

Warum nicht Größenvorstellungen?

Stützpunkte als Teil der Grundvorstellungen zu „Größen und Messen“

Repräsentanten können zu Stützpunkten werden, wenn Kinder das Wissen um deren Größe mit inneren Vorstellungen verbinden. Nutzen sie diese Stützpunktvorstellungen flexibel, zeigen sich ihre Grundvorstellungen zu Größen.

Größe – was ist das?

Was ist Länge, was Gewicht oder Zeit? Auf dieser abstrakten Ebene werden wir sicher alle sagen, dass es nicht *die* Vorstellung, womöglich auch noch die richtige oder vollständige Vorstellung der jeweiligen Größe gibt. Doch auch zu konkreten Größenangaben, wie 1 m, 1 kg oder 1 min, gibt es nicht *die* innere Vorstellung. Es ließe sich einwenden, dass selbstverständlich jede Person mehrere Vorstellungen zu 1 m, 1 kg, 1 min aktivieren kann oder können sollte. Das sei doch gerade das Ziel, dass Kinder „Größenvorstellungen“ im Mathematikunterricht aufbauen. Doch bei diesen Vorstellungen wird es sich immer um einen Träger der Größe, einen Repräsentanten handeln und nicht um den Größenwert selbst (Griesel 1996; Grode 2001). Die Vorstellungen zur Länge 1 m umfas-

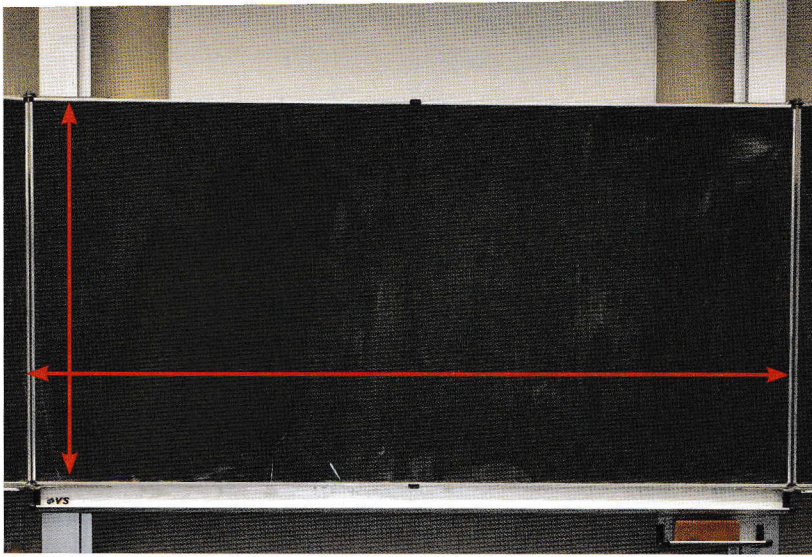
sen also Objekte oder Abstände der Länge 1 m, z. B. das Tafellineal oder die Breite des Türrahmens der Klassenzimmertür. Als Vorstellungen zu 1 kg könnten Objekte oder (verpackte) Mengen der Masse 1 kg genutzt werden, z. B. der entsprechende Gewichtsstein oder eine Packung Mehl. Vorstellungen zur Dauer 1 min umfassen Vorstellungen von konkreten Vorgängen oder Abläufen, z. B. die Zeit, die der Sekundenzeiger für eine Runde auf dem Ziffernblatt benötigt oder die ich bis zur Bushaltestelle brauche. Obwohl in der fachdidaktischen Literatur der Begriff „Größenvorstellungen“ gängig ist, verwenden wir ihn nicht. Wenn eine Größe nicht vorstellbar, sondern immer an die Größenausprägung eines Repräsentanten geknüpft ist, sollte besser der Begriff Stützpunkt- oder Repräsentantvorstellung verwendet werden.

Stützpunkt – was ist das?

Vereinzelte wird in der Literatur genauer differenziert, wenn von Stützpunkten – englisch *benchmarks* – die Rede ist, teilweise wird der Begriff allerdings auch eher unspezifisch verwendet. Grundsätzlich sollte zwischen *Stützpunktwissen* und *Stützpunktvorstellungen* unterschieden werden, weil sich auch empirisch gezeigt hat (z. B. Reuter 2011), dass Kinder zwar vereinzelt Wissen über die Größenausprägungen bestimmter Repräsentanten (*Stützpunktwissen*) aufgebaut haben können, ohne aber auf mentale Vorstellungen davon (*Stützpunktvorstellung*) zurückgreifen zu können. Beim Stützpunktwissen liegt demnach Wissen über die Größenangabe eines Objekts vor, während es sich bei Stützpunktvorstellungen um mentale Bilder der quantitativen Ausprägung handelt. Anders als es der Begriff „mentale Bilder“ nahelegt, weisen diese je nach Größenart einen visuellen, haptischen oder zeitlichen Charakter auf. Und letztlich müssen Wissen und Vorstellung auch wirklich zum *Stützpunkt* werden, d. h., dass diese flexibel zum mentalen Vergleichen, Schätzen und Lösen von alltäglichen

Abb. 1:
Kleiner, größer
oder ungefähr 1 m

kleiner als 1 m (<1m)	ungefähr 1 m (≈1m)	größer als 1 m (>1m)
• Einzeltisch (Breite) • Stuhl (Höhe)	• Tafellineal • Tür (Breite) • Tafel (Höhe) • 2 Bodenfliesen	• Tür (Höhe) • Tafel (Gesamtlänge) • Zweiertisch (Breite) • Fensterbank



kleiner als 1 m (<1m)		ungefähr 1 m (≈1m)		größer als 1 m (>1m)
< 50 cm	> 50 cm und < 90 cm	≈1m	> 110 cm und < 150 cm	> 150 cm
• Stuhl (Sitzhöhe)	• Tür (Breite 90 cm) • Einzeltisch (Breite 70 cm) • Stuhl (Höhe)	• Tafellineal (100 cm) • Tafelhöhe (100 cm) • 2 Bodenfliesen (à 50 cm)	• Zweiertisch (Breite 130 cm)	• Tür (Höhe 200 cm) • Tafel (Länge) • Fensterbank

Anforderungen bis hin zu komplexen Problemen eingesetzt werden können (vgl. Beitrag „Zur Sache“).

Joram (2003) beschreibt die Entwicklung flexibler Stützpunktvorstellungen als einen dreistufigen Prozess. Zunächst sind Stützpunkte, wie z. B. die Körpermaße, nur als konkrete Einheiten zum schätzenden Messen verfügbar. Auf einer zweiten Stufe sind sie als mentale Bilder verfügbar und können somit als Referenzpunkte beim Schätzen dienen. Werden weitere Stützpunktvorstellungen aufgebaut, werden diese mental bzgl. der Größenausprägung (ein-)gereiht. Eine weitere Flexibilisierung sieht Joram auf der dritten Stufe gegeben, wenn die Stützpunktvorstellungen nicht nur ordinal gereiht, sondern auch skaliert, d. h. miteinander ins Verhältnis gesetzt werden können: Zum einen kann dann mental nicht nur verglichen, sondern auch gedanklich mit dem Stützpunkt gemessen werden. Zum anderen lassen sich so die verschiedenen Stützpunkte untereinander noch ergiebiger vernetzen.

Individuelle und konventionelle Stützpunkte

Der eigene Körper mit den Längen verschiedener Körperteile eignet

sich besonders gut, um individuelle Stützpunkte aufzubauen und zu nutzen, weil wir ihn immer bei uns haben. In jedem Schulbuch finden sich deshalb Körpermaße als Stützpunkte für Längen: die Finger- oder Daumenbreite als Repräsentant für 1 cm, die Handbreite oder kleine Fingerspanne als Repräsentant für 10 cm und entweder zwei Schritte oder ein großer Schritt als Repräsentant für 1 m. Teilweise wird dies als zu lernendes Stützpunktwissen ausgewiesen: „Diese Vergleichslängen solltest du dir merken.“ Handelt es sich also um konventionelle und gar nicht um individuelle Stützpunkte? Gelten diese Maße eigentlich für jedes Kind in unserer Klasse? Dieser letzten Frage sollte unbedingt nachgegangen werden, um zu prüfen, wie breit mein Daumen, mein Zeige- oder mein kleiner Finger eigentlich tatsächlich ist. Zudem wird im Grundschulunterricht selten thematisiert, dass Kinder ja noch wachsen und sich deshalb ihre Körpermaße ändern werden: Ist der Daumen eines Viertklässlers noch so schmal wie der des Zweitklässlers? Die oben aufgeführten Körperstützpunkte unterscheiden sich darüber hinaus darin, ob es sich um feste Längen am Körper – Daumen-

breite – oder um variable Abstände zwischen Körperteilen – Schrittlänge – handelt. Versuchen Sie einmal, mit Ihren beiden Händen einen festen Längenabstand von einem Raum in einen anderen „zu tragen“. Wie bei den Händen passen sich Schrittgrößen oder Fingerspannen häufig der auszumessenden Länge an oder variieren je nach der Aufmerksamkeit, die wir ihnen zukommen lassen.

Welche Ihrer Körpermaße – außer Ihrer Größe und ggf. notwendiger Maße bzgl. des Kleidungskaufes – kennen Sie? Und: Welche dieser Maße nutzen Sie, z. B. zum schätzenden Messen? Schon lange weiß und nutze ich, dass mein gestreckter Mittelfinger mit Gelenkknöchel genau 10 cm lang ist. Diesen Beitrag zum Anlass nehmend hat meine Selbstvermessung ergeben: Daumenbreite 2,4 cm, Breite des kleinen Fingers 1,6 cm, kleine Fingerspanne 17 cm, große Fingerspanne 22 cm, kleine Elle 25 cm, große Elle 42 cm, Fuß 25,3 cm, Bauchnabelhöhe 1,04 m. Warum ist keiner dieser Werte bisher für mich zum Stützpunkt geworden? Vermutlich, weil es sich nicht so gut mit ihnen rechnen lässt.

Das Aufbauen individueller Stützpunkte – unabhängig von den ei-

Abb. 2: Stützpunktvorstellungen verfeinern

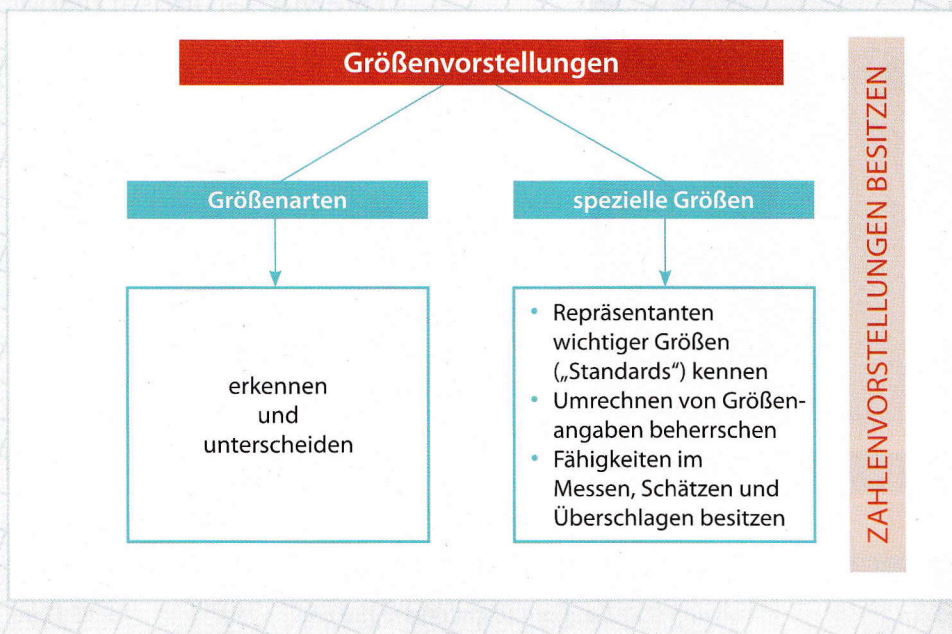


Abb. 3:
Der Begriff
„Größenvor-
stellungen“ als
umfassende
Grundvorstel-
lungen (Frenzel
& Grund 1991,
S. 16)

genen Körpermaßen – gilt als geeigneter, um dauerhaft nutzbare Stützpunktvorstellungen zu entwickeln, als konventionelles, von außen an die Kinder herangetragenenes Stützpunktwissen. Das bedeutet jedoch nicht, dass die Kinder schon irgendwie ihre Stützpunktvorstellungen auf- und ausbauen. Indem wir mit den Kindern thematisieren, warum sich Stützpunkte zu Standardeinheiten und deren Zehnerpotenzen besonders für das gedankliche Messen und überschlagende Rechnen eignen, sie gleichzeitig dazu anhalten, ein eigenes Stützpunkteft anzulegen und immer mal wieder zu überarbeiten, lassen sich die Vorteile beider Stützpunktarten gut verbinden. So verkündete Mia stolz: „Ich weiß zwar, dass unser Mathebuch ungefähr 30 cm hoch ist. Aber denken kann ich besser mit meiner Kasperpuppe. Und weil die 25 cm groß, kann ich sogar auch einfacher mit ihr rechnen.“

Unmittelbare und mittelbare Stützpunkte

Grund (1992) unterscheidet zwischen *mittelbaren* und *unmittelbaren Vorstellungen*. Der Unterschied liegt dabei in deren Fassbarkeit und Darstellbarkeit. Stützpunkte, welche im alltäglichen Wahrnehmungsbe- reich angeordnet sind und deshalb durch die Sinnesorgane des Körpers

wahrgenommen werden können, werden in der Literatur als *unmittelbare Stützpunkte* (Frenzel & Grund 1991) bezeichnet. Dagegen verwenden Frenzel und Grund (1991) den Begriff des *mittelbaren Stützpunkts*, wenn die entsprechenden Stützpunktvorstellungen sich nicht auf konkret und direkt wahrnehmbare Größenausprägungen beziehen. In der Regel beruhen diese eher auf erlerntem Stützpunktwissen, das mit weiteren „Ersatz“vorstellungen verbunden wurde, da ein unmittelbares Erfahren und Erfassen der Größenausprägung nicht möglich ist. So lässt sich z. B. das Gewicht von einem Pferd nicht durch Anheben erfahren – außer es handelt sich um Pippi Langstrumpf. Dennoch können wir das Pferd visuell mit anderen Tieren vergleichen. Wenn wir z. B. das Gewicht unseres Pferdes mit 450 kg kennen – Stützpunktwissen – und die vor uns stehende Kuh mit der visuellen Vorstellung unseres Pferdes vergleichen – hier handelt es sich allerdings um die Stützpunktvorstellung zum Volumen –, können wir auch das Gewicht der Kuh mit ca. 600 kg schätzen, weil wir gleichzeitig aus der Erfahrung zugrunde legen, dass sich beide Tierarten nicht wesentlich in der Dichte ihrer Körper unterscheiden. Mittelbare Stützpunktvorstellungen werden aus unmittelbaren Stützpunktvorstellungen sowie wei-

teren Alltagserfahrungen zusammen- gesetzt und abgeleitet, d. h., Lernwege erfolgen von unmittelbaren zu mittelbaren, von erfahrungsbasierten zu abgeleiteten und mental konstruierten Vorstellungen. Während mittelbare Stützpunktvorstellungen durch „materielle Handlungen wie zeigen, umfahren, zeichnen ... wiedergegeben werden können“ (Grund, 1992, S. 42), ist das bei mittelbaren Stützpunktvorstellungen nicht möglich. Hier muss auf sprachliche Beschreibungen mit Bezug zu anderen Größen oder auf einen Vergleich mit anderen Repräsentanten aus der Umwelt zurückgegriffen werden.

Stützpunktvorstellungen entwickeln

In Schulbüchern ist der Aufbau von Stützpunkten eng mit dem Messen verbunden. So lassen sich konkret Paare von Repräsentant und Größenangabe als Stützpunkt bilden. Um das mentale Vergleichen zu entwickeln, empfiehlt es sich, auch beim Suchen nach Repräsentanten einer bestimmten Größenausprägung entsprechend vergleichend und nicht messend vorzugehen. Wenn dann auch noch das Vergleichsobjekt, z. B. die 1-m-Schnur oder das 1-kg-Paket, nicht konkret verwendet werden kann, lässt sich das mentale Vergleichen üben. An der Tafel ist z. B. die gespannte 1-m-Schnur befestigt. Die Kinder werden aufgefordert, Objekte im Klassenraum zu fotografieren, aufzuschreiben oder aufzuzeichnen, die kürzer oder länger als bzw. genauso lang wie die Schnur sind, und auf dem Plakat passend einzuordnen: $< 1\text{ m}$, $\approx 1\text{ m}$, $> 1\text{ m}$ (Abb. 1). Das Prüfen mit der 1-m-Schnur ergibt, dass das Tafellineal, die Tafelhöhe und zwei Bodenfliesen tatsächlich genauso lang, also 1 m lang sind, die Türbreite jedoch weniger als 1 m misst. In einem zweiten Schritt lassen sich nun weitere Grenzen nutzen und so die Spannen verringern. Indem auch das

Plakat neue Spalten erhält (Abb. 2), lässt sich für die Kinder die größere Genauigkeit visualisieren. Ähnlich kann auch mit der Stützpunktestraße (Material) gearbeitet werden. So lassen sich einerseits die Stützpunkte innerlich immer genauer vorstellen und es wird andererseits das Nutzen der Stützpunktvorstellungen zum mentalen Vergleichen angeregt.

Stützpunktvorstellungen nutzen

Besonders einfach lassen sich Stützpunktvorstellungen verwenden, wenn sie in ihrer Form und Ausrichtung dem Vergleichsobjekt besonders ähnlich sind: Will ich z. B. die Sitzhöhe eines Hockers schätzen, vergleiche ich ihn vielleicht mit meiner inneren Vorstellung der Höhe eines Esstisches: etwas höher als dessen Hälfte, also vielleicht 40 cm? Schwieriger ist dagegen das Vergleichen von Flächen, schon allein weil auch wir Erwachsene kaum auf Stützpunktwissen und Stützpunktvorstellungen zu Flächeninhalten zurückgreifen können. Der Couchtisch ist ca. halb so groß wie der Esstisch, das Fenster ist etwas größer als eine Tafelfläche. Doch schon die Entscheidung zwischen meinem Esszimmer- und meinem Küchentisch fällt mir schwer: Der Esszimmertisch ist länger, aber dafür schmaler. Messen und Rechnen ergibt einen Unterschied von 40 cm^2 – gar nicht einmal so wenig. Noch einmal schwieriger gestaltet sich dies mentale Vergleichen und Messen bei Rauminhalten, obwohl wir aus unserem Alltag i. d. R. auf viele Stützpunkte zu Flüssigkeitsmengen zurückgreifen können: In die Wasserflasche passt ca. dreimal so viel wie in meine Trinkflasche, also $1 \frac{1}{2} \text{ l}$. Aber wie viel Liter fasst die Mülltonne? Klar, wissen wir doch: 120 l die kleine, 240 l die große. Aber könnten Sie diese Werte gedanklich durch einen Vergleich, z. B. mit der Füllmenge ei-

ner Badewanne, oder durch Ausmessen, z. B. mit einem großen Putzeimer, ermitteln? Selbst bei den doch eher einfachen Längen habe ich im Beitrag „Zur Sache“ für die Höhe der Sporthalle die Höhe der Klassenzimmertür herangezogen. Warum habe ich eigentlich nicht die Tafellänge genutzt? Ist es nicht viel einfacher, die Sporthallenhöhe als etwas weniger als zwei Tafellängen einzuschätzen, als so umständlich mit der Tür gedanklich die Höhe auszumessen? Zumeist sind unsere Stützpunktvorstellungen eher innere feste Bilder, die wir möglichst in ihrer Gestalt und Ausrichtung auch mental verwenden. Soll hingegen der Stützpunkt Tafellänge für die Höhe der Schule eingesetzt werden, muss dieser gedanklich gedreht, d. h. im weitesten Sinn umstrukturiert werden.

Grundvorstellungen – was kann das sein?

Unter Grundvorstellungen werden in der Mathematikdidaktik traditionell „adäquate Vorstellungen mathematischer Begriffe“ (vom Hofe 1996, S. 5) verstanden. Sie bezeichnen das „didaktische Ziel: elementare Inhalte anschaulich zu deuten und so beim Schüler ein adäquates Begriffsverständnis zu fördern“ (ebd.). Griesel (1996) befasst sich in dieser Weise mit den Grundvorstellungen zum Umgang mit Größen. Er unterscheidet zwischen der Vorstellung von Repräsentanten und der Vorstellung möglicher Operationen mit diesen Repräsentanten. In diesem Sinne handelt es sich sicherlich bei Stützpunktvorstellungen zum einen um derartige Grundvorstellungen von entsprechenden Trägern, z. B. ein Stift als Vorstellung für eine Länge von 15 cm. Die in diesem Heft aufgeführten Handlungen, Verfahren und Operationen mit diesen Stützpunkten, das Ordnen, mentale Vergleichen und Messen, stellen in diesem Sinne

Grundvorstellungen möglicher Operationen dar. Doch Griesel fasst die Grundvorstellungen deutlich umfassender: So gehört das Messverständnis mit seinen einzelnen Aspekten (vgl. Ruwisch & Roos 2015) ebenso dazu wie die entsprechenden Vorstellungen zu den Rechenoperationen im jeweiligen Größenbereich.

In diesem umfassenden Verständnis von Grundvorstellungen zum Kompetenzbereich „Größen und Messen“ ist der Begriff „Größenvorstellungen“ bei Frenzel und Grund (1991) zu sehen. Sie fassen nämlich nicht allein die Stützpunktvorstellung als Kenntnis von Repräsentanten unterschiedlicher (spezieller) Größen darunter, sondern das Beherrschen der Umrechnung von Größenangaben sowie Fähigkeiten im Messen, Schätzen und Überschlagen ebenso wie ganz grundlegend das Erkennen und Unterscheiden verschiedener Größenarten und führen begleitend die Bedeutung von Zahlvorstellungen mit auf (Abb. 3).

Literatur

- Frenzel, L. & Grund, K.-H. (1991). Wie „groß“ sind Größen? *mathematik lehren* 45, S. 15–24 u. S. 31–34.
- Griesel, H. (1996). Grundvorstellungen zu Größen. *mathematik lehren* 78, S. 15–19.
- Grode, H.-P. (2001). Mathematik, Physik. In: Kiehl, P. & Breutmann, N. (Hrsg.). *Einführung in die DIN-Normen*. Stuttgart: Teubner, S. 935–965.
- Grund, K.-H. (1992). Größenvorstellungen – eine wesentliche Voraussetzung beim Anwenden von Mathematik. *Grundschule* 24(12), S. 42–44.
- Joram, E. (2003). Benchmarks as Tools for Developing Measurement Sense. In: Clements, D. H. & Bright, G. (Hrsg.). *Learning and Teaching Measurement*. Reston, VA.: National Council of Teachers of Mathematics, S. 7–67.
- Reuter, D. (2011). Kindliche Konzepte zur Größe Gewicht und ihre Entwicklung. Theoretische Modellierung und zwei Einzelfallstudien mit Drittklässlern. DOI: 10.18452/16357 Abgerufen von <http://edoc.hu-berlin.de/dissertationen/reuter-dinah-2011-05-23/PDF/reuter.pdf> (Zugriff 07.02.2021).
- Ruwisch, S. & Roos, S. (2015). „Mit einem Lineal kann man messen.“ Lernvoraussetzungen mit dem weißen Blatt und Mini-Tests erheben. *Grundschule Mathematik* 47(12), S. 4–5.
- Vom Hofe, R. (1996). Grundvorstellungen – Basis für inhaltliches Denken. *mathematik lehren* 78, S. 4–8.