 m) bezeichnet werden. Wenn Kinder die Einheiten der Maßzahlen nicht beachten oder keine entsprechende Vorstellung nutzen können, besteht die Gefahr, dass sie vorschnell nur die Zahlen miteinander vergleichen. Dies kann zu Fehlern beim Vergleich von Maßzahlen mit unterschiedlichen Einheiten führen; beispielsweise zwischen 3 m und 20 cm. Ein solcher Fehler basiert in der Regel darauf, dass die Kinder zwar Vorstellungen über Zahlen besitzen, aber nicht über die

größenrelevanten Stützpunkte, so dass sie ausschließlich auf ihr Zahlenwissen zurückgreifen. Zuweilen wissen die Kinder zwar, dass unterschiedliche Maßeinheiten mit unterschiedlich großen Repräsentanten in Beziehung stehen. Wenn sie aber zugleich keine Vorstellung über die Bedeutung der Maßzahlen besitzen, dann denken sie ausschließlich an die Auflistung der Einheiten unterschiedlicher Größe unabhängig von der jeweiligen Anzahl der Einheit. Beispielsweise sind dann 1 m 20 cm nicht nur größer als 75 cm, sondern auch größer als 125 cm, da bei der ersten Maßangabe die größere Einheit vorkommt (Abb. 2).

Beziehungen zwischen Zahlen – Beziehungen zwischen Einheiten

Im Gegensatz zu Zahlen, die eine spezifische Anzahl einer Menge oder eine Position in einer Folge beschreiben, können unterschiedliche Maßzahlen dasselbe Maß beschreiben (z. B. 20 dm, 200 cm). „Dieser Umstand, dass ein und dieselbe Größe mit verschiedenen ‚Namen‘ versehen werden kann, ist für die Schülerinnen und Schüler eine neue Erkenntnis, die zunächst auf die Besonderheiten des Umwandelns, nämlich die Wahl der Maßeinheit, zurückgeführt wird. Diese neue und zunächst eingegrenzte Erkenntnis erhält jedoch eine tragen-

Umwandeln von Maßzahlen:

$3\text{ m} = 30\text{ dm} = 300\text{ cm} = 3000\text{ mm}$

Schreibweisen von Maßzahlen:

$3\text{ m } 50\text{ cm} = 350\text{ cm} = 3,5\text{ m}$

Umformungen von Termen:

$30 = 10 + 10 + 10 = 3 \cdot 10$

Abb. 3:
Unterschiedliche
Maßzahlen
können dasselbe
Maß beschreiben.

de, weitreichende Bedeutung im Rahmen der Zahlbereichserweiterungen in der Sekundarstufe, in deren Zusammenhang nun auch ‚unbenannte Zahlen‘ unterschiedliche ‚Namen‘ erhalten können“ (Franke & Ruwisch 2010, S. 180). Gleichwohl lernen die Schülerinnen und Schüler bereits von Klasse 1 an kennen, dass eine Zahl durch unterschiedliche Terme ausgedrückt werden kann. Dieses Grundverständnis an Termbeziehungen, das bedeutsam für das Zahl- und Operationsverständnis ist, bereitet die Lernenden zugleich darauf vor, Maßzahlen in Relation zueinander zu deuten (Abb. 3).

Die Maßzahl an sich drückt – auch wenn man es ihr nicht ansieht – eine Multiplikationsaufgabe aus: Die Zahl gibt den Faktor an, um den die gewählte Basiseinheit vervielfacht wird. Wird als Einheit eine Grundeinheit gewählt (z. B. Pfund anstelle von 500 g), gibt die Maßzahl zugleich die Anzahl der gewählten Einheit an (z. B. 3 Pfund anstelle von 3 mal 500 g = 1,5 kg) (weitere Beispiele in Abb. 4).

Abb. 4:
Gut versteckt:
Die Maßzahl ist
eigentlich eine
Multiplikations-
aufgabe.

$$3\text{ h} = 3 \cdot 1\text{ h} = 3 \cdot 60\text{ min} = 180\text{ min} \quad 3\text{ m} = 3 \cdot 1\text{ m} = 3 \cdot 100\text{ cm} = 300\text{ cm}$$

1. und 2. Schuljahr:**Zahlenraum bis 100**

$$12 = 10 + 2 = 1 \text{ Z } 2 \text{ E}$$

$$62 = 60 + 2 = 6 \text{ Z } 2 \text{ E} = 6 \cdot 10 + 2$$

Grundlagen:**Längen, Geldwerte, Zeitspannen**

$$12 \text{ cm} = 10 \text{ cm} + 2 \text{ cm} = 1 \text{ dm } 2 \text{ cm}$$

$$62 \text{ cm} = 60 \text{ cm} + 2 \text{ cm}$$

62 cm: „Das sind ein halber Meter und zwölf Zentimeter.“

Abb. 5: Im 1. und 2. Schuljahr werden dekadische Beziehungen an Zahlen und Maßzahlen thematisiert.

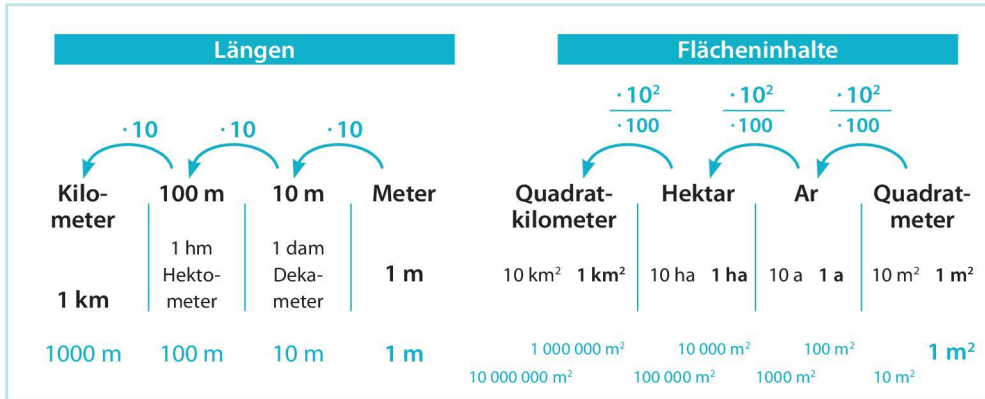


Abb. 6: Unterschiedliche Umwandlungsfaktoren bei Längen und Flächeninhalten

Das Vervielfältigen von Zahlen lernen die Schülerinnen und Schüler bereits im Arithmetikunterricht kennen, wenn sie Zahlen verdoppeln oder aber in Schritten zählen – also auch schon bevor das Einmaleins thematisiert wird. Die Erkenntnis, dass eine Zahl durch eine andere Zahl, die vervielfältigt wird, ausgedrückt wird, stützt sich auf grundlegende Teil-Ganzes-Erfahrungen. Eine Zahl kann in mehrere gleich große Teile zerlegt werden bzw. aus diesen zusammengesetzt werden. Mit anderen Worten: Zahlen können durch andere Zahlen „ausgemessen“ werden.

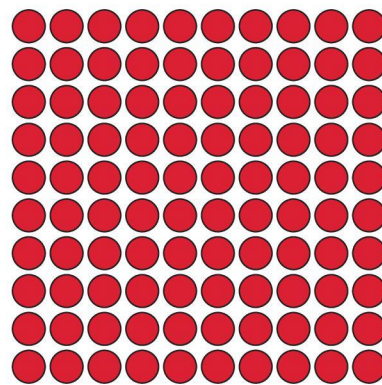
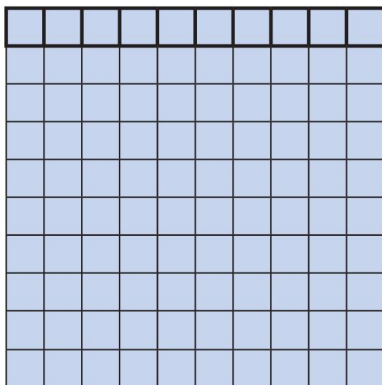
Mit Stellenwerten rechnen – Einheiten umrechnen

In jedem Schuljahr lernen die Kinder aufs Neue die Erweiterung der Zahlenräume und damit die dekadische Strukturierung mit Bezug auf immer größer werdende Stellenwerte kennen – ähnlich wie sie analog zur Erweiterung der Zahlenräume die strukturellen Beziehungen zwischen den Einheiten der unterschiedlichen Größen thematisieren. Während in den ersten zwei Schuljahren der Fokus auf dem Zahlenraum bis 100 liegt (vgl. Abb. 5) und damit die Beziehun-

gen zwischen Cent und Euro, Zentimeter und Meter (zuweilen auch Dezimeter) oder Minuten und Stunden, rücken in den weiteren Schuljahren mit der Erweiterung des Zahlenraums auf Tausend bzw. eine Million die größeren Beziehungen bei Längen (z. B. Millimeter, Meter und Kilometer), Gewichten (z. B. Gramm, Kilogramm und Tonne) oder Volumina (Milliliter, Liter) in den Vordergrund. Auch wenn im Unterricht Beziehungen zwischen Maßeinheiten oftmals auf benachbarte Einheiten reduziert werden (z. B. 1 m = 100 cm, 1 cm = 10 mm), ist es für ein flexibles Maßzahlverständnis wichtig, die Beziehungen vielfältig zu thematisieren (z. B. 1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm).

Die Zusammenhänge zwischen der Erweiterung des Zahlenraums und des Stellenwertverständnisses auf der einen Seite und der Erkundung von Größen und deren Maßzahlbeziehungen auf der anderen Seite zeigen deutlich auf, wie die Entwicklung dekadischer Vorstellungen nicht nur Voraussetzung für den Aufbau von Stützpunktvorstellungen ist, sondern beide inhaltlichen Themen sich gegenseitig stützen und bereichern. Denn die Verfeinerung und Vergrößerung von Einheiten kann rechnerisch durch die Multiplikation und Division mit Zehnerpotenzen vorgenommen werden. Wenn Kinder über Maßzahlbeziehungen nachdenken und diese erkunden, greifen sie auf dekadische Vorstellungen zurück und erweitern diese wiederum. Wenn Kinder über dezimale Vorstellungen verfügen, können sie auf diese zurückgreifen, und zwar wenn sie Maßzahlen zerlegen oder Maßzahlen umwandeln von einer Einheit in eine andere. Die analogen Beziehungen zwischen dem Dezimalsystem und dem Umrechnen von Einheiten innerhalb einer Größe sind gewiss eine große Stütze des Verständnisses des metrischen Einheitssystems (Halbe u. a. 2011). Allerdings besteht auch die Gefahr, dass dadurch das Umwandeln durch Umgangsregeln verständ-

Abb. 7:
Zehn Einheitsquadrate ergeben einen Einheitsstab. Zehn Einheitsstäbe ergeben untereinandergelegt ein neues Quadrat, ähnlich wie beim Hunderterpunktfeld.



nislos und wie ein Algorithmus gelehrt wird: „Soll eine Einheit in die nächstfeinere Einheit übertragen werden, hängt man eine Null an die Maßzahl an (jedenfalls dann, wenn die Maßzahl ganzzahlig ist), soll die Einheit größer werden, dann streicht man eine Endnull der Maßzahl weg (jedenfalls dann, wenn die Maßzahl ganzzahlig ist und Endnullen vorhanden sind)“ (Schwarzkopf 2013, S. 9). Dies führt gerade dann zu Schwierigkeiten, wenn Umwandlungsfaktorregeln lediglich auswendig gelernt werden, ohne deren dekadische Grundstruktur mit zu verstehen. Bei Längen scheint dies noch einfach zu sein, wenn Kinder lernen, dass 1 km um Faktor 1000 verfeinert wird in 1000 m, 1 m um den Faktor 100 in 100 cm und wiederum 1 cm um den Faktor 10 in 10 mm; bei Gewichten hingegen der Faktor 1000 stabil bleibt zwischen 1 t und 1000 kg, 1 kg und 1000 g sowie 1 g und 1000 mg. Allerdings tragen die scheinbar einfachen Regeln bereits bei Längen nicht vollständig, denn die wichtige Einheit „Dezimeter“ wird nicht mit aufgegriffen. Auch wird es für die Kinder problematisch, wenn die Maßzahlen nicht ganzzahlig sind oder wenn in der Sekundarstufe Beziehungen zwischen Flächen- und Rauminhaltsmaßen hergestellt werden.

Um ein grundlegendes Verständnis der Maßzahlbeziehungen zu entwickeln, ist es nicht förderlich, möglichst viele Umrechnungen durchzuführen. Vielmehr muss die Verknüpfung zwischen Einheiten und den Beziehungen im dezimalen Stellenwertsystem durch inhaltlich bedeutsame Lernanlässe erörtert werden (Halbe u.a. 2011). „Gerade weil sich die unterschiedlichen Größen oberflächlich gesehen unterschiedlich verhalten, müssen von Beginn an die strukturellen Gemeinsamkeiten immer wieder betont werden“ (Schwarzkopf 2013, S. 9).

Am Beispiel von Längen und Flächeninhalten (Abb. 6) wird auch deutlich, wie wichtig es ist, das Messen nicht auf das Zählen von Objek-

ten zu reduzieren. Beim Messen von Flächen werden einzelne Einheiten multiplikativ ebenso vervielfacht wie bei Längen bzw. ein Maß wird entsprechend aufgeteilt. Eine inhaltliche Grundlage der veränderten Umwandlungsfaktoren 10 bei Längen und 100 bei Flächeninhalten kann in der Grundschule dadurch gelegt werden, dass bei Längen immer 10 Einheitsstäbe (z. B. 1-dm-Stab) zu einem neuen Maß (1-m-Stab) gebündelt werden. Nutzt man bereits in der Grundschule Zentimeter-, Dezimeter- und Meterquadrate, um Flächen auszumessen, wird schnell ersichtlich, dass 10 Dezimeterquadrate zwar nebeneinandergelegt werden können. Diese lassen sich aber nicht quadratisch zu einem Meterquadrat zusammenlegen. Hingegen bilden 10 mal 10 Dezimeterquadrate ein neues Quadrat (das Meterquadrat) – analog dem Hunderterpunktfeld (Abb. 7).

Mit dem Komma rechnen – Kommazahlen bei Größen erkunden

Im Alltag begegnen den Grundschulkindern regelmäßig Kommazahlen in Verbindung mit Geldwerten, aber auch mit den physikalischen Größen wie Längen, Gewichte oder Volumina. In manchen Schulbüchern finden sich hierzu scheinbar plausibel klingende Regeln, die den Umgang mit Kommazahlen dadurch vereinfachen, dass das Komma einer Maßzahl lediglich diese in zwei Einheiten trenne – exemplarisch mit Blick auf Geldwerte formuliert: „Das Komma trennt Euro und Cent.“ Auch wenn diese oberflächlichen Regeln oftmals (immer dann, wenn bei Euro und Cent oder Meter und Zentimeter zwei Stellen nach dem Komma belegt sind bzw. bei Kilometern und Metern, Kilogramm und Gramm oder Liter und Milliliter drei Stellen nach dem Komma; z. B. 2,50 m = 2 m 50 cm oder 2,05 m = 2 m 5 cm) zu fehlerfreien Resultaten (ver-)führen, sei

Beispiel 3:

2,50 m = 2 m 50 cm 2,05 m = 2 m 5 cm
aber
2,5 m ≠ 2 m 5 cm oder 2,500 m ≠ 2 m 500 cm

Abb. 8: Komma-trennt-Fehler: Zahlen vor und nach dem Komma werden unabhängig voneinander und von der Maßeinheit betrachtet.

hier ausdrücklich davor gewarnt. Es besteht die Gefahr, dass die Schülerinnen und Schüler eine rezeptartige, algorithmische Vorstellung von Kommazahlen aufbauen, die weder mit Stützpunktvorstellungen zu den Einheiten noch mit einem tragfähigen und nachhaltigen Verständnis von Dezimalbrüchen einhergehen. Dies hat bereits in der Grundschule gravierende Folgen nicht nur mit Blick auf das Dezimalzahlverständnis, das in der Sekundarstufe weiter ausgebaut wird. Beispielsweise werden 2,5 m = 2 m 50 cm = 2 m 5 dm verstanden als 2 m und 5 cm, während hingegen die ungewöhnliche Notation 2,500 m als 2 m und 500 cm interpretiert wird (Abb. 8).

Für ein grundsätzliches Verständnis ist es wichtig, dass die Kinder das Komma nicht als trennendes, sondern als verbindendes Zeichen verstehen. Es verbindet zwei unterschiedliche Maßeinheiten miteinander und macht aus der kleineren Einheit eine größere – 50 cm werden als 0,5 m interpretiert (Koch & Wollenweber 2020, Schwarzkopf 2013).

Literatur

- Franke, M. & Ruwisch, S. (2010). Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule. 2. Auflage. Heidelberg: Spektrum.
- Halbe, A., Licht, G. & Nührenbörger, M. (2011). Wie schnell wachsen Haare? In: Mathematik differenziert H. 4, S. 40–43.
- Koch, Y. & Wollenweber, T. (2020). Länger, leichter, genauso schwer. Die Lebenswelt mithilfe von größenbereichsspezifischen Äquivalenz- und Ordnungsrelationen beschreiben. In: Mathematik differenziert, H. 3, S. 22–29.
- Nührenbörger, M., Schwarzkopf, R., Bischoff, M., Götze, D. & Heß, B. & Hunscheid, D. (2018). Das Zahlenbuch 3. Leipzig: Klett.
- Schwarzkopf, R. (2013). Größen: Messen, Rechnen, Schätzen – grundlegende Einsichten in der Grundschule. In: Grundschulmagazin H. 5, S. 7–12.