

B2: Strukturen und funktionaler Zusammenhang – math. darstellen

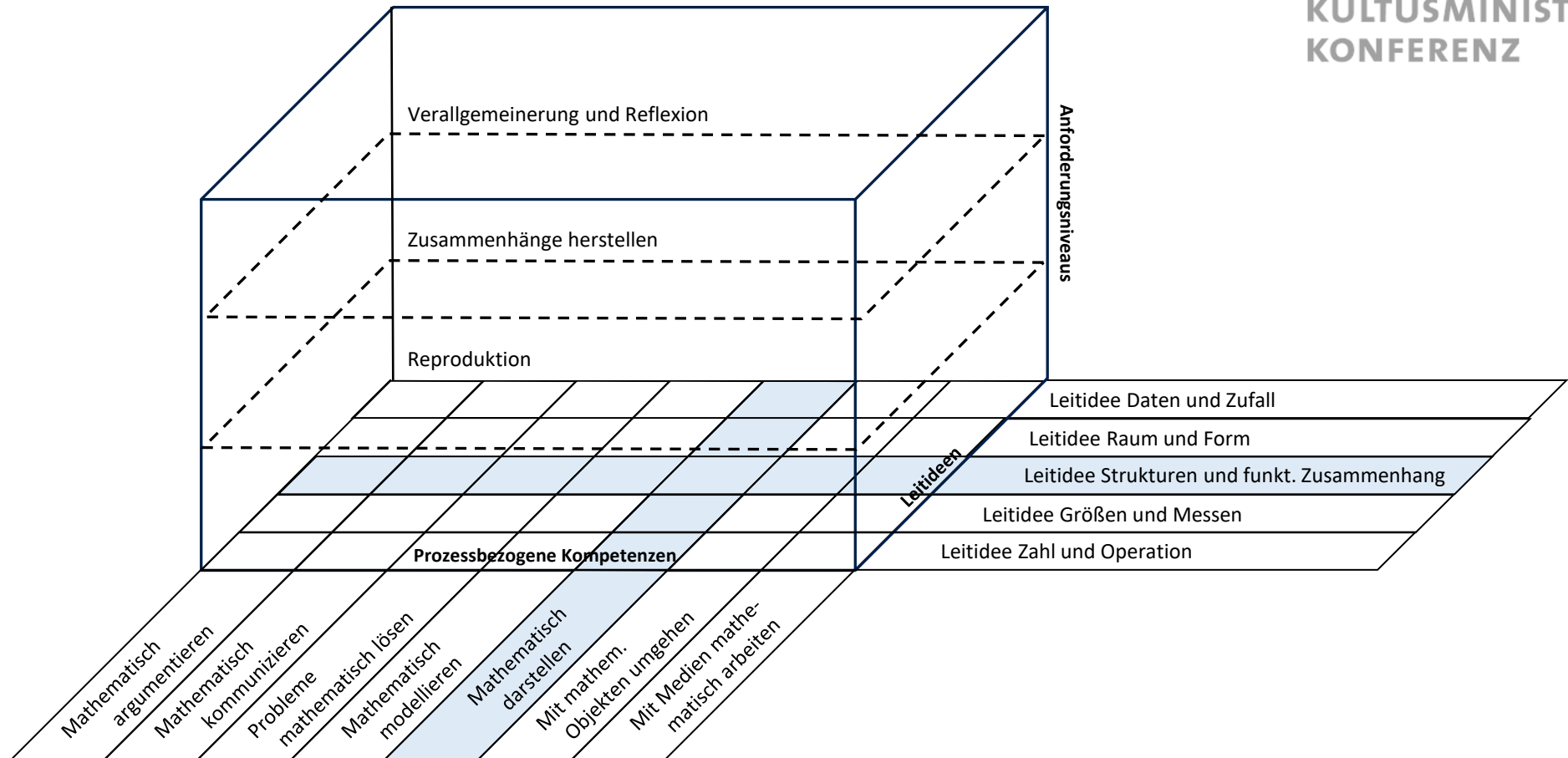
15.10.25

Marvin Krüger



Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

Kompetenzmodell



B2 Strukturen und funkt. Zhg. – mathem. darstellen

Ziel: Die LiV können die **Einführung von neuen Funktionsklassen** unter Berücksichtigung der **Darstellungsformen** Text, Term, Tabelle und Graph planen.

Verschiedene handlungsorientierte Zugänge zur Einführung von Funktionen werden vorgestellt und mindestens einer von den LiV ausprobiert. Anhand verschiedener Beispiele wird der Wechsel der Darstellungsformen (Text, Tabelle, Graph, Term) thematisiert und auf die Grundvorstellungen des funktionalen Zusammenhangs (Zuordnung, Kovariation, Funktion als Ganzes) eingegangen. Die

Erweiterung einer Funktionsklasse wird exemplarisch besprochen und der Einfluss der einzelnen Parameter in der Funktionsgleichung mithilfe von GeoGebra von den LiV animiert. Es können Modellierungen mit unterschiedlichen Funktionstypen skizziert werden, die einen projektartigen Charakter im Sinne des LdE beinhalten.

Ein DGS (GeoGebra) wird zur Lösung ausgewählter Probleme herangezogen.

08:00	Begrüßung, Unterrichtsqualität, Beobachtungsschwerpunkte
08:40	Unterrichtsstunde mit Nachbesprechung
09:25	Kennenlernen, Organisation (sowie Berichte aus der Unterrichtspraxis)
	Grundvorstellungen, SMART-Tests, Fachanforderungen
	Mittagspause
	Darstellungswechsel, Handlungsorientierte Zugänge
	Abschluss

Unterrichtshospitation

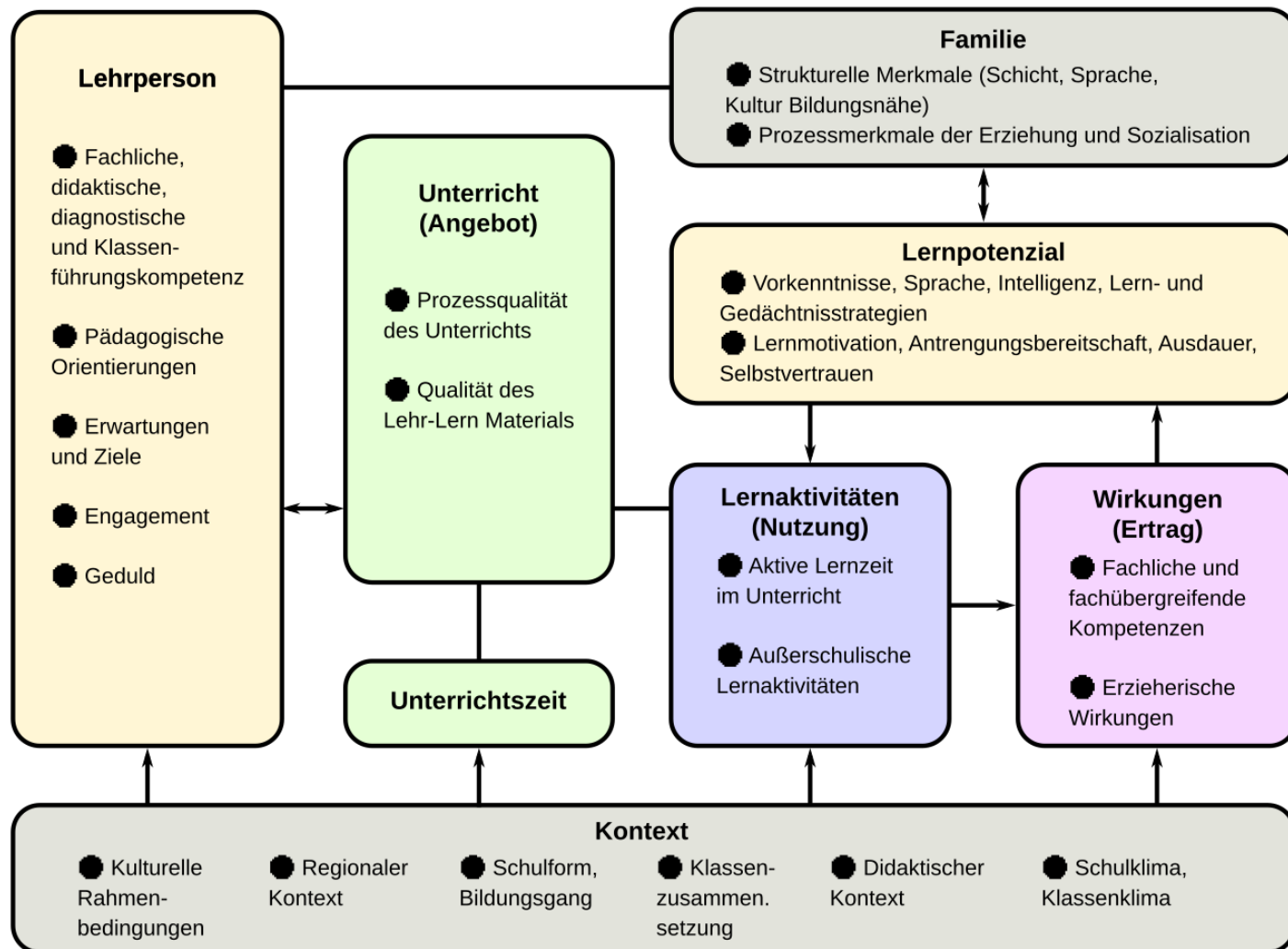
Worauf muss geachtet werden?

- Handys ausschalten!
- Kein Essen/Trinken/Kaugummi!
- Keine Gespräche!
- Nicht helfen!
- Keine Photos!
- Machen Sie sich geeignete Notizen, um im Anschluss eine Rückmeldung geben zu können!

Seien Sie vorbildlich,
respektvoll und passiv!

Unterrichtshospitation

Was soll ich beobachten?



Helmke (2007)

Unterrichtshospitation

Was soll ich beobachten?



<https://www.spektrum.de/news/bildung-die-wichtigsten-bedingungen-fuer-einen-guten-unterricht/2173203>

Unterrichtshospitation

Was soll ich beobachten?



Beschreiben Sie, ob bzw. inwieweit **Ihre Hauptintention** erfüllt wurde. Erläutern Sie Ihre Entscheidung anhand konkreter Handlungen/Ergebnisse der Lernenden.

Nennen Sie die **wesentlichen Planungsentscheidungen** Ihrer Stunde.

Beschreiben Sie die Aspekte der Stunde, die **planmäßig** verliefen und erläutern Sie **Planungsabweichungen**.

Beurteilen Sie retrospektiv, welche Planungs- und Durchführungsentscheidungen richtig waren und was Sie beim nächsten Mal anders machen würden. Benennen Sie konkrete **Handlungsalternativen**.

Unterrichtshospitation

Nachbesprechung

Feedback-Regeln	Feedback - Geben	Feedback - Nehmen	
Konkretes Verhalten vs. Verallgemeinerungen zur Person	Ich-Perspektive vs. "Du hast"	Offenheit vs. Verteidigungshaltung	Fragen stellen vs. Unklarheiten ignorieren
Auch Positives benennen vs. reine Kritik	Lösungsidee vs. Problemorientierung	Selbstreflexion vs. "alles wie immer"	"Danke" sagen vs. "bist Du endlich fertig?"

<https://teamentwicklung-lab.de/feedback-regeln>

Ziel ist immer eine **Reflexion** des eigenen Unterrichts!

Organisatorisches

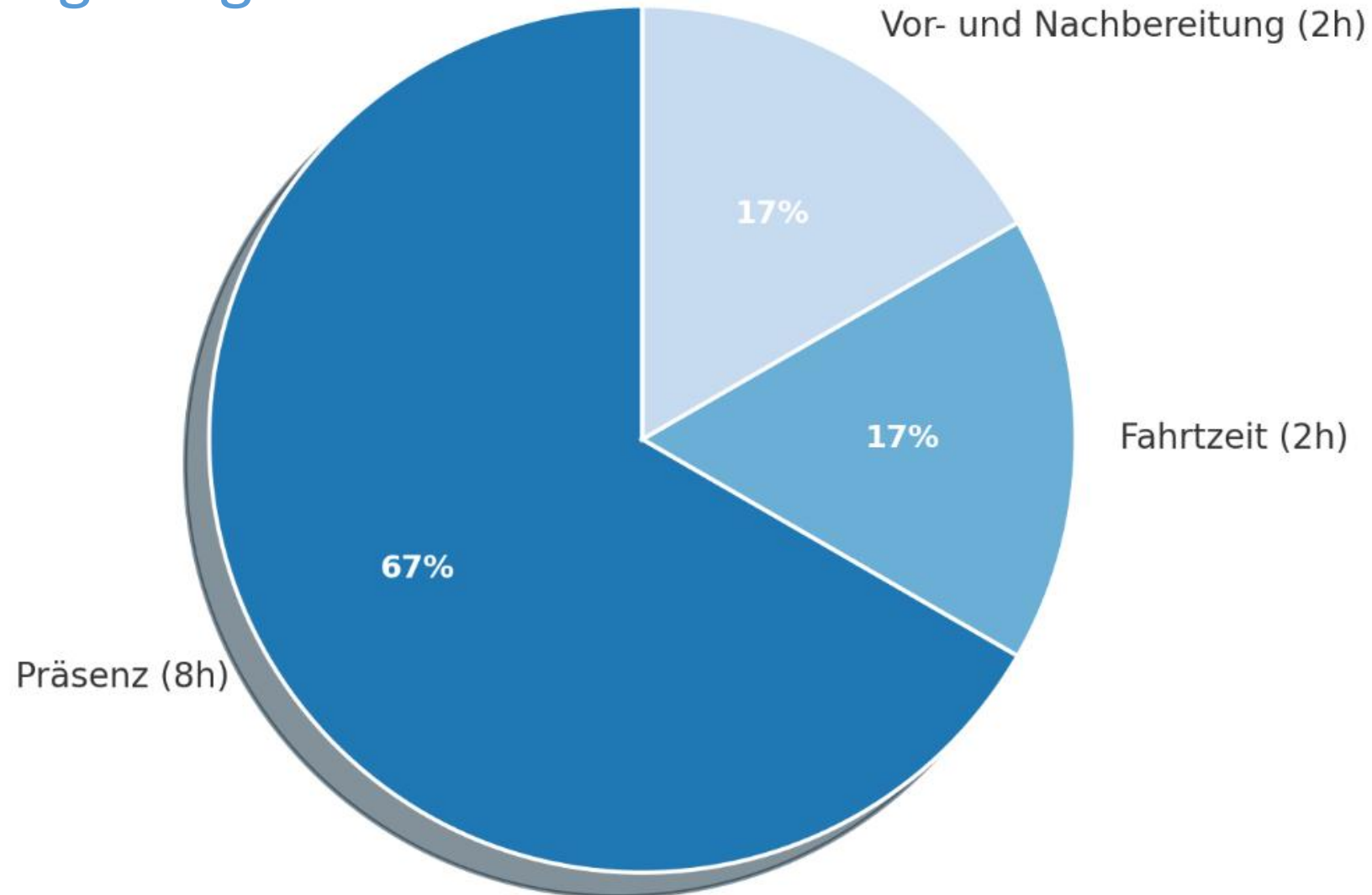
Vorstellungsrunde

Wer sind Sie?

- Name
- Schule
- Zweites Fach
- unterrichtliche Vorerfahrungen
- universitäre Lerngelegenheiten zur Mathematikdidaktik
- aktuelle Lerngruppen
- Ausbildungslehrkraft
- Was ist Ihnen zuletzt richtig gut gelungen?

Ausbildungsveranstaltungen

Arbeitszeitregelung



Gemeinsam ausbilden

für Ausbildungslehrkräfte

Titel: Gemeinsam ausbilden im Fach Mathematik
Kennung: AUS0624
Datum: 18.11.2025
Uhrzeit: 16:00 – 18:00
Ort: online
Schwerpunkt: Problemlösen

Bitte
weitergeben!

Funktionen: Aspekte und Grundvorstellungen

Funktionen

Aspekte

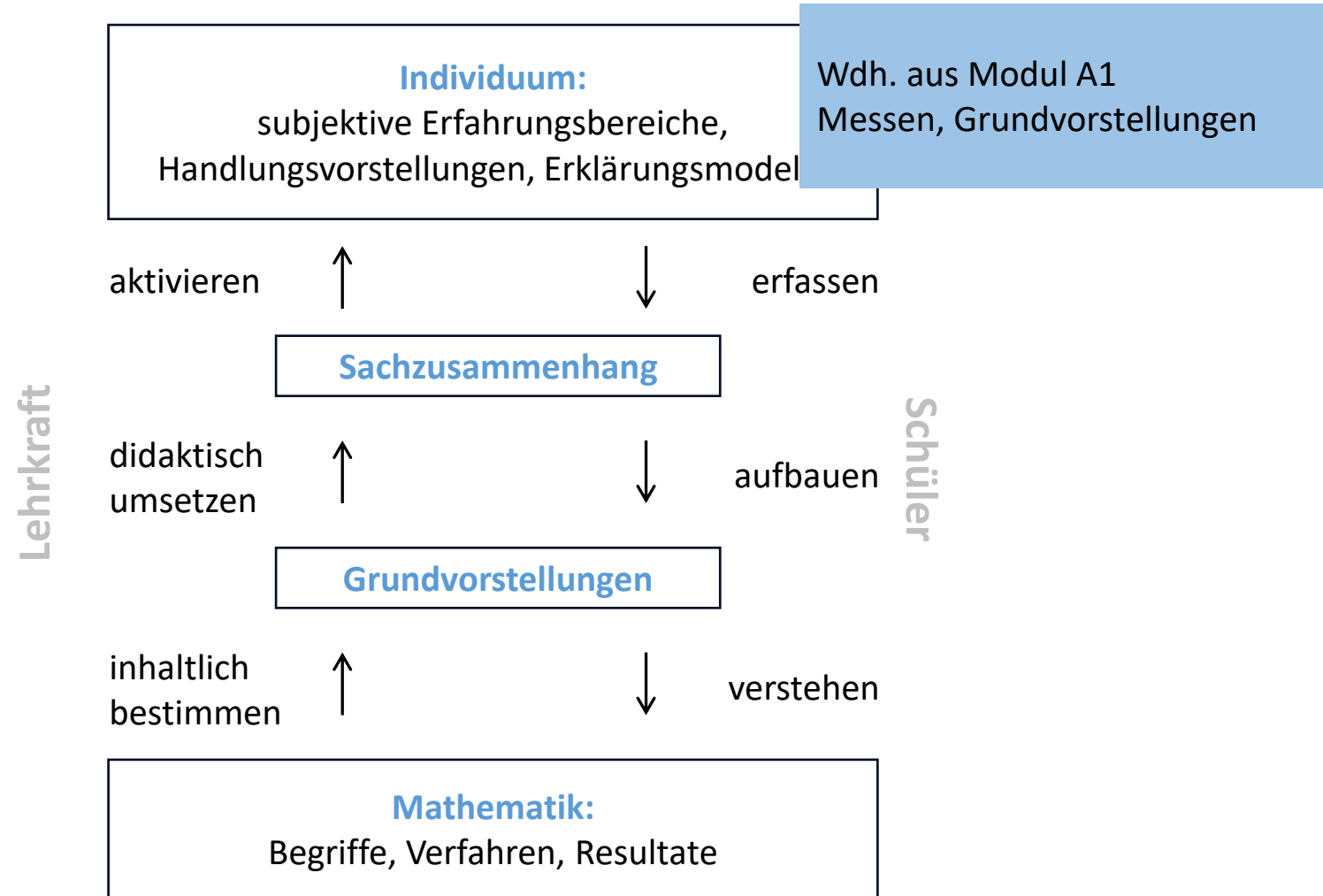
Zuordnungs-
aspekt

Paarmengen-
aspekt

Grundvorstellungen ausbilden

Grundvorstellungen beschreiben **Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und den inneren, individuellen Vorstellungen** zu einem Begriff oder Verfahren.

Die Ausprägung von Grundvorstellungen hängt ab vom Umfang der entsprechenden Handlungserfahrung und der Häufigkeit ihrer Aktivierung.



Grundvorstellungen ausbilden

1. Sinnkonstituierung eines *Begriffs* durch Anknüpfung an bekannte Sach- und Handlungszusammenhänge

2. Aufbau entsprechender visueller Repräsentationen, die operatives Handeln auf der Vorstellungsebene ermöglichen. – Konkret: Die Schülerin kann eine Skizze anfertigen, mit der ein Ansatz und zumindest Teile eines Lösungsweges anschaulich werden.

3. Mathematische Modellierungsfähigkeit – Konkret: Die Schülerin kann eine Sachaufgabe in eine Rechenaufgabe übersetzen und ihr Ergebnis interpretieren

Funktionen

Grundvorstellungen

Kovariations-
vorstellung

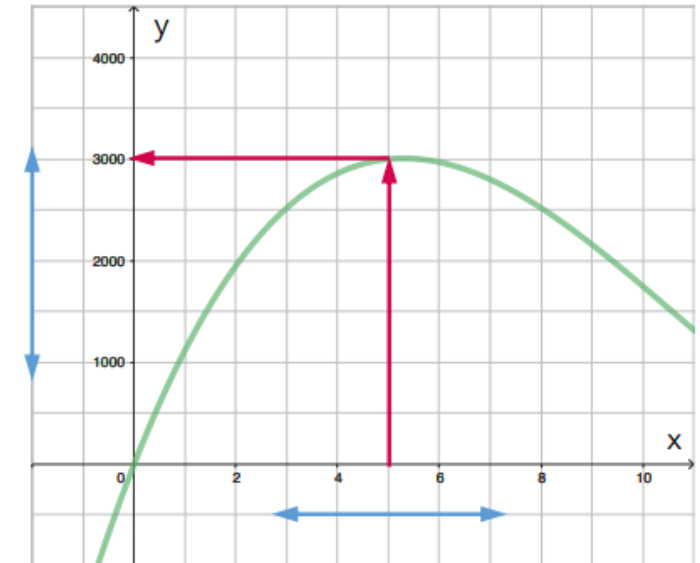
Man betrachtet, wie sich die Veränderung der unabhängige Größe auf die abhängige auswirkt.

Zuordnungs-
vorstellung

Man betrachtet die Zuordnung einzelner Werte.

Objekt-
vorstellung

Man betrachtet die Funktion als Ganzes, als eigenständiges Objekt



x	y
4,0	2850
4,5	2890
5,0	3000
5,5	2920
6,0	2960

Funktionen

Grundvorstellungen

Kovariations-
vorstellung

Man betrachtet, wie sich die Veränderung der unabhängige Größe auf die abhängige auswirkt.

global
dynamisch

Wie verändert sich $f(x)$ wenn sich x ändert?
Wie muss sich x ändern, damit $f(x)$ fällt?

Zuordnungs-
vorstellung

Man betrachtet die Zuordnung einzelner Werte.

lokal
statisch

Welches $f(x)$ zu einem x ?
Welches x zu einem $f(x)$?

Objekt-
vorstellung

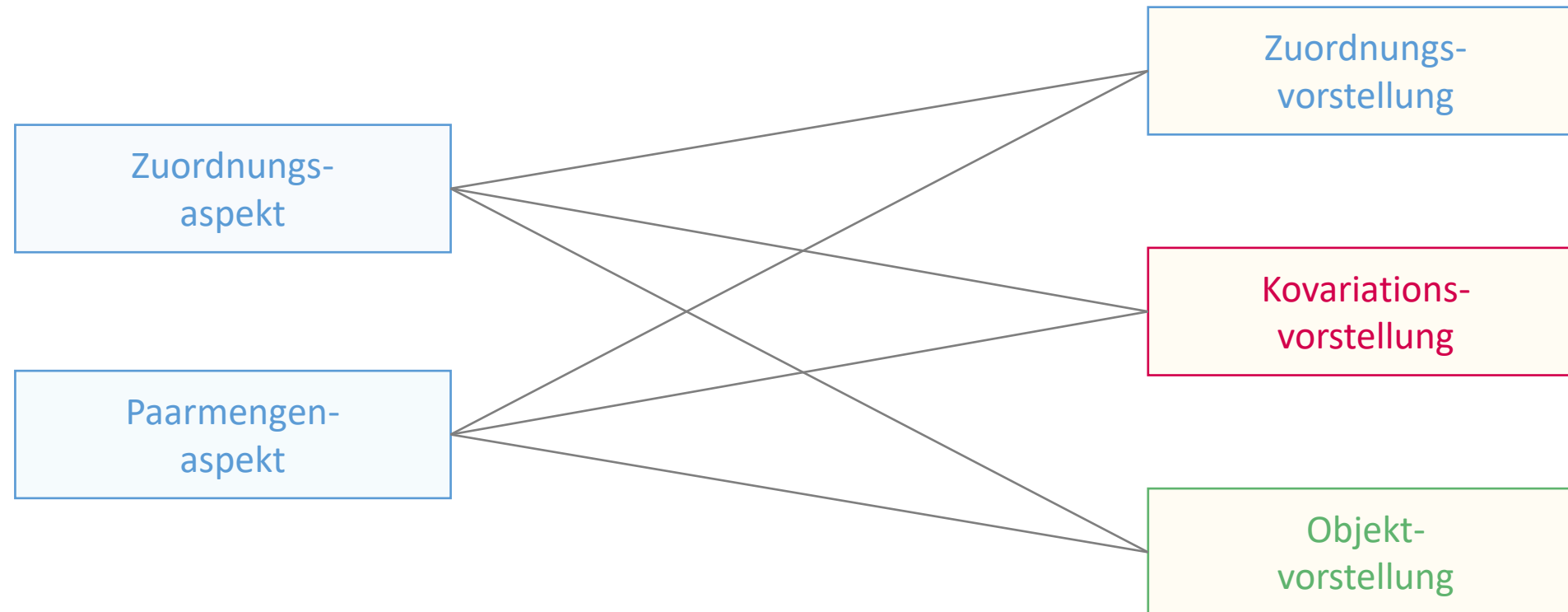
Man betrachtet die Funktion als Ganzes, als eigenständiges Objekt

global
statisch

Was ist die typische Form?
Was macht die Form aus?

Funktionen

Aspekte und Grundvorstellungen



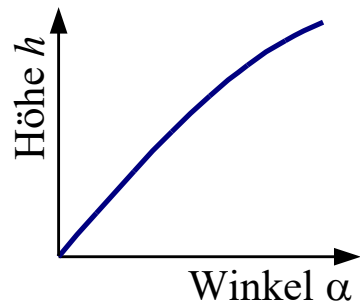
Ziel im Unterricht: Vermittlung eines umfassenden Bilds der Grundvorstellungen und Aspekte zum Funktionsbegriff.

Darstellungsformen

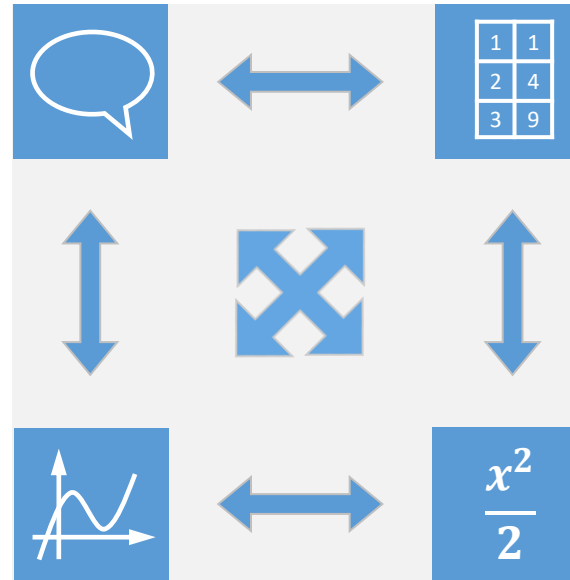
Am Beispiel von Funktionen

Die über eine Drehleiter der Feuerwehr erreichbare Höhe hängt vom Anstellwinkel ab.

verbal
Beschreibung
einer Situation



graphisch
Graph o.
Diagramm



numerisch
konkrete
Werte(paare)

Winkel α	Höhe h
50	26,8
60	30,3
70	32,9

symbolisch
(Funktions-)term,
Formeln

$$h(\alpha) = 35 \cdot \sin(\alpha)$$

Darstellungswechsel

Aufgabe

- a. Ordnen Sie die Tätigkeiten beim Wechsel der Darstellungsform in die entsprechenden Felder der folgenden Tabelle.
- b. Konkretisieren Sie Ihre Zuordnung mit einem Beispiel aus einem Schulbuch Ihrer Wahl.
- c. Nehmen Sie Stellung: Inwiefern hilft der Darstellungswechsel dem Aufbau der Grundvorstellungen?
- d. Sichten und bewerten Sie das Material hinsichtlich Darstellungswechsel und Grundvorstellungen:
 - i. Parabelquartett
 - ii. Schneckenrennen



Darstellungswechsel

Allgemeine Tätigkeiten

	Sprache, Situation	Tabelle	Graph	Symbol / Term
Sprache, Situation				
Tabelle				
Graph				
Symbol / Term				

Darstellungswechsel

Schneckenrennen

2 M Arbeitsauftrag

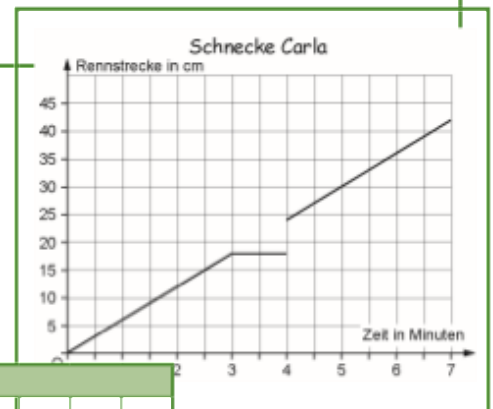
Teilt die Karten mit den Rollen in der Gruppe unter euch auf.
Ihr habt 6 Rennbeschreibungen, 6 Tabellen und 6 Schaubilder.
Lest euch den Text durch.
Schaut euch die Schaubilder und die Tabellen genau an.

Am Ende sollen alle aus der Gruppe die Schnecken mit Namen, der Trikotfarbe und der Startnummer nennen können.
Begründet eure Auswahl und schreibt alle die Begründung in euer Heft.

Wenn der Gong ertönt, sollt ihr für eure Gruppe eine Schnecke auslosen, euer Arbeitsergebnis für diese Schnecke auf einer Folie darstellen und der Klasse vorstellen.

Die Sprecherin oder der Sprecher eurer Gruppe wird ausgelost.

Die Schnecke mit dem **braunen** Trikot ist eine taktisch **gewiefte** Schnecke, und sie startet das Rennen beim Startschuss mit dem Vorhaben, erst langsam zu beginnen und dann durch die gesparten Kraftreserven das Feld von hinten aufzurollen. Als sie auch noch sieht, wie zwei Renngegner zunächst am Startplatz zurückbleiben, ist sie sich ihrer Taktik erst recht sicher und beschleunigt nach 1,5 Rennminuten auf das Doppelte ihrer Anfangsgeschwindigkeit. Als sie sich nach weiteren 1,5 min gerade freuen will, dass die nächste vor ihr liegende Schnecke gerade langsamer wird, verliert sie ihren Schuh und muss 2 cm zurückkriechen, um diesen anzuziehen. Gerade als sie wieder umdreht, um mit ihrer hohen Geschwindigkeit von 8 cm pro Minute die Verfolgung wieder aufzunehmen, sieht sie, wie die führende Schnecke wegen Schummels am Start ihre Weg- und Zeitstrafe erhält. Sie glaubt, mit ihrem hohen Tempo wieder an eine Siegmöglichkeit, muss aber nach 2,5 min feststellen, dass ihr die Kräfte mit diesem Tempo nicht ins Ziel reichen, und sie verlangsamt auf eine Geschwindigkeit von 3 cm in einer halben Minute.



Schnecke mit der Startnummer 1

Zeit in Minuten	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
Strecke in cm	0,0	2,0	4,0	6,0	10,0	14,0	18,0	16,0	20,0	24,0	28,0	32,0	36,0	39,0	42,0

Darstellungswechsel

Schneckenrennen - Schülerlösungen

5 Schneckenrennen

Schnecke 1
Markus  

Schnecke 2
Carla  

Schnecke 3
Else  

Schnecke 4
Leo  

Schnecke 5
Gustav  

Schnecke 6
Egon  

Tabellen

3 Schnecke Gustav 8.4.2013

Renntaktik: 3 cm in einer halben Minute

Tabelle: Die Strecke verändert sich um 3 cm

Schaubild: Sie erhöht ihr Tempo nicht, sie bleibt bei 3 cm pro eine halbe Minute

Schnecke Egon

Text: Sie schiebt den Startblock um 4 cm weiter und ~~sprintet~~ sprintet mit 8 cm pro Minute

Tabelle: 4 cm pro halbe Minute dann hochgehoben: tücke Tabelle 1 Minute später 12 cm zurückgesetzt

Schaubild: Er startet bei 4 cm und nach 2,5 Minuten 1 Minute hochgehoben und 12 cm zurückgesetzt

4 Text: Schnecke Carla

Nach 1 min 6 cm

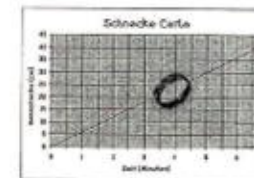
- bleibt stehen (wegen Hilfe)
- wird nach vorne gesetzt (weil das für war)
- kommt bei 7 min und 42 cm an

Tabelle:

- es besteht eine Lücke
- wird 1 min hochgehalten und 8 cm vorgesetzt
- denkt wo sie eig. sein müsste

Graph:

- sehr schnell
- bei 3 min bleibt sie stehen (wegen Hilfe)
- Lücke 1 min, wird dort abgesetzt wo sie eig. sein müsste



5 Weg in cm. Schaubild

Text:

Bei einem Schneckenrennen kriecht Schnecke Karo in 4 min 8 cm. Dann legt sie einen Endspurt hin und rennt ab 1 min immer 4 cm. Am Ende geht ihr die Puste aus und sie schafft in 1 min nur 1 cm.

↓ der 4 min läuft sie in

Darstellungswechsel

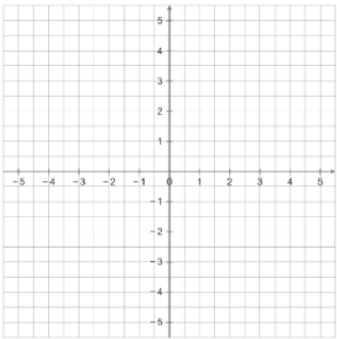
Parabelquartett

UNTERRICHTSVERLAUF: Parabelquartett
 Kooperativ den Darstellungswechsel von Funktionen üben

- Beispielquartett austeilen und besprechen.
Sozialform: Plenum | Material: M1
- Die Lernenden erstellen die Quartette in Vierergruppen.
Sozialform: Einzel-/Gruppenarbeit | Material: M1, M2 (leere Quartette)
- Die Vierergruppen kontrollieren ihre Quartette und korrigieren sie gemeinsam.
Sozialform: Einzel-/Gruppenarbeit | Material: ausgefüllte Quartette
- Die Jugendlichen mischen ihre Quartette, tauschen sie mit einer anderen Gruppe aus und ordnen die Quartettkarten einander zu.
Sozialform: Gruppenarbeit | Material: kontrollierte Quartette
- Die Klasse präsentiert „Aha“-Momente und besondere Erkenntnisse.
Sozialform: Plenum | Material: –



Verbale Beschreibung



Funktionsgleichung in der Scheitelpunktform	
Funktionsgleichung in der allgemeinen Form	

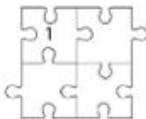
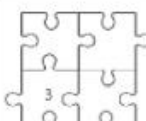
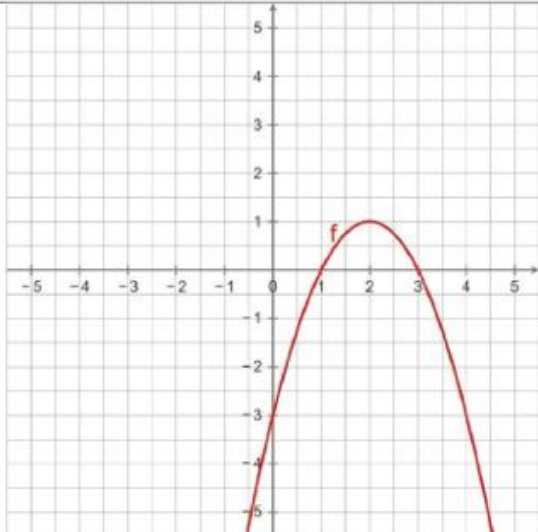
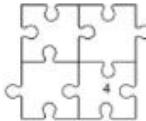


x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)							

Darstellungswechsel

Parabelquartett – Mögliche Lösung

UNTERRICHTSVERLAUF: Parabelquartett Kooperativ den Darstellungswechsel von Funktionen üben
1. Beispielquartett austeilten und besprechen. <i>Sozialform: Plenum Material: M1</i>
2. Die Lernenden erstellen die Quartette in Vierergruppen. <i>Sozialform: Einzel-/Gruppenarbeit Material: M1, M2 (leere Quartette)</i>
3. Die Vierergruppen kontrollieren ihre Quartette und korrigieren sie gemeinsam. <i>Sozialform: Einzel-/Gruppenarbeit Material: ausgefüllte Quartette</i>
4. Die Jugendlichen mischen ihre Quartette, tauschen sie mit einer anderen Gruppe aus und ordnen die Quartettkarten einander zu. <i>Sozialform: Gruppenarbeit Material: kontrollierte Quartette</i>
5. Die Klasse präsentiert „Aha“-Momente und besondere Erkenntnisse. <i>Sozialform: Plenum Material: –</i>

	Verbale Beschreibung der Funktion: eine nach unten geöffnete Normalparabel, deren Scheitelpunkt um 1 nach oben und 2 nach rechts verschoben ist																
	Funktionsgleichung: Scheitelpunktform $f(x) = -(x - 2)^2 + 1$ allgemeine Form $f(x) = -x^2 + 4x - 3$																
																	
	<table><tr><td>x</td><td>-3</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>f(x)</td><td>-24</td><td>-15</td><td>-8</td><td>-3</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	x	-3	-2	-1	0	1	2	3	f(x)	-24	-15	-8	-3	0	1	0
x	-3	-2	-1	0	1	2	3										
f(x)	-24	-15	-8	-3	0	1	0										

Darstellungswechsel

Allgemeine Tätigkeiten

	Sprache, Situation	Tabelle	Graph	Symbol / Term
Sprache, Situation	umformulieren	Werte (er)finden	skizzieren, zeichnen	Situation algebraisch beschreiben
Tabelle	lesen, Wertepaare suchen, interpretieren	neue Werte ergänzen	Punkte einzeichnen	Term aufstellen: gezieltes Probieren, Werte bestimmen
Graph	beschreiben, interpretieren	Werte ablesen	Wechsel der Skalierung	Term aufstellen: gezieltes Probieren, Werte bestimmen
Symbol / Term	Variablen und Terme interpretieren	Werte berechnen	skizzieren, evtl. zeichnen	umformen

Darstellungsformen

Im Kontext von Grundvorstellungen

Grund-vorstellung	Sprache, Situation	Tabelle	Graph	Symbol / Term
Kovariation vorrangiger Zweck	Dekodieren der Informationen zum Änderungsverhalten	Paarweiser Vergleich hinsichtlich der Art der Änderung	Unterteilung in Abschnitte mit unterschiedl. Änderungsverhalten	Ablesen bzw. Bestimmen der entsprechenden Kenngrößen
	Änderungsverhalten qual. bzw. quant. erfassen	Änderungsverhalten quantifizieren	Änderungsverhalten qualitativ erfassen	Änderungsverhalten quantifizieren
Zuordnung vorrangiger Zweck	Dekodieren von Informationen zu Zuordnungen	Einem Wert in der 1. Spalte wird ein Wert in der 2. Spalte zugeordnet	Einem Wert auf der 1. Achse wird ein Wert auf der 2. Achse zugeordnet	Aus einem Wert des Definitionsbereichs wird der abh. Wert berechnet
	Erfassen einzelner Werte	Ablesen oder Eintragen konkreter Zuordnungen	Markante Punkte erfassen	Bestimmung einzelner Werte
Objekt vorrangiger Zweck	Dekodierung der Informationen zum Gesamttypus	Differenzen-, Quotienten-, Produkt-gleichheit o.ä. aus Wertepaaren bestimmen	Mit graf. Merkmalen die Funktion als Ganzes oder f. Teilbereiche typisieren	Mit Kenngrößen die Funktion als Ganzes typisieren
	Charakteristika qual. bzw. quant. erfassen	quantifizierbare Regelmäßigkeiten erfassen	Charakteristischen Verlauf erfassen	Charakteristika quantitativ erfassen

Darstellungswechsel

Am Beispiel linearer Funktionen

	Sprache, Situation	Tabelle	Graph	Symbol / Term
Sprache, Situation	umformulieren	Werte finden	Anhand von Punkten und/ oder der Steigung einen Graphen skizzieren	Steigung und y-Achsenabschnitt entnehmen oder algebraisch ermitteln
Tabelle	Zahlenwerte hinsichtlich charakteristischer Eigenschaften interpretieren	Weitere Tabellenzeilen erzeugen (mithilfe von Differenzen- oder Quotientengleichheit)	Zwei Punkte einzeichnen und eine Gerade hindurchlegen	Aus Punkten die Steigung ermitteln oder an Einer-schritten erfassen
Graph	interpretieren	Punkte systematisch ablesen und in eine Tabelle eintragen	verschieben oder drehen	y-Achsenabschnitt und Steigung oder zwei Punkte ablesen, dann einen Funktionsterm aufstellen
Symbol / Term	bedeutung der Steigung und des y-Achsenabschnitts interpretieren	Wertepaare systematisch berechnen	Kenngößen als y-Achsenabschnitt und Steigung einzeichnen, dann die Gerade zeichnen	Term umformen

Konsequenzen

Wichtig beim Arbeiten mit Funktionen

Typische Schülerfehler	Mögliche Fehlkonzepte/ Ursachen
1) Graph-als-Bild-Fehler	Graph wird als (geometrische) Abbildung der Situation dargestellt
2) Eindeutigkeit der Funktion fehlt	Validierung in Bezug auf Eigenschaft der „Eindeutigkeit“ bleibt aus
3) Falsche Achsenbezeichnung	Fehlendes Verständnis von abhängiger und unabhängiger Variable
4) Fehler beim Umgang mit Skala	Tendenz zu prototypischer Einteilung, Wahl der Abstände fällt in Bezug auf Kontext schwer
5) Fehlinterpretation bei zeitabhängigen Variablen	Hohe Komplexität, Abstraktion; Reduktion auf einen Teilaspekt
6) Steigung-Höhe-Verwechslung	Steigungskonzept nur unvollständig entwickelt
7) Interpretation von Realsituationen	Verharren in der eigenen Wahrnehmung der Realsituation, Nicht-Wahrnehmung der Aufgabenstellung
8) Unvollständige Modellierung	Rückfall auf Bekanntes bei mangelndem Verstehen der Aufgabe

Konsequenzen

Was ist wichtig beim Arbeiten mit Funktionen?

- vielfältige, tragfähige Grundvorstellungen aufbauen
- früh anfangen
- Modellierungsaspekt aufgreifen
- Verstehen vor Kalkül

zu erreichen
durch

Durchgehende
Verwendung
unterschiedlicher
Darstellungsformen

Alltagsverständnis durch
Funktionen initiieren, aber
auch abgrenzen

Funktionales Denken

Vorabaufgabe

<https://opsh.lernnetz.de/pl/9b347c2fa9c76a48058b6f0fb6e72ecb>

Funktionales Denken entwickeln und fördern

Das Denken und Arbeiten mit Funktionen ist charakteristisch für die Mathematik und einer ihrer wichtigsten Beiträge zur Strukturierung und zum Verständnis der Umwelt. Im Unterricht sind dazu wesentliche Grundvorstellungen aufzubauen – anhand konkreter Situationen und in Verbindung mit Darstellungen zu Funktionen wie Sprache, Tabelle, Graph und Term.

Wechsel zwischen diesen eine besondere Rolle (vgl. Tab. 1, Klinger 2018; Rolfes 2018). So werden Eigenschaften funktionaler Zusammenhänge für Schülerinnen und Schüler greifbar und sie lernen funktionales Denken, das sich aus dem Zusammenspiel von miteinander in Beziehung gesetzten Grundvorstellungen zu funktionalen Zusammenhängen und dem dafür unerlässlichen Arbeiten mit Darstellungen von Funktionen ergibt.

JÜRGEN ROTH,
MICHAELA LICHTI

Kinder interessieren sich früh für ihre Körpergröße – und viele Eltern halten bei jedem Geburtstag die aktuelle Größe ihres Kindes an einer Messlatte fest (Abb. 1). Sie interessieren sich für die Zuordnung von Körpergröße zu Lebensalter sowie für das Änderungsverhalten der Körpergröße bei fortschreiten dem Alter. Spätestens wenn ein zweites Kind dazu kommt, wird mit ebensolchem Interesse beobachtet, wie sich die Zusammenhänge zwischen Lebensalter und Körpergröße der beiden Kinder jeweils als Ganzes im Vergleich zueinander verhalten.

Zuordnung, Änderungsverhalten und die Sicht auf das Ganze sind entscheidende Perspektiven auf jeden funktionalen Zusammenhang. Diese Grundvorstellungen zu funktionalen Zusammenhängen gehen auf den Didaktiker Hans-Joachim Vollrath zurück (Vollrath 1989) und sind Grundlage jeglichen Arbeitens mit funktionalen Zusammenhängen, die im Alltag allgegenwärtig und eine der fünf inhaltlichen Leitideen der Bildungsstandards Mathematik sind (KMK 2004). Die dabei benötigten Vorstellungen, Kenntnisse und Fähigkeiten werden im Sinne des Spiralprinzips durchgängig systematisch aufgebaut und weiterentwickelt (Büchter 2014).

Wie aktuelle Forschungsprojekte zeigen (einen Überblick finden Sie in Tab. 1 am Ende des Artikels), können Lernende insbesondere durch das angeleitete Experimentieren mit geeigneten gegenständlichen Materialien (Vollrath 1978, Ganter 2013) bzw. mit sinnvoll gestalteten Simulationen den Funktionsbegriff an Phänomenen erfassen und Grundvorstellungen dazu aufbauen (Licht/Roth 2020). Bei solchen Experimenten sollte die (reale) Situation, aus der ein funktionaler Zusammenhang abgelesen (oder in die er hineingesehen) wird, im Mittelpunkt stehen, damit mathematische Erkenntnisse zu Funktionen mit der realen Situation abgeglichen und wechselseitig interpretiert werden können. Dabei spielt der adäquate Einsatz verschiedener Darstellungsformen und der

Grundvorstellungen zu funktionalen Zusammenhängen

Grundvorstellungen stellen verschiedene Perspektiven auf funktionale Zusammenhänge dar und ermöglichen im Zusammenspiel ein Gesamtbild eines konkreten funktionalen Zusammenhangs. Die drei Grundvorstellungen Zuordnung, Änderungsverhalten (bzw. Kovariation) und Funktion als Ganzes werden im Folgenden erläutert:

Zuordnung – einer unabhängigen Größe eine andere, davon abhängige Größe zuordnen

Durch Funktionen werden Zusammenhänge zwischen Größen beschrieben oder gestiftet: Jedem Wert der unabhängigen Größe wird genau ein Wert der davon abhängigen Größe zugeordnet.

Wenn etwa beim nullten, ersten, zweiten, ... Geburtstag eines Kindes jeweils dessen Körpergröße gemessen wird, dann wird dem Alter in Jahren jeweils die aktuelle Körpergröße in Zentimetern zugeordnet. Hier und beim Eintragen dieser jeweils gemessenen Größen auf einer Messlatte (Abb. 1) macht man die Erfahrung, dass jedem Alter (hier die unabhängige Größe) genau eine Körpergröße (hier die abhängige Größe) zugeordnet ist und nicht mehrere. Es wäre auch seltsam, wenn eine Person zum selben Zeitpunkt zwei verschiedene Körpergrößen hätte. Dagegen ist es bei Erwachsenen die Regel, dass sie etwa am 30. und am 31. Geburtstag dieselbe Körpergröße aufweisen, zwischendurch also nicht gewachsen sind. Dass verschiedenen Werten der unabhängigen Größe (hier: Lebensalter in Jahren) dieselben Werte der abhängigen Größe (hier: Körpergröße in Zentimetern) zugeordnet werden, kann sich aus dieser Situation also durchaus ergeben.

Für Funktionen wird folglich gefordert, dass jedem x -Wert der unabhängigen Größe genau ein



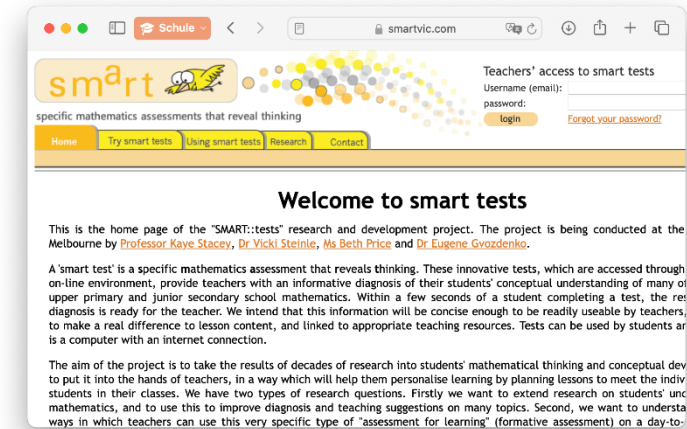
Abb. 1: Funktionaler Zusammenhang im Kinderzimmer: Eintragen der Körpergrößen auf der Messlatte

SMART-Test

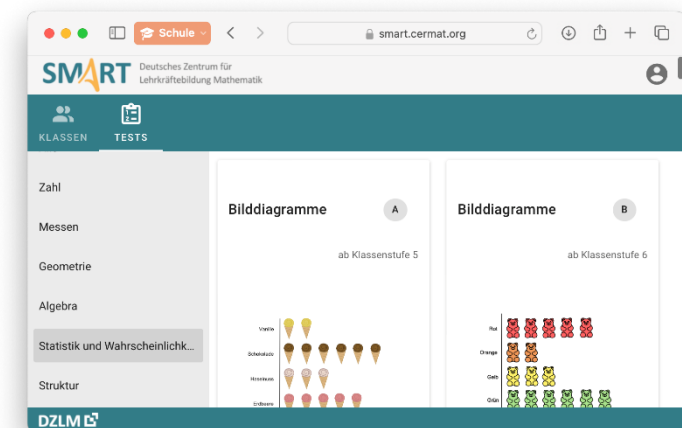
SMART-Test

ein Projekt der DZLM

- SMART steht für „Specific Mathematics Assessments that Reveal Thinking” – ein verstehensorientiertes Online-Instrument für Diagnose und Förderung.
- innovative 5- bis 15-minütigen Online-Tests
- Direkt im Anschluss an den Test stehen Lehrer/-innen die forschungsbasierte Diagnose sowie Hinweise zur individuellen Förderung zur Verfügung.
- hilft, das mathematische Denken sichtbar werden zu lassen.



<https://smartvic.com//smart/index.htm>



<https://fachportal.lernnetz.de/sh/faecher/mathe/matik/digitale-medien-2/smart-tests.html>

Reflexionsfrage

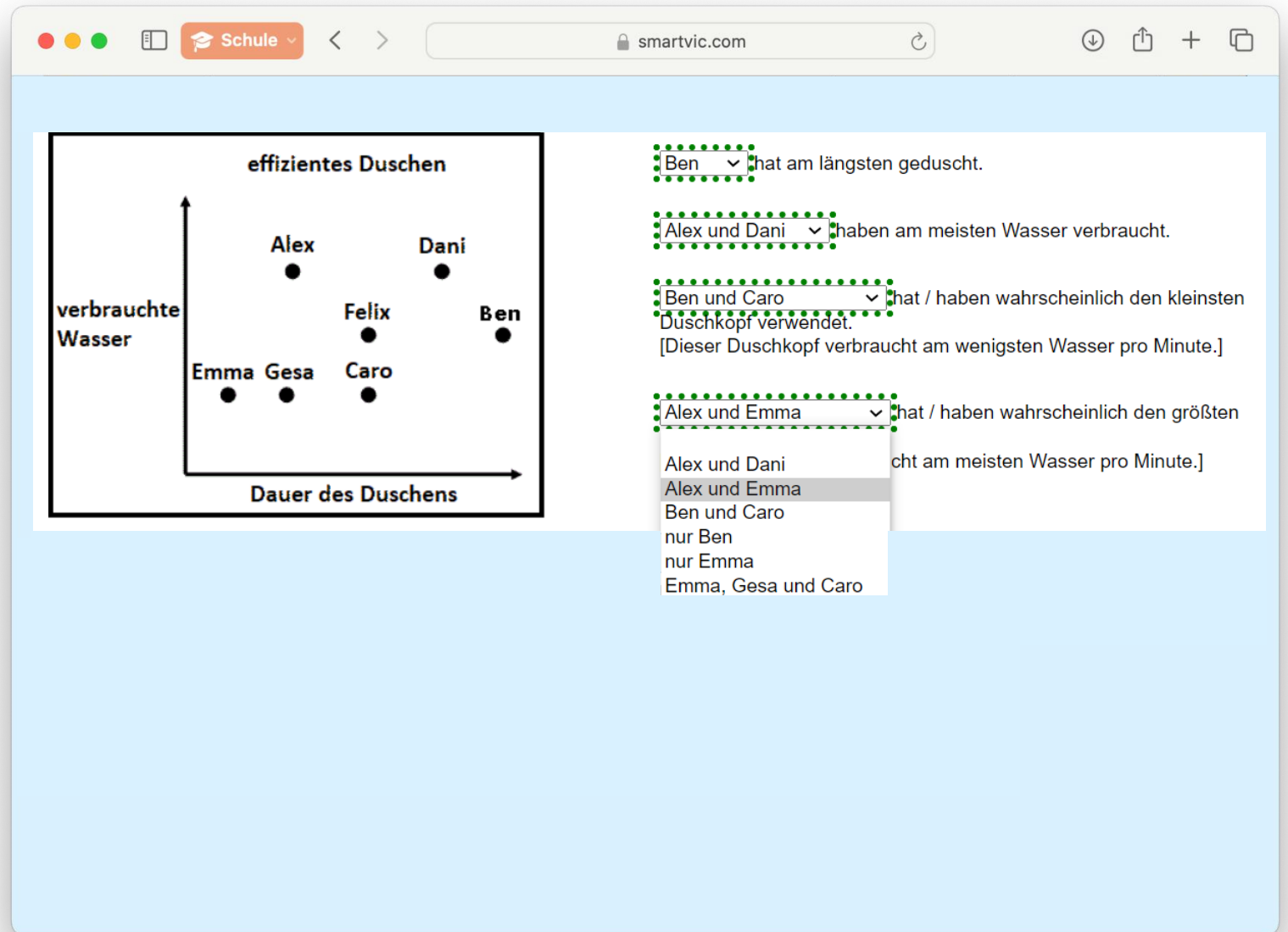
Vorabaufgabe

Bearbeiten den SMART-Test und beantworten Sie die folgenden Reflexionsfragen:



- a. Nennen Sie Aspekte, die mit diesem Test diagnostiziert werden können.
- b. Wann erscheint Ihnen der Einsatz des Tests im Unterricht sinnvoll?
- c. Wie unterscheiden sich die Testaufgaben von Ihnen bekannten Test- oder Leistungsaufgaben?

SMART-Test



Welche Grundvorstellungen und Darstellungsformen werden getestet?

SMART-Test

Welche Grundvorstellungen und Darstellungsformen werden getestet?

<https://smartvic.com/test/>

The screenshot shows a web browser window with the URL smartvic.com. The page content is in German and describes a physics problem involving a water faucet and three vases. The text reads: "Ein Wasserhahn tropft gleichmäßig und füllt die dargestellten Vasen mit Wasser. Jeder Graph zeigt die Zeit und die Füllhöhe einer Vase. Ziehe jeden Graphen zu der passenden Vase." (A water faucet drips uniformly and fills the shown vases with water. Each graph shows the time and the fill height of a vase. Drag each graph to the appropriate vase.)

Three vases are shown, labeled 1, 2, and 3. Vase 1 is a tall, narrow cylinder. Vase 2 is a shorter, wider cylinder. Vase 3 is a very short, wide cylinder. Each vase has a flower in it.

Below the vases are three graphs, labeled a, b, and c. Each graph has "Füllhöhe" (fill height) on the vertical axis and "Zeit" (time) on the horizontal axis. All three graphs show a straight line starting from the origin (0,0) and increasing linearly, representing a constant rate of filling.

The graphs are identical in shape, but their slopes are different. Graph a has the steepest slope, graph b has a medium slope, and graph c has the shallowest slope. This indicates that the rate of filling is highest for graph a, medium for graph b, and lowest for graph c.

SMART-Test

Welche Grundvorstellungen und Darstellungsformen werden getestet?

<https://smartvic.com/test/>

Ein Wasserhahn tropft gleichmäßig und füllt die dargestellten Vasen mit Wasser. Jeder Graph zeigt die Zeit und die Füllhöhe einer Vase. Ziehe jeden Graphen zu der passenden Vase.

The diagram illustrates a matching exercise between four vases and four graphs. The vases are labeled 1, 2, 3, and 4, and the graphs are labeled a, b, c, and d. The graphs show the relationship between 'Füllhöhe' (fill height) on the y-axis and 'Zeit' (time) on the x-axis.

- Vase 1: A vase with a wide base and a narrow neck, where the water level rises slowly at first and then more rapidly as it fills the neck.
- Vase 2: A vase with a wide base and a narrow neck, where the water level rises rapidly at first and then more slowly as it fills the neck.
- Vase 3: A vase with a wide base and a narrow neck, where the water level rises at a constant rate.
- Vase 4: A vase with a wide base and a narrow neck, where the water level rises at a constant rate.

The graphs are labeled a, b, c, and d, and show the following relationships:

- Graph a: A straight line with a constant positive slope, indicating a constant rate of filling.
- Graph b: A curve that starts at the origin and increases at an increasing rate (concave up), indicating that the filling rate is increasing over time.
- Graph c: A curve that starts at the origin and increases at a decreasing rate (concave down), indicating that the filling rate is decreasing over time.
- Graph d: A curve that starts at the origin and increases at a decreasing rate (concave down), indicating that the filling rate is decreasing over time.

SMART-Test

Welche Grundvorstellungen und Darstellungsformen werden getestet?

<https://smartvic.com/test/>

Ein Wasserhahn tropft gleichmäßig und füllt die dargestellten Vasen mit Wasser.
Jeder Graph zeigt die Zeit und die Füllhöhe einer Vase.

Ziehe jeden Graphen zu der passenden Vase.

The diagram illustrates a matching exercise between four vases and four graphs. The vases are labeled 1, 2, 3, and 4. The graphs are labeled a, b, c, and d. The graphs show the relationship between time (Zeit) on the x-axis and water level (Füllhöhe) on the y-axis.

- Vase 1: A semi-circle shape.
- Vase 2: An inverted V-shape (narrow at the bottom, wide at the top).
- Vase 3: A U-shape (wide at the bottom, narrow at the top).
- Vase 4: A narrow cone shape.

The graphs are:

- a: A curve that starts at the origin and increases with a decreasing slope (concave down).
- b: A curve that starts at the origin and increases with an increasing slope (concave up).
- c: A straight line starting from the origin (linear relationship).
- d: A curve that starts at the origin, increases steeply, and then levels off (concave down, approaching a horizontal asymptote).

SMART-Test

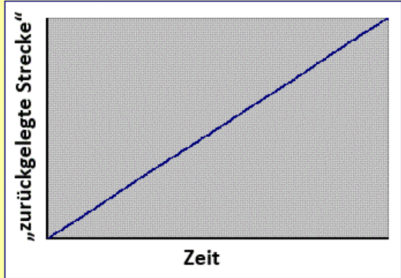
Welche Grundvorstellungen und Darstellungsformen werden getestet?

<https://smartvic.com/test/>

smartvic.com

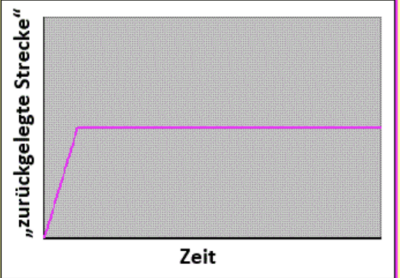
Ziehe die Beschreibung in das grüne Feld, die am besten zum jeweiligen Graphen passt. Vier Beschreibungen bleiben übrig.

Jens trägt Zeitungen in einer langen, geraden und flachen Straße aus. Die Graphen zeigen seine zurückgelegte Strecke in Abhängigkeit von der Zeit an vier Tagen.



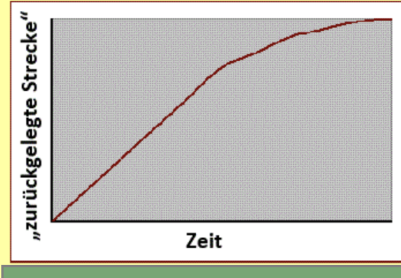
„zurückgelegte Strecke“

Zeit



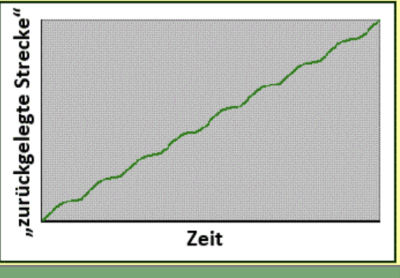
„zurückgelegte Strecke“

Zeit



„zurückgelegte Strecke“

Zeit



„zurückgelegte Strecke“

Zeit

a	Am Ende der Straße wird er müde.	Am Ende der Straße wird er schneller.	b
c	Er bewegt sich auf der Straße nach Nordosten.	an jedem Haus wird er langsamer, um die Zeitung einzuwerfen.	d
e	Sein Weg führt von Osten nach Westen.	Er guckt stattdessen TV bei einem Freund.	f
g	Er geht einen Berg hoch oder runter.	Er geht gleichmäßig und wirft die Zeitungen.	h

Stadien und typische Fehlvorstellungen

Stufe	Beschreibung
0	Lernende befinden sich unterhalb von Stufe 1. Diese Lernenden können noch keine Informationen bezogen auf eine Achse aus einem Graphen entnehmen und interpretieren.
1	Lernende können Informationen bezogen auf eine Achse aus einem Graphen ablesen und interpretieren, aber sie schaffen es noch nicht, über die Größen beider Achsen gleichzeitig nachzudenken.
2	Lernende können gleichzeitig über Informationen bezogen auf beide Achsen nachdenken und diese koordinieren. Sie interpretieren die konstante Steigung eines linearen Graphen als konstante Änderungsrate.
3	Lernende können Informationen bezogen auf die Geschwindigkeit aus den Steigungen linearer und nicht linearer Zeit-Weg-Graphen interpretieren.
4	Lernende können zusätzlich Informationen aus den Steigungen linearer und nicht linearer Graphen, die keine Zeit-Weg-Graphen sind, interpretieren. Zum Beispiel können sie Graphen interpretieren, die die Füllstandshöhe von Gefäßen in Abhängigkeit von der Zeit beschreiben.
5	Lernende können Informationen zur Änderungsrate aus der Steigung selbstständig finden und nutzen, um Probleme zu lösen, die mit der Änderungsrate in Zusammenhang stehen, ohne diese explizit zu benennen.

Funktionaler Zusammenhang in den Fachanforderungen

Funktionaler Zusammenhang

Fachanforderungen

Fachanforderungen Mathematik

Allgemein bildende Schulen
Sekundarstufe I
Sekundarstufe II

Inhaltsbezogene Kompetenzen <i>Die Schülerinnen und Schüler...</i>	Verbindliche Themen und Inhalte	Vorgaben und Hinweise
bestimmen Streckenlängen im rechtwinkligen Dreieck, bestimmen oder berechnen Streckenlängen und Winkelgrößen in ebenen Figuren und in Körpern.	• Satz des Pythagoras • Sinus, Kosinus und Tangens als Längenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck und am Einheitskreis • Sinussatz • Kosinussatz • Strahlensätze oder Zentrische Streckung	Hier steht die rechnerische Bestimmung von fehlenden Längen und Winkelgrößen in Figuren im Vordergrund. Auch pythagoreische Tripel sowie der Kehrsatz des Pythagoras sind zu thematisieren. Höhensatz und Kathetensatz eignen sich zur Differenzierung. Alternativ können die zentrische Streckung oder die Strahlensätze behandelt werden. Werden nur die Strahlensätze behandelt, muss in Anwendungsaufgaben deutlich werden, dass der Streckfaktor in Längen, Flächeninhalten und Volumina ähnlicher Figuren linear, quadratisch oder kubisch eingeht.

2.2.3 Leitidee Strukturen und funktionaler Zusammenhang

In der Sekundarstufe werden die Grundvorstellungen des Funktionsbegriffs (Zuordnungs-, Kovariations- und Objektvorstellung) aufgebaut. Wichtige funktionale Beziehungen zwischen Zahlen, Daten beziehungsweise Größen werden eingeführt. Das situationsgerechte Wechseln zwischen den Darstellungsformen Text, Term, Tabelle und Graph ist wesentliche Voraussetzung für das Modellieren sowie für das Bearbeiten innerma-

thematischer Fragestellungen. Das formale Operieren mit verschiedenen Funktionsklassen ist eine wichtige Grundlage für die Oberstufe.

Das intuitive Operieren mit proportionalen Funktionen ist einer ausschließlich formalen Dreisatzrechnung mithilfe von Termen vorzuziehen. Das Lösen von Gleichungen soll auch als Schnittpunktsuche von Funktionsgraphen verstanden werden, um so den Zusammenhang der Inhaltsbereiche Algebra und Funktionen exemplarisch aufzuzeigen.

Inhaltsbezogene Kompetenzen <i>Die Schülerinnen und Schüler...</i>	Verbindliche Themen und Inhalte	Vorgaben und Hinweise
entnehmen Informationen aus einfachen und komplexen Diagrammen und Tabellen, stellen Daten grafisch dar und interpretieren sie.	• Maßstab • Säulendiagramm • Balkendiagramm • Kreisdiagramm	Der Zuordnungsbegriff kann insbesondere im Zusammenhang mit den Leitideen <i>Zahl und Operation</i> und <i>Daten und Zufall</i> vorbereitet werden.
verwenden Variablen je nach Kontext als eine feste Zahl, als eine beliebige Zahl aus einem Zahlenbereich und als eine Veränderliche in einem bestimmten Bereich, können Beispiele für die unterschiedliche Verwendung von Variablen nennen, stellen einfache und komplexe Terme auf, um Zusammenhänge im Sachkontext zu beschreiben, berechnen Werte von gegebenen Termen mit Variablen, formen Terme mithilfe von Rechengesetzen um und interpretieren sie, nutzen den Taschenrechner sowie die Tabellenkalkulation situationsgerecht.	• verschiedene Variablenbedeutungen (feste Zahlen, beliebige Zahl aus einem Zahlenbereich, Veränderliche in einem bestimmten Bereich) • Term, Wert eines Terms • gleichwertige Terme • Multiplikation von Summen, Faktorisieren • Binomische Formeln, quadratische Ergänzung	Für die Erarbeitung von Variablen ist es sinnvoll, Inhalte, Darstellungen und Vorstellungen aus der Grundschule aufzugreifen, wie z. B. die Bedeutung des Gleichheitszeichens oder Platzhalteraufgaben. Der Schwerpunkt sollte im Aufstellen und Interpretieren von Termen mit Variablen gesetzt werden. Auf der Anforderungsebene des Ersten allgemeinbildenden Schulabschlusses liegt der Schwerpunkt im Einsetzen von Zahlen und im Berechnen von Werten. Die Tabellenkalkulation kann propädeutisch für die Einführung von Variablen genutzt werden. Es kann experimentell untersucht werden, welchen Einfluss das Verändern von Variablenwerten (z. B. Verdoppelung oder Erhöhung um 1) auf den Wert eines Terms hat.

Fortführung der Tabelle »

Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Schülerinnen und Schüler...	Verbindliche Themen und Inhalte	Vorgaben und Hinweise
erkennen und charakterisieren Zuordnungen zwischen Objekten in Tabellen, Diagrammen und Texten, lösen einfache und komplexe Sachprobleme, wechseln situationsgerecht zwischen den Darstellungsformen Tabelle, Graph, Diagramm und Text.	• Zuordnungen, auch nichtnumerische • wachsende Funktionen • fallende Funktionen • proportionale Funktionen • antiproportionale Funktionen • Dreisatz, Produktgleichheit, Quotientengleichheit, Proportionalitätsfaktor • Schreibweise $f(x) = \dots$ sowie die Begriffe Stelle (Argument) und Wert • Definitions- und Wertemenge einer Funktion	Beim Darstellen von mathematischen Sachverhalten mit Tabellen kann ein intuitiver Zuordnungsbegriff genutzt werden. Eine tragfähige Grundvorstellung des Funktionsbegriffs ist durch reichhaltige Situationen aufzubauen und darf nicht durch einen zu schnellen Übergang auf proportionale, lineare und antiproportionale Funktionen abgekürzt werden. Dem erhöhten Abstraktionsgrad sollte hier Rechnung getragen werden. Die Verwendung der Schreibweise $f(x) = \dots$ ist verbindlich. Für die Anforderungsebene des Ersten allgemeinbildenden Schulabschlusses hat das Beschreiben in Textform untergeordnete Bedeutung. Beim intuitiven Dreisatz wird der Proportionalitätsfaktor verwendet, aber auf der Anforderungsebene des Ersten allgemeinbildenden Schulabschlusses nicht als Begriff explizit benannt.
erstellen und interpretieren einfache Diagramme und Graphen, nutzen digitale Mathematikwerkzeuge zum Auswerten und Darstellen von Daten.	• Diagramme • Graph im Koordinatensystem • Wertetabellen mit digitalen Werkzeugen	Diagramme und Graphen sollen sowohl per Hand als auch computerunterstützt erstellt werden. Auch die Möglichkeiten des wissenschaftlichen Taschenrechners zur automatischen Erstellung von Wertetabellen sollen genutzt werden.
charakterisieren numerische Zuordnungen anhand qualitativer Eigenschaften des Graphen, identifizieren und charakterisieren spezielle Funktionen, wechseln für verschiedene Funktionsklassen situationsgerecht zwischen den Darstellungsformen Tabelle, Graph, Text und Term.	lineare Funktionen: • Gerade • lineares Wachstum • Steigung, Steigungsdreieck • Achsenschnittpunkte • Funktionsgleichung • Bedeutung der beiden Parameter in der Funktionsgleichung	Es bietet sich an, die Funktionalgleichungen sowohl in Tabellen als auch in grafischen Darstellungen zu visualisieren; z. B. gilt bei linearen Funktionen $f(x+1) = f(x) + m$. Die Bedeutung des Proportionalitätsfaktors sollte im Zusammenhang mit Anwendungsaufgaben hervorgehoben werden, um das Verständnis des Steigungsbegriffes zu erleichtern.

Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Schülerinnen und Schüler...	Verbindliche Themen und Inhalte	Vorgaben und Hinweise
verstehen das Lösen von Gleichungen als Nullstellenbestimmung von geeigneten Funktionen und umgekehrt, lösen graphische Probleme durch Lösen und Aufstellen von Gleichungen,	quadratische Funktionen: • Parabel • Symmetrie • Scheitelpunkt • Achsenschnittpunkte • Normalform • quadratische Ergänzung und Scheitelpunktsform • faktorisierte Form • Bedeutung der verschiedenen Parameter in den Funktionsgleichungen • Verschiebung in x- bzw. y-Richtung • Streckung in x- bzw. y-Richtung • Spiegelung an der x-Achse bzw. y-Achse	Die Darstellung quadratischer Funktionen in Normalform, Scheitelpunktform und gegebenenfalls in faktorisierter Form sind im Hinblick auf die Anschlussfähigkeit zur Oberstufe gleichrangig zu behandeln.
beschreiben für ausgewählte Funktionsklassen die Veränderung des Graphen von f beim Übergang von $f(x)$ zu $f(x) + c$, $c \cdot f(x)$, $f(x + c)$, $f(c \cdot x)$, $f(-x)$, $-f(x)$.	Exponentialfunktionen: • Graphen • exponentielles Wachstum • Funktionalgleichung • Monotonie • Achsenschnittpunkt • Verdoppelungszeit, Halbwertszeit • asymptotisches Verhalten • Bedeutung der verschiedenen Parameter in der Funktionsgleichung Sinus-Funktionen: • Graphen • periodische Vorgänge • Projektion am Einheitskreis • Bogenmaß • Bedeutungen der Parameter a, b, c und d in der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$	Speziell bei der Exponentialfunktion $f(x) = c \cdot a^x$ sollte die Funktionalgleichung $f(x+1) = f(x) \cdot a$ in Analogie zur Dreisatzrechnung mit Operatoren an Tabellen verdeutlicht werden.
		Der Zusammenhang zwischen der algebraischen Darstellung und dem Graphen soll durch Computereinsatz verdeutlicht werden. Die Kosinusfunktion ergibt sich aus der Funktion f mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ und $a = b = 1$, $c = \frac{1}{2}\pi$, $d = 0$.

Fortführung der Tabelle »

Inhaltsbezogene Kompetenzen <i>Die Schülerinnen und Schüler...</i>	Verbindliche Themen und Inhalte	Vorgaben und Hinweise
entscheiden sich für eine geeignete Strategie zur Lösung einer gegebenen Gleichung, nutzen den Taschenrechner zum Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen, stellen aus inner- und außermathematischen Situationen Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssysteme auf, lösen sie und interpretieren ihre Lösungsmenge, modellieren mit geeigneten Gleichungen Realsituationen.	• systematisches Probieren zum Lösen von Gleichungen • gedankliches Anwenden der Umkehroperation beim Lösen von einfachen Gleichungen • lineare Gleichungen • Äquivalenzumformungen • Lösungen von Gleichungen • einfache Ungleichungen • quadratische Gleichungen (quadratische Ergänzung, Faktorisierung) • lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen • mindestens zwei Lösungsverfahren für Gleichungssysteme (Einsetzungsverfahren, Gleichsetzungsverfahren, Additionsverfahren, grafische Lösung) • über- und unterbestimmte Systeme • Exponentialgleichungen • Logarithmen	Grafische Darstellungen dienen der Veranschaulichung der Lösung von Gleichungen und Gleichungssystemen. Das Lösen von quadratischen Gleichungen sollte z. B. erst nach der Betrachtung von quadratischen Funktionen erfolgen. Beim Lösen quadratischer Gleichungen sollte für die quadratische Ergänzung die gleiche Schreibweise gewählt werden wie beim Überführen quadratischer Funktionen in die Scheitelpunktsform. Unterrichtsziel ist nicht das schematische Anwenden einer Lösungsformel, sondern ein auf Verständnis basierendes Vorgehen beim Lösen quadratischer Gleichungen mit einem Repertoire an Strategien (z. B. Ausklammern). Die Herleitung einer Lösungsformel ist mithilfe der quadratischen Ergänzung vorzubereiten. Logarithmen sollen nur zur Lösung von Exponentialgleichungen eingeführt werden. Im Sachzusammenhang, z. B. Verdoppelung eines Kapitals, kann auch ein Probierverfahren als Lösungsstrategie angemessen sein.

2.2.4 Leitidee Raum und Form

Diese Leitidee ist auf die Entwicklung des geometrischen Vorstellungsvermögens gerichtet. Sie beinhaltet den Umgang mit Objekten in Ebene und Raum. Es geht um Eigenschaften dieser Objekte und um die Darstellung mit geeigneten Medien einschließlich digitaler

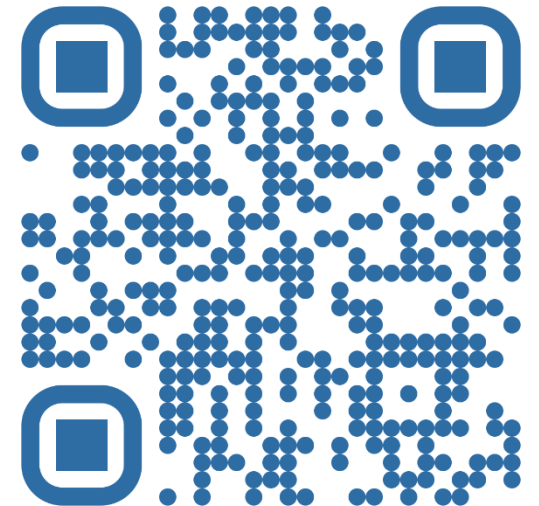
Mathematikwerkzeuge. Erfahrungen im Zeichnen und Messen werden durch das Konstruieren und durch das Argumentieren mit geometrischen Überlegungen und Sätzen erweitert. Die Geometrie bietet vielfältige Anlässe für Begründungen und Beweise. Die Fachkonferenz kann beschließen, ob dabei ein Schwerpunkt in der Abbildungs- oder der Kongruenzgeometrie gesetzt wird.

Inhaltsbezogene Kompetenzen <i>Die Schülerinnen und Schüler...</i>	Verbindliche Themen und Inhalte	Vorgaben und Hinweise
beschreiben mit geometrischen Begriffen ebene und räumliche Situationen.	• Punkt • Strecke • Gerade • Winkel • Abstand • Kreis: Kreislinie, Mittelpunkt, Radius, Durchmesser • Achsensymmetrie, Punktsymmetrie • parallel zu und senkrecht auf (<i>orthogonal zu</i>)	
führen geometrische Tätigkeiten sachgerecht aus, nutzen das Koordinatensystem zur Darstellung von ebenen Figuren.	• sachgerechter Umgang mit Geometriedreieck, Zirkel und Lineal • Koordinatensystem • Achsen • Quadranten • Koordinaten	Die Ausbildung feinmotorischer Fertigkeiten ist angemessen im Unterricht zu berücksichtigen. Die frühe Einführung aller vier Quadranten kann propädeutisch für die Zahlbereichserweiterung genutzt werden.
stellen ebene geometrische Figuren und elementare geometrische Abbildungen im Koordinatensystem dar, benennen, zeichnen und klassifizieren besondere Dreiecke und unterscheiden definierende und abgeleitete Eigenschaften.	• Achsenspiegelung • Drehung • Punktspiegelung • Verschiebung • gleichschenkliges Dreieck • gleichseitiges Dreieck • rechtwinkliges Dreieck	Die Abbildungsgeometrie ermöglicht den Zugang zur Dreh- und Verschiebungssymmetrie. Hier bietet sich der Einsatz von dynamischer Geometrie Software an.
benennen, zeichnen und charakterisieren Figuren aus dem Haus der Vierecke und unterscheiden definierende und abgeleitete Eigenschaften.	Haus der Vierecke: • Quadrat • Raute • Rechteck • Parallelogramm • Trapez • Drachen	Die Untermengenbeziehungen im Haus der Vierecke ermöglichen die Behandlung von All- und Existenzaussagen.

Fortführung der Tabelle »

Funktionsmaschine

Handlungsorientierte Zugänge



Fachanforderung und Leitfaden

Aufgabe

Vergleichen Sie ihr SiFC, die Fachanforderungen und den Leitfaden zu den Fachanforderungen hinsichtlich folgender Aspekte:



- Wechsel der Darstellungsformen
- die verschiedenen Funktionstypen
- früher Beginn
- Einbindung von Sachproblemen
- Lösbarkeit/Lösen von Gleichungen

Funktionaler Zusammenhang Handlungsorientierte Zugänge

Handlungsorientierte Zugänge

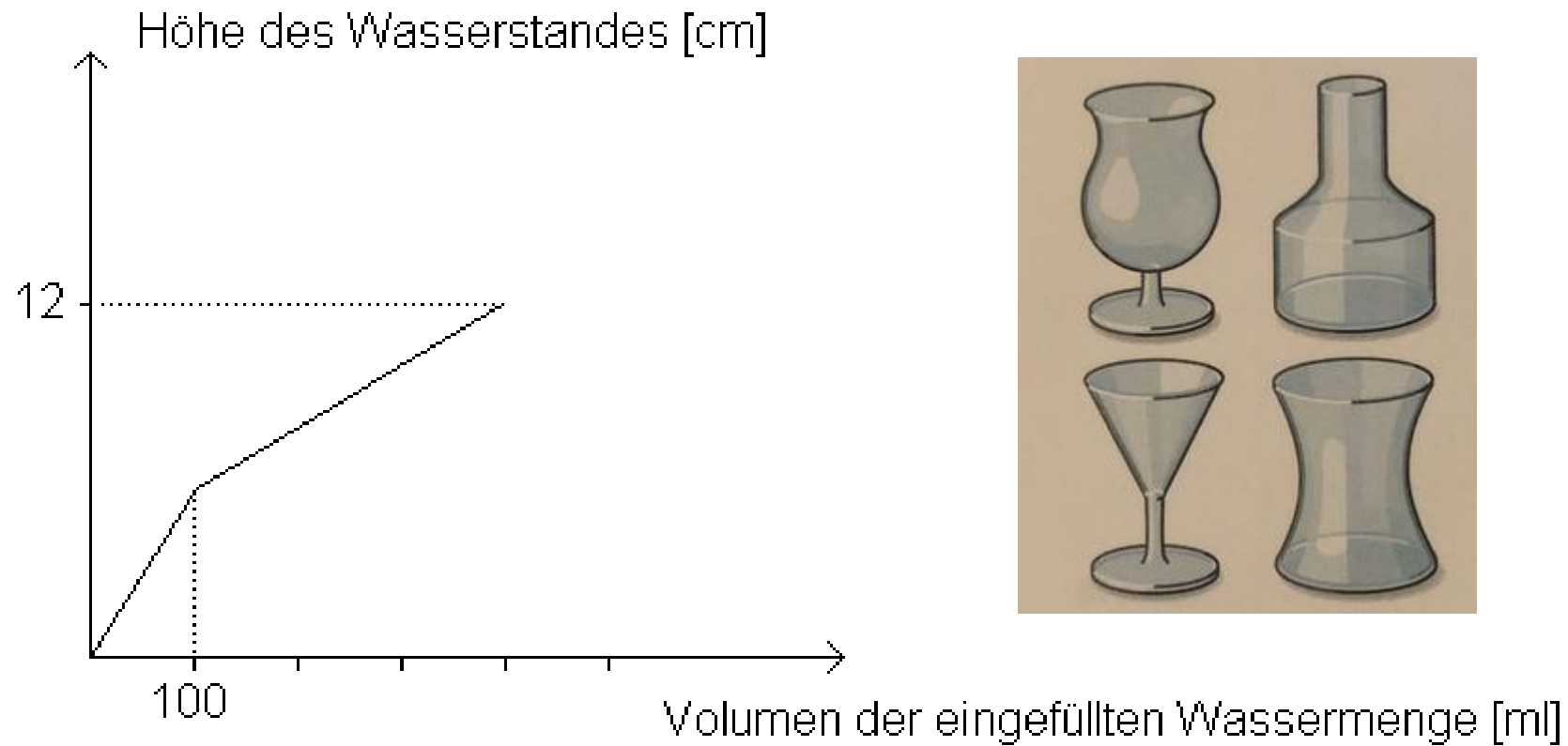
Aufgabe

- a. Entscheiden Sie sich für einen der Zugänge:
 - i. Füllstandsgraphen
 - ii. Graphen laufen
- b. Bearbeiten Sie die Zugänge zunächst aus Sicht von Lernenden.
- c. Bereiten Sie eine kleine Präsentation Ihrer Bearbeitung vor.



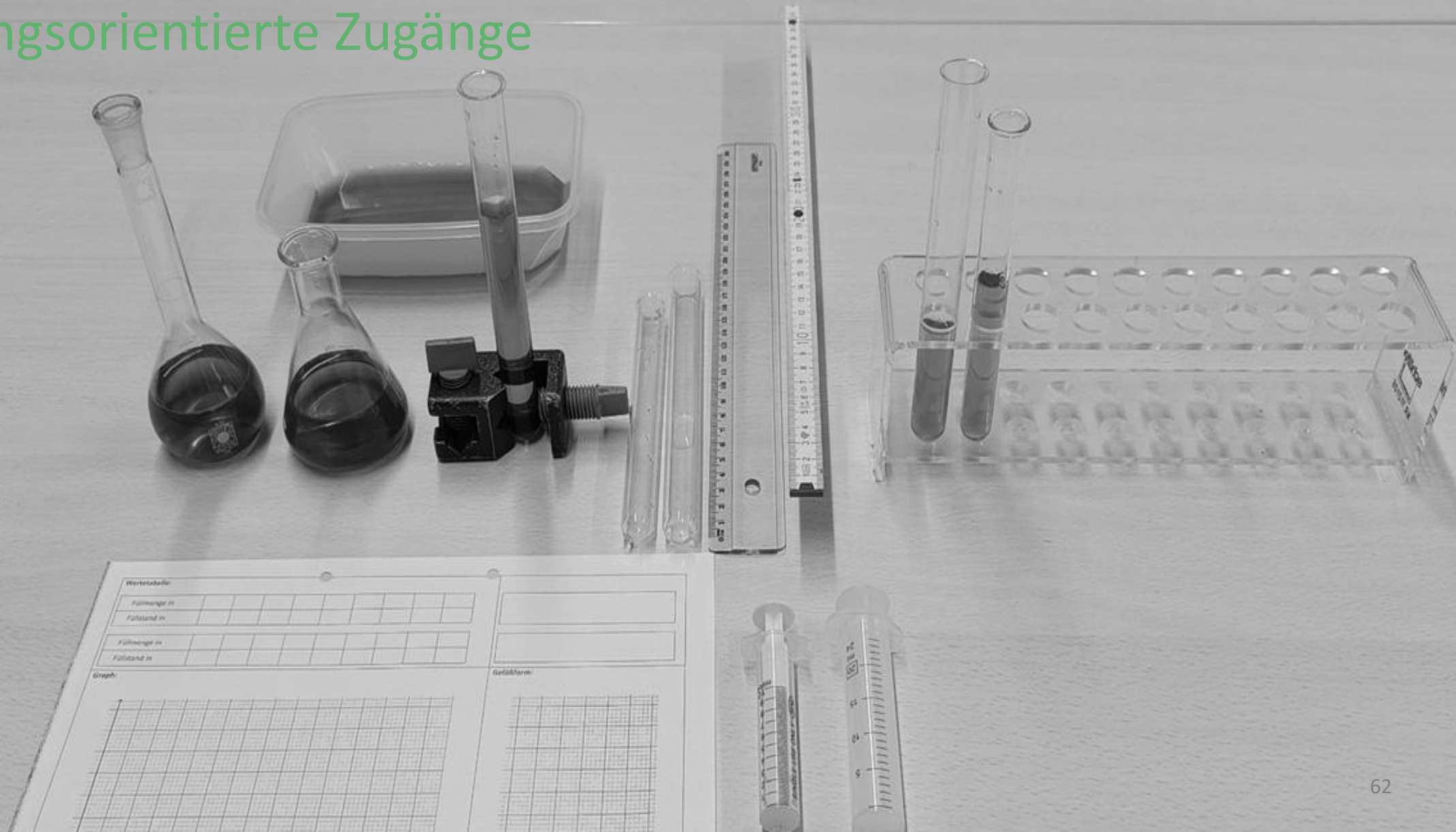
Füllstandsgraphen

Handlungsorientierte Zugänge



Füllstandsgraphen

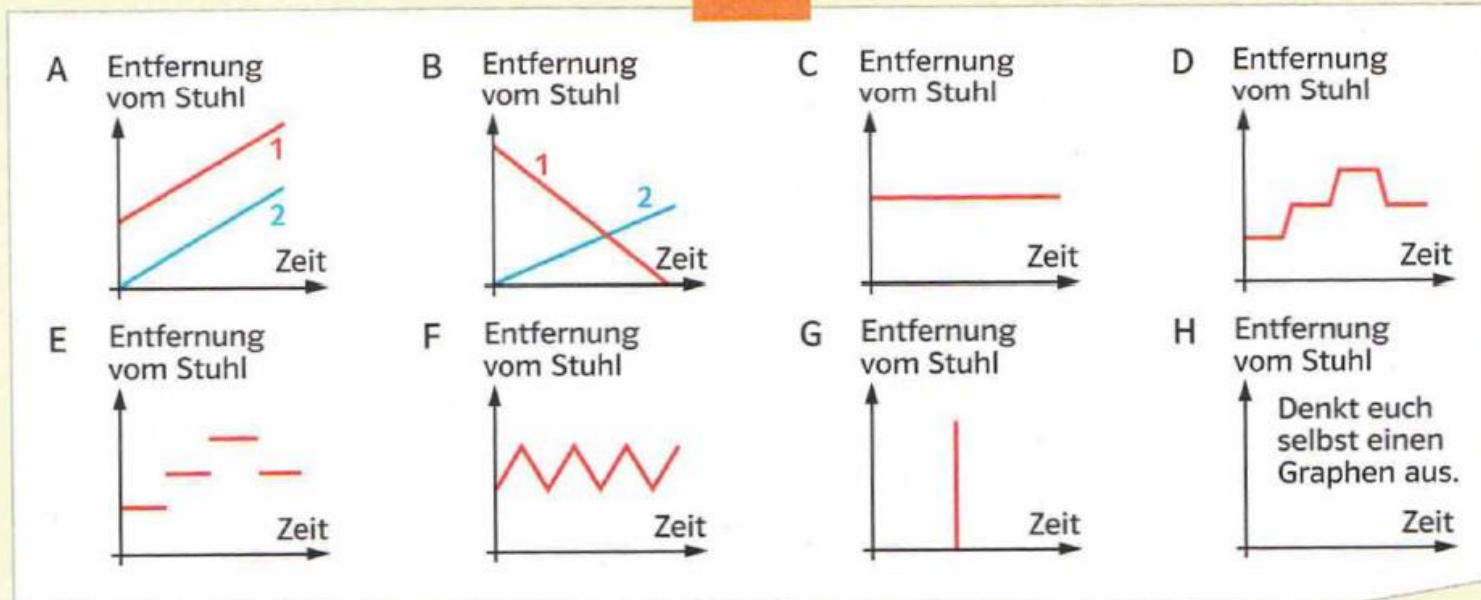
Handlungsorientierte Zugänge



Graphen laufen

Handlungsorientierte Zugänge

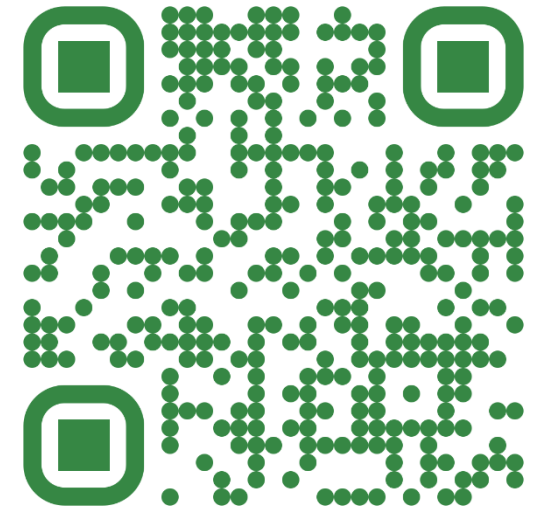
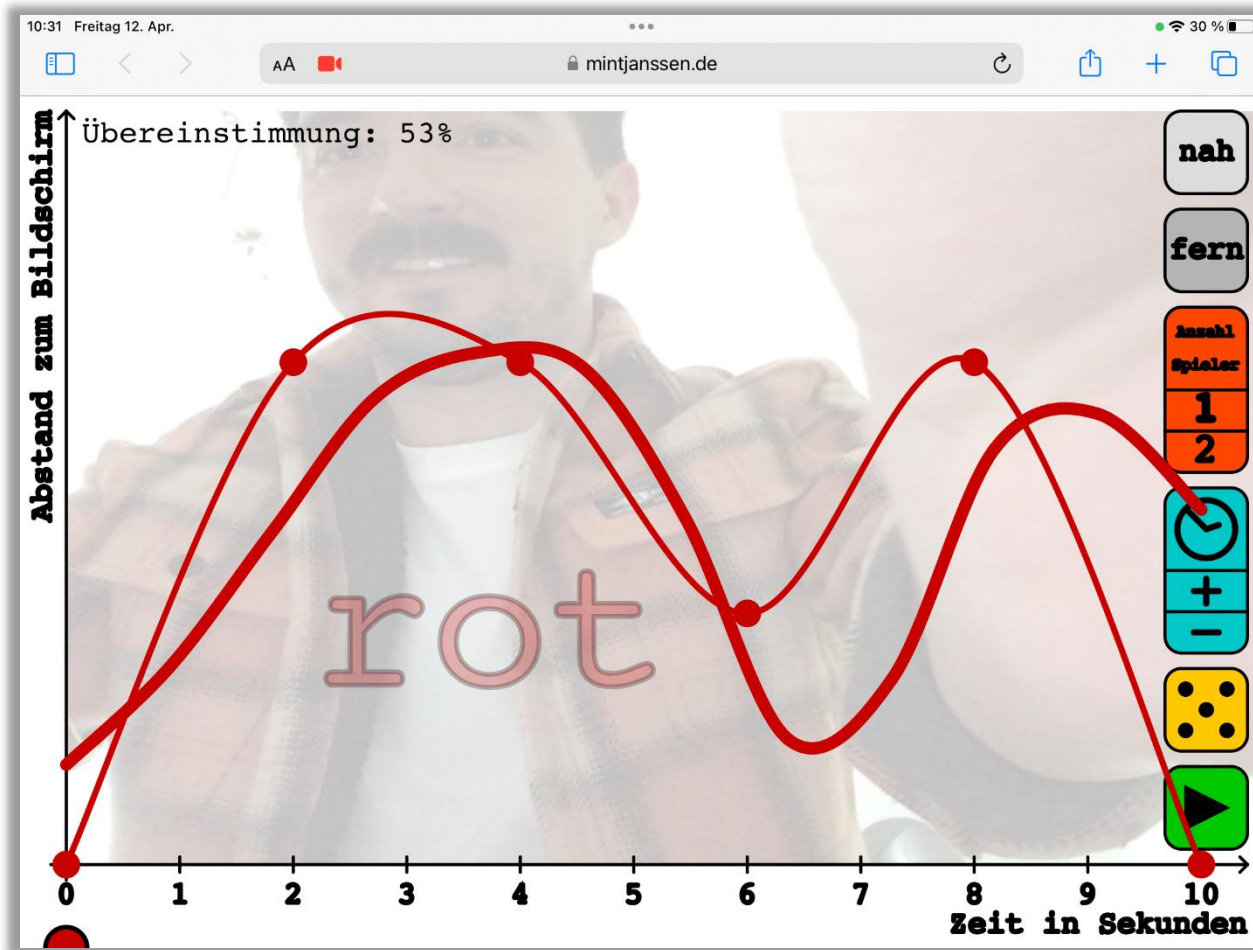
 Die eingezeichneten Linien im Koordinatensystem nennt man Graphen.



- a) Nehmt euch einen Stuhl. Das ist euer Bezugspunkt. Ihr sollt die Graphen gehen, das heißt, jeweils eine/r oder zwei von euch sollen sich in Bezug auf den Stuhl so bewegen, dass es den Graphen entspricht. Notiert, was euch bemerkenswert erscheint.
- b) Tauscht eure Lösungen bei einer Präsentation in der Klasse aus.

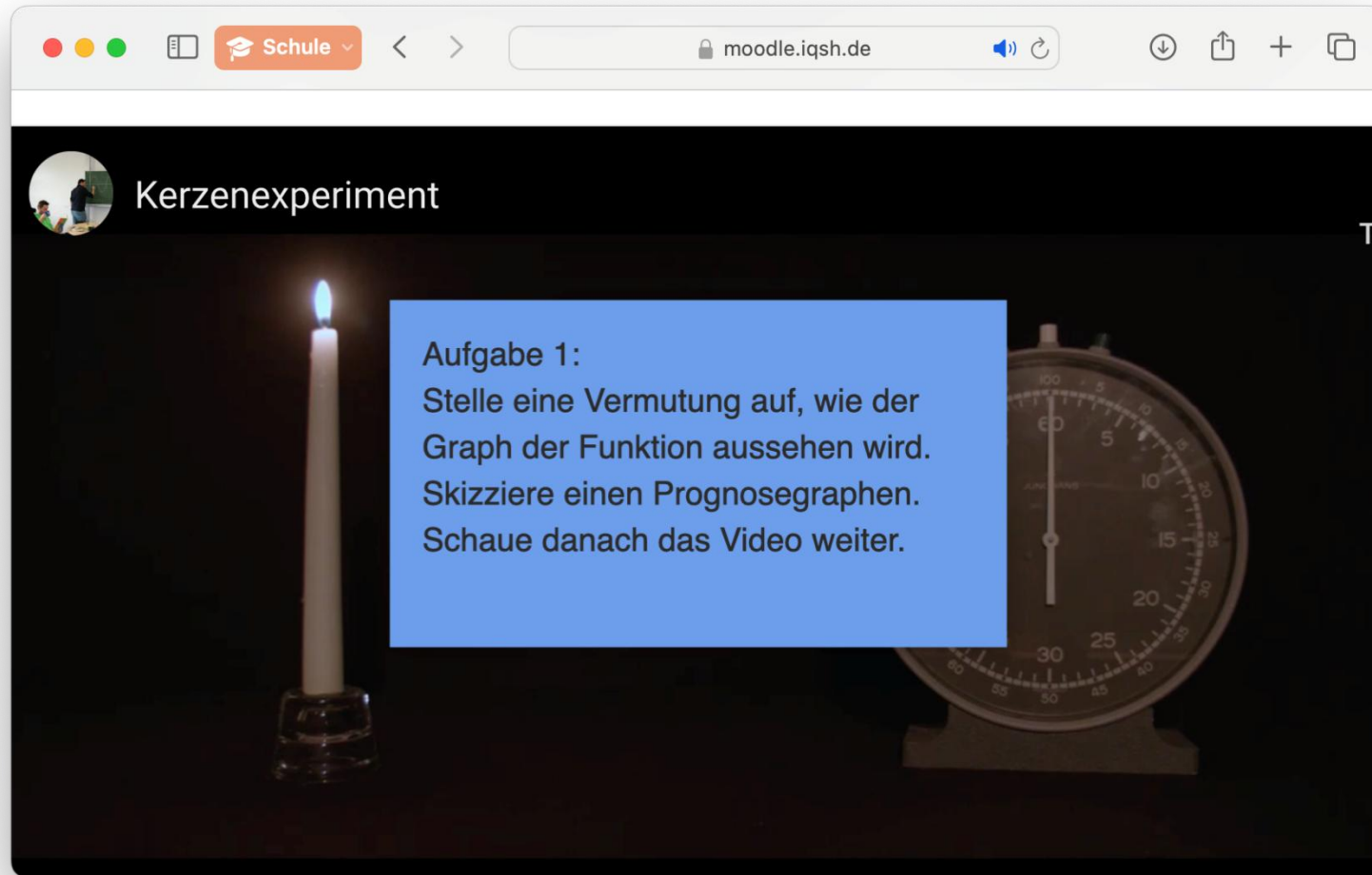
Graphen laufen

Handlungsorientierte Zugänge



Abbrennen einer Kerze

Handlungsorientierte Zugänge

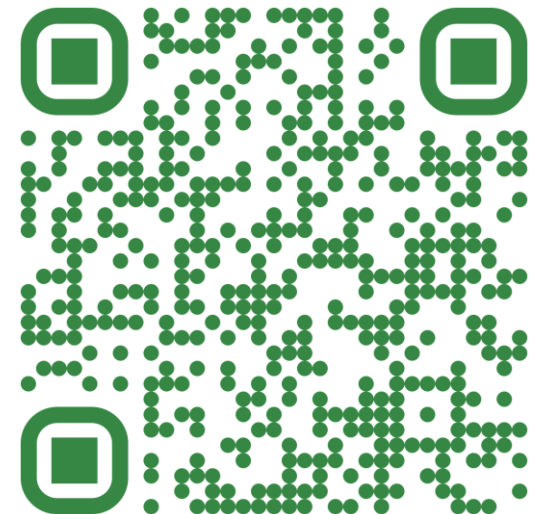


Schule

moodle.iqsh.de

Kerzenexperiment

Aufgabe 1:
Stelle eine Vermutung auf, wie der Graph der Funktion aussehen wird.
Skizziere einen Prognosegraphen.
Schaue danach das Video weiter.



Begriffe und Notationen

Definition Funktion

Seien A und B Teilmengen der reellen Zahlen und $R \subseteq A \times B$.

Für alle $x \in A$ gibt es ein $y \in B$ so dass $(x, y) \in R$ ist.

Für alle $x \in A$, $y_1, y_2 \in B$ gilt: $(x, y_1) \in R$ und $(x, y_2) \in R$, dann gilt $y_1 = y_2$.

Definition

Graph einer Funktion

Sei D eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Unter einer reellwertigen (reellen) **Funktion** auf D versteht man eine Abbildung $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Die Menge D heißt Definitionsbereich von f .

Der **Graph** von f ist die Menge

$$\Gamma_f := \{(x, y) \in D \times \mathbb{R} : y = f(x)\}.$$

Funktion?

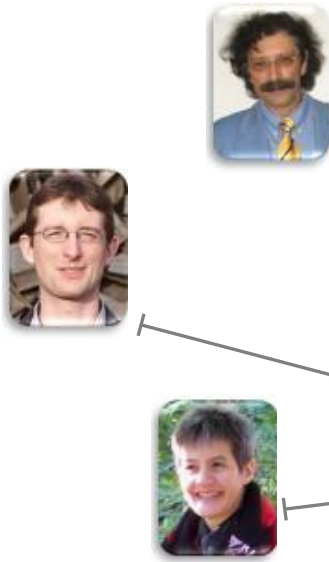
$f:$

G

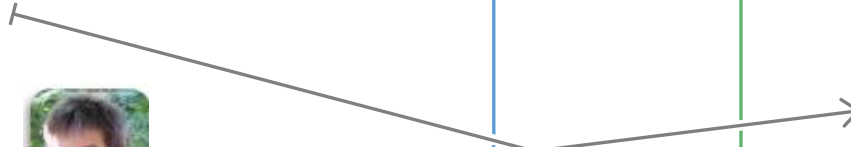


Z

Grundmenge



Zielmenge



Funktion?

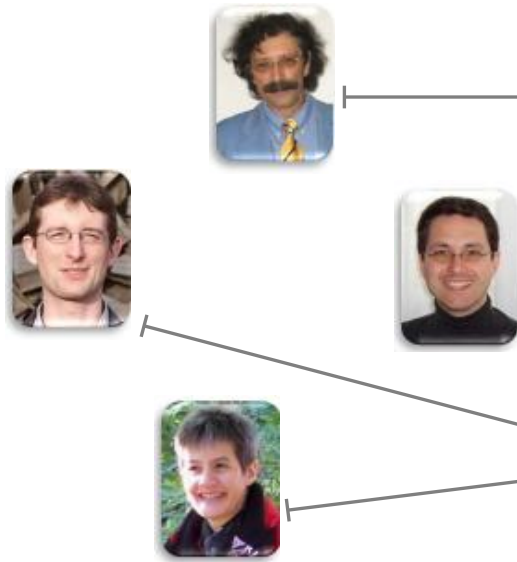
$f:$

G



Z

Grundmenge



Zielmenge



Funktion?

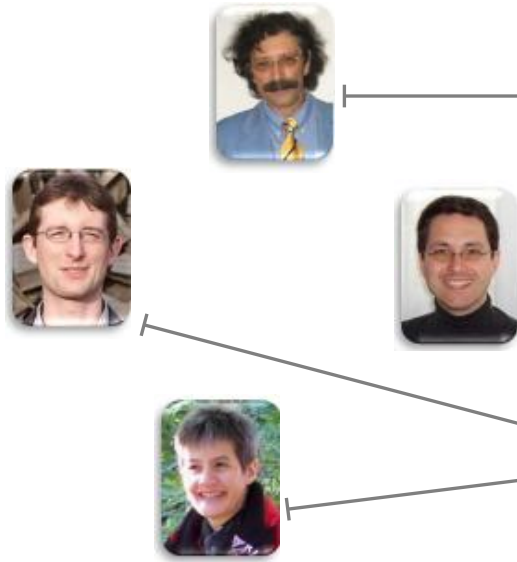
$f:$

G



Z

Grundmenge



Zielmenge



Funktion?

$f:$

G



Z

Grundmenge

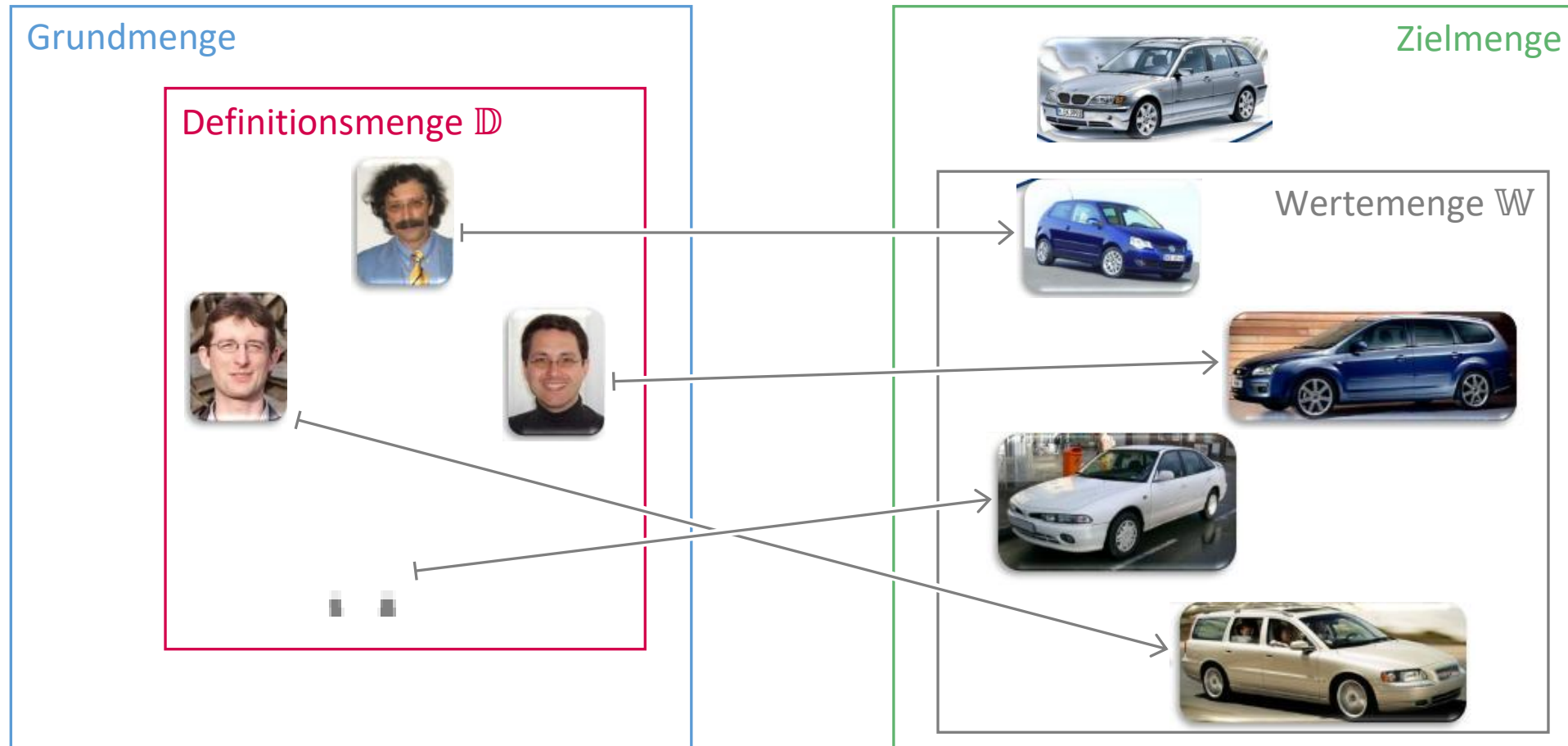


Zielfmenge



Funktion?

$f: \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{Z}$



Allgemeine Definition

Relation

Linkstotal

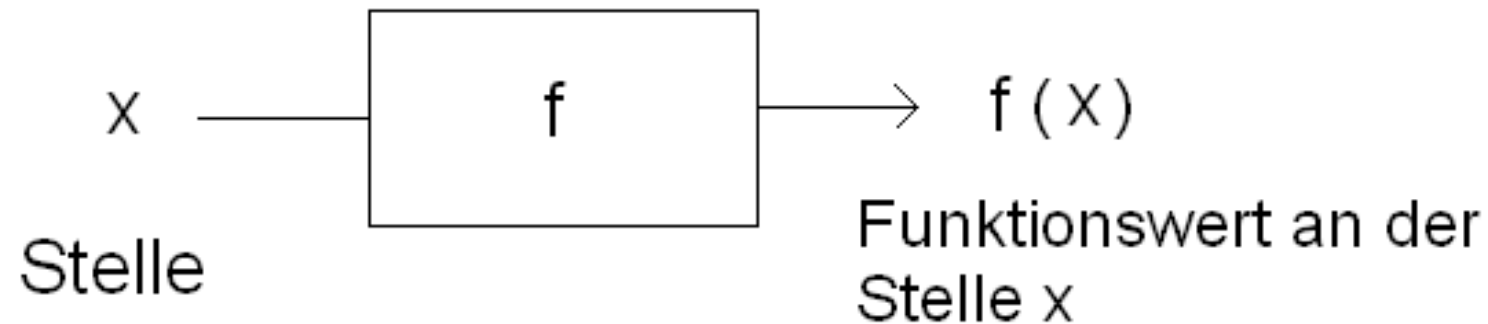
Rechtseindeutig

Definitionsbereich

Wertebereich

Eingabe

Ausgabe



Eine Funktion ist eine **Maschine**.

Begriffe und Notationen

Aufgabe

1. Überlegen Sie sich eine für den Unterricht tragfähige Definition der Funktion.
2. Erstellen Sie eine Liste mit weiteren Begriffen, Bezeichnungen, Sprech- und Schreibweisen im Zusammenhang mit Funktionen.
3. Gehen Sie auf Unterschiede und Gemeinsamkeiten mit folgenden Begriffen ein: Abbildung, Funktion, Operation.

Definitionen aus Schulbüchern

Mathewerkstatt 7: „Zusammenhänge, bei denen es zu einem Wert der ersten Größe genau einen Wert der zweiten Größe gibt, nennt man Funktionen.“

Lambacher Schweizer 8: „Eine eindeutige Zuordnung heißt Funktion.“

Neue Wege 8: „Eine Zuordnung, bei der jedem x -Wert genau ein y -Wert zugeordnet wird, heißt Funktion.“

Wikipedia: „In der Mathematik ist eine Funktion [...] oder Abbildung eine Beziehung zwischen zwei Mengen, die jedem Element der einen Menge [...] genau ein Element der anderen Menge zuordnet.“

Begriffe und Notationen

Aufgabe

1. Überlegen Sie sich eine für den Unterricht tragfähige Definition der Funktion.
2. Erstellen Sie eine Liste mit weiteren Begriffen, Bezeichnungen, Sprech- und Schreibweisen im Zusammenhang mit Funktionen.
3. Gehen Sie auf Unterschiede und Gemeinsamkeiten mit folgenden Begriffen ein: Abbildung, Funktion, Operation.

Begriffe und Bezeichnungen

„Funktionsgleichung $y = 4x$ “
oder „Funktionsterm $4x$ “
oder „Funktion f “

Stelle – nicht x-Wert!!!

Aussageform: $y = 2x + 3$

(Die Lösungsmenge ist die Menge aller Punkte, die den Graphen bilden.)

Funktionsgleichung (eig. Funktionsvorschrift): $f(x) = 2x + 3$

(Durch diese Form wird die Funktion f definiert.)

Beide Schreibweisen sollten bereits in SI eingeführt werden!

Begriffe und Notationen

Aufgabe

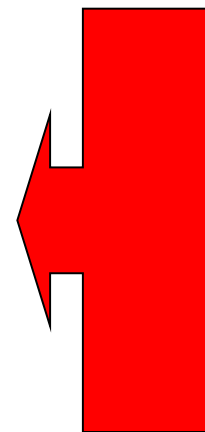
1. Überlegen Sie sich eine für den Unterricht tragfähige Definition der Funktion.
2. Erstellen Sie eine Liste mit weiteren Begriffen, Bezeichnungen, Sprech- und Schreibweisen im Zusammenhang mit Funktionen.
3. Gehen Sie auf Unterschiede und Gemeinsamkeiten mit folgenden Begriffen ein: Abbildung, Funktion, Operation.

Was sind Funktionen?

Abbildungen

Operatoren

Funktionen



Synonyme

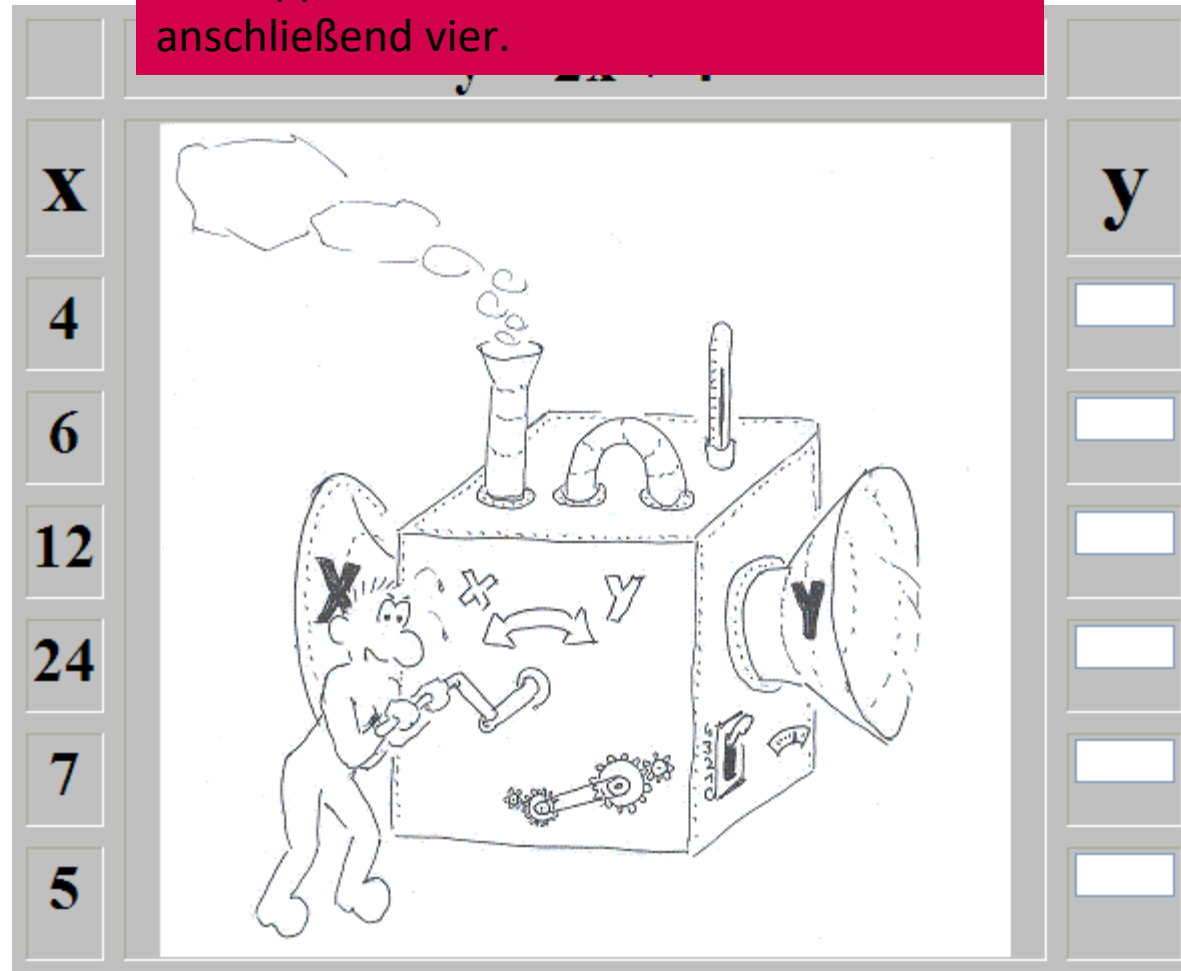
Begriffe?

Operatoren

Additionsoperator

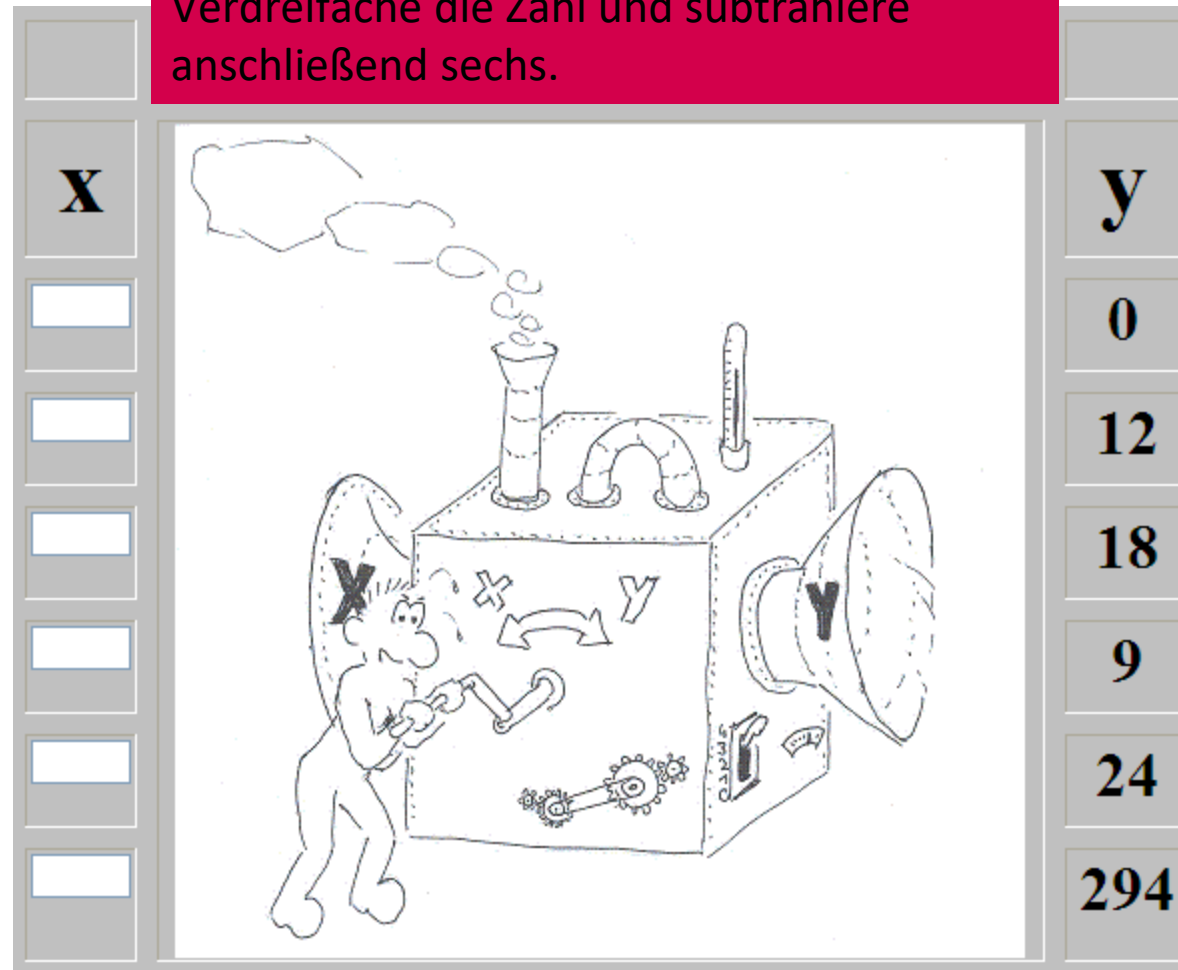


Verdopple die Zahl und addiere
anschließend vier.

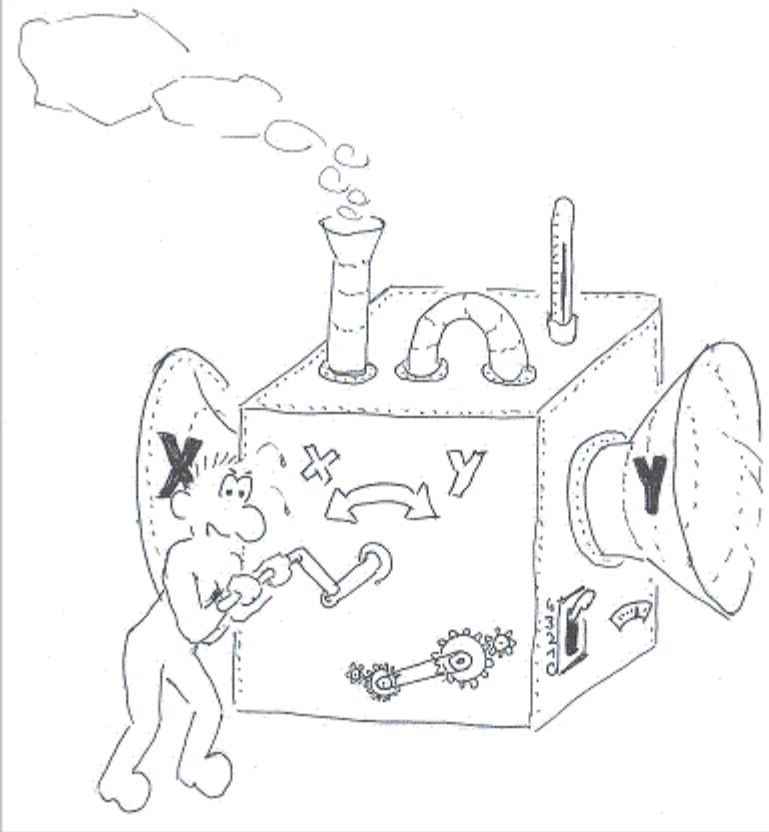


Dies ist eine Darstellung von $f(x) = 2x + 4$.

Verdreifache die Zahl und subtrahiere
anschließend sechs.



Dies ist eine Darstellung von $f(x) = 3x - 6$.

	...	
x		y
2		12
4		28
-3		-28
5		36
10		76
0		-4

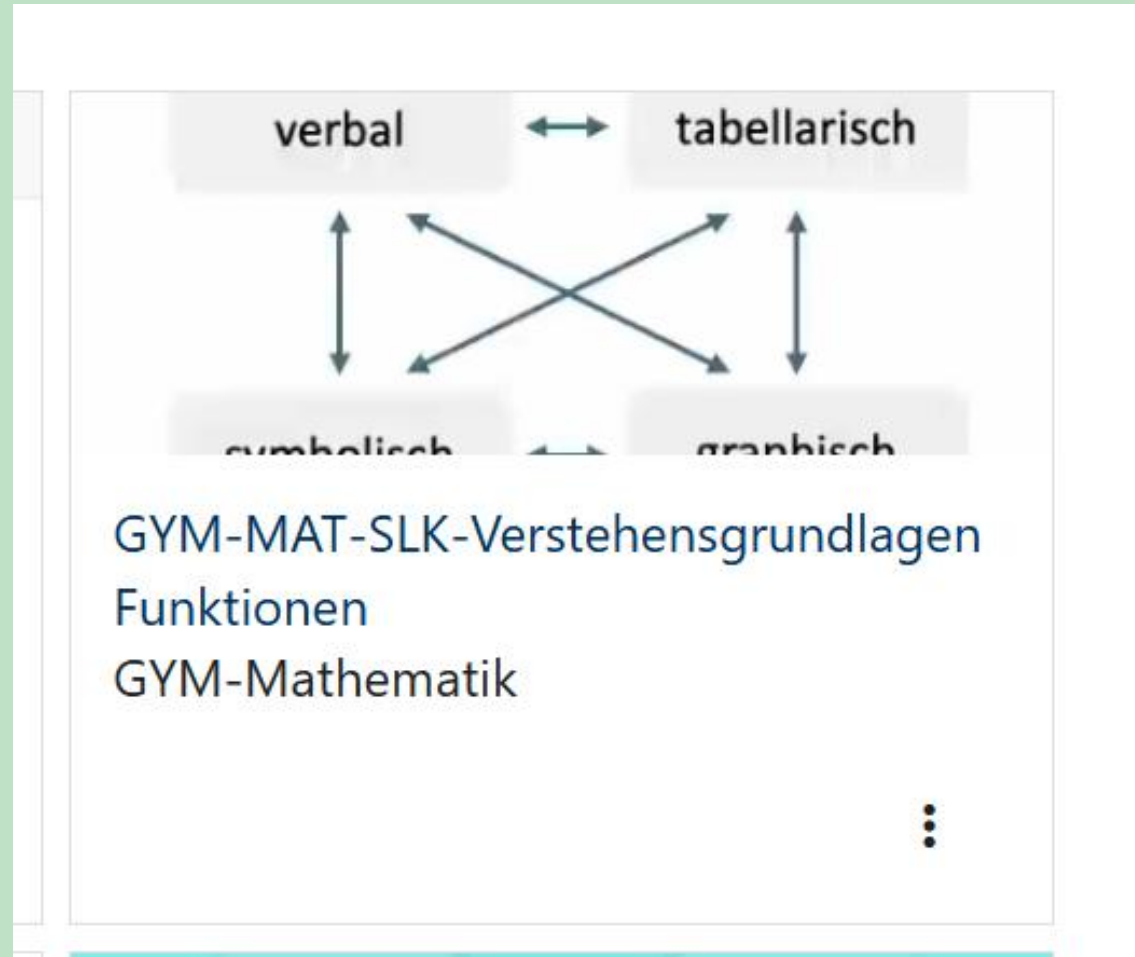
Dies ist eine Darstellung von $f(x) = \dots$

Korrekt oder nicht?

1. Die eingegebene Zahl (Input) wird durch die Maschine in genau definierter Funktion (Funktionsterm) bearbeitet.
2. $y = 2x + 3$ oder $f(x) = 2x + 3$?
3. Die Funktion, nach der die Maschine arbeitet, steht über der Maschine.
4. Nun fehlen die x-Werte.
5. Diese Funktionen ordnen die Menge der reellen Zahlen auf sich selbst ab.
6. Wenn man die Punkte verbindet, erhält man eine Funktion.

Wiederholung und Vertiefung

Hausaufgabe



Abschluss

1. Folgendes will ich im Unterricht ausprobieren...
2. Das war für mich neu...
3. Das war für mich die zentrale Botschaft...
4. Das kam für mich heute zu kurz...

Ausblick

Das nächste Modul findet statt

am **26.11.2025 (online)**

im **BBB-Raum**