Funktionales Denken entwickeln und fördern

Das Denken und Arbeiten mit Funktionen ist charakteristisch für die Mathematik und einer ihrer wichtigsten Beiträge zur Strukturierung und zum Verständnis der Umwelt. Im Unterricht sind dazu wesentliche Grundvorstellungen aufzubauen – anhand konkreter Situationen und in Verbindung mit Darstellungen zu Funktionen wie Sprache, Tabelle, Graph und Term.

JÜRGEN ROTH, MICHAELA LICHTI

Kinder interessieren sich früh für ihre Körpergröße – und viele Eltern halten bei jedem Geburtstag die aktuelle Größe ihres Kindes an einer Messlatte fest (**Abb. 1**). Sie interessieren sich für die Zuordnung von Körpergröße zu Lebensalter sowie für das Änderungsverhalten der Körpergröße bei fortschreitendem Alter. Spätestens wenn ein zweites Kind dazukommt, wird mit ebensolchem Interesse beobachtet, wie sich die Zusammenhänge zwischen Lebensalter und Körpergröße der beiden Kinder jeweils als Ganzes im Vergleich zueinander verhalten.

Abb. 1: Funktionaler Zusammenhang im Kinderzimmer: Eintragen der Körpergrößen auf der Messlatte

Zuordnung, Änderungsverhalten und die Sicht auf das Ganze sind entscheidende Perspektiven auf jeden funktionalen Zusammenhang. Diese Grundvorstellungen zu funktionalen Zusammenhängen gehen auf den Didaktiker Hans-Joachim Vollrath zurück (Vollrath 1989) und sind Grundlage jeglichen Arbeitens mit funktionalen Zusammenhängen, die im Alltag allgegenwärtig und eine der fünf inhaltlichen Leitideen der Bildungsstandards Mathematik sind (KMK 2004). Die dabei benötigten Vorstellungen, Kenntnisse und Fähigkeiten werden im Sinne des Spiralprinzips durchgängig systematisch aufgebaut und weiterentwickelt (Büchter 2014).

Wie aktuelle Forschungsprojekte zeigen (einen Überblick finden Sie in **Tab. 1** am Ende des Artikels), können Lernende insbesondere durch das angeleitete Experimentieren mit geeigneten gegenständlichen Materialien (Vollrath 1978, Ganter 2013) bzw. mit sinnvoll gestalteten Simulationen den Funktionsbegriff an Phänomenen erfassen und Grundvorstellungen dazu aufbauen (Lichti/Roth 2020). Bei solchen Experimenten sollte die (reale) Situation, aus der ein funktionaler Zusammenhang abgelesen (oder in die er hineingesehen) wird, im Mittelpunkt stehen, damit mathematische Erkenntnisse zu Funktionen mit der realen Situation abgeglichen und wechselseitig interpretiert werden können. Dabei spielt der adäquate Einsatz verschiedener Darstellungsformen und der Wechsel zwischen diesen eine besondere Rolle (vgl. **Tab. 1**, Klinger 2018; Rolfes 2018). So werden Eigenschaften funktionaler Zusammenhänge für Schülerinnen und Schüler greifbar und sie lernen funktionales Denken, das sich aus dem Zusammenspiel von miteinander in Beziehung gesetzten Grundvorstellungen zu funktionalen Zusammenhängen und dem dafür unerlässlichen Arbeiten mit Darstellungen von Funktionen ergibt.

Grundvorstellungen zu funktionalen Zusammenhängen

Grundvorstellungen stellen verschiedene Perspektiven auf funktionale Zusammenhänge dar und ermöglichen im Zusammenspiel ein Gesamtbild eines konkreten funktionalen Zusammenhangs. Die drei Grundvorstellungen Zuordnung, Änderungsverhalten (bzw. Kovariation) und Funktion als Ganzes werden im Folgenden erläutert:

Zuordnung – einer unabhängigen Größe eine andere, davon abhängige Größe zuordnen

Durch Funktionen werden Zusammenhänge zwischen Größen beschrieben oder gestiftet: Jedem Wert der unabhängigen Größe wird genau ein Wert der davon abhängigen Größe zugeordnet.

Wenn etwa beim nullten, ersten, zweiten, dritten, … Geburtstag eines Kindes jeweils dessen Körpergröße gemessen wird, dann wird dem Alter in Jahren jeweils die aktuelle Körpergröße in Zentimetern zugeordnet. Hier und beim Eintragen dieser jeweils gemessenen Größen auf einer Messlatte (**Abb. 1**) macht man die Erfahrung, dass jedem Alter (hier die unabhängige Größe) genau eine Körpergröße (hier die abhängige Größe) zugeordnet ist und nicht mehrere. Es wäre auch seltsam, wenn eine Person zum selben Zeitpunkt zwei verschiedene Körpergrößen hätte. Dagegen ist es bei Erwachsenen die Regel, dass sie etwa am 30. und am 31. Geburtstag dieselbe Körpergröße aufweisen, zwischendurch also nicht gewachsen sind. Dass verschiedenen Werten der unabhängigen Größe (hier: Lebensalter in Jahren) dieselben Werte der abhängigen Größe (hier: Körpergröße in Zentimetern) zugeordnet werden, kann sich aus dieser Situation also durchaus ergeben.

Für Funktionen wird folglich gefordert, dass jedem x-Wert der unabhängigen Größe genau ein

y-Wert der abhängigen Größe zugeordnet wird, aber eben *nicht* zwingend jedem y-Wert genau ein x-Wert!

Die Grundvorstellung *Zuordnung* lässt sich gut über Realexperimente entwickeln (Beckmann 2007; Lichti 2019).

Änderungsverhalten/Kovariation – Veränderungen wahrnehmen und analysieren

Funktionen zeigen, wie sich die Änderung einer Größe auf eine von ihr abhängige Größe auswirkt, wie also die abhängige Größe bei Variation der unabhängigen Größe mit variiert (kovariiert).

Wenn Kinder wissen wollen, wie schnell sie wachsen, interessiert sie, wie sich ihre Körpergröße in gleichen Zeitschritten (in **Abb. 1** ein Jahr) verändert. Ist das gleichmäßig oder nimmt die Körpergröße zunächst langsamer und dann schneller zu oder umgekehrt? Um diese Frage zu beantworten, reicht es nicht mehr, einzelne Wertepaare zu betrachten. Stattdessen müssen mehrere benachbarte Werte der unabhängigen Größe und die jeweils zugehörigen Werte der abhängigen Größe zueinander in Beziehung gesetzt werden. Dies gelingt am Funktionsgraphen sehr gut, weil benachbarte Punkte leicht verglichen werden können.

Grundvorstellungen zum Änderungsverhalten von Funktionen können mit Hilfe von Schülerexperimenten anhand geeignet gestalteter (GeoGebra-)Simulationen entwickelt werden (etwa unter https://dms.uni-landau.de/m/lichti/diss/). Dabei wird in der Simulation eine reale Situation mit dem zugehörigen Funktionsgraphen in Beziehung gesetzt und die wechselseitige Analyse mit geeigneten Fokussierungshilfen unterstützt. Eine Möglichkeit, sich mittels sog. Variationstabellen stärker mit dem Änderungsverhalten auseinanderzusetzen, wird im Beitrag **Funktionen à la française!** vorgestellt.

Funktion als Ganzes – was charakterisiert den funktionalen Zusammenhang insgesamt?

Mit Funktionen sieht man einen gegebenen oder gestifteten Zusammenhang als etwas Ganzes. Man betrachtet nicht mehr einzelne Wertepaare, sondern die Menge aller Wertepaare und interessiert sich für die charakteristischen Eigenschaften, also die Besonderheiten der gesamten Funktion.

Will man die Entwicklung der Körpergröße zweier Kinder über die Zeit miteinander vergleichen, ist es sinnvoll, systematisch Daten aufzunehmen, diese in einer Tabelle zu erfassen und in einen Graphen zu übertragen. Auf dieser Basis können der funktionale Zusammenhang zwischen der verstreichenden Zeit und der Körpergröße einer Person als Ganzes betrachtet und die funktionalen Zusammenhänge für verschiedene Personen miteinander verglichen werden – oder auch verschiedene Wachstumsverläufe

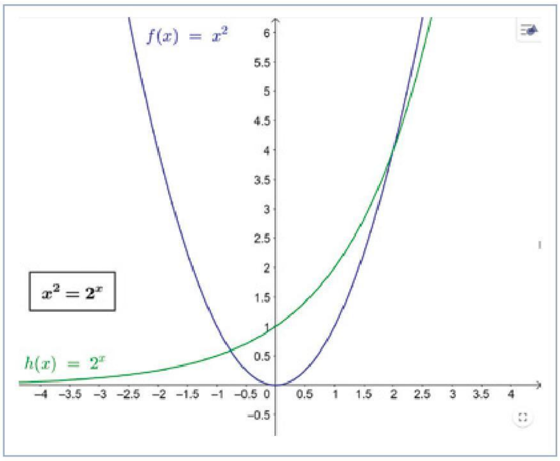

Abb. 2: Die Gleichung $x^2 = 2^x$ graphisch Lösen

innerhalb des funktionalen Zusammenhangs bei einer Person.

In jedem Fall ist die Betrachtung des funktionalen Zusammenhangs in seiner Gesamtheit für die Beantwortung der interessierenden Fragen notwendig. Beim Blick auf Funktionsgraphen kann man unter anderem folgende Perspektiven zur Sicht als Ganzem unterscheiden: Man benötigt Funktionsgraphen, wenn man

1. charakteristische Eigenschaften des gesamten Verlaufs einer Funktion erfassen will,
2. zwei verschiedene Graphen, etwa die der Funktionen $x \mapsto x^2$ und $x \mapsto 2^x$ in **Abb. 2**, miteinander vergleichen möchte oder
3. verschiedene Abschnitte eines Funktionsgraphen bzgl. ihrer Eigenschaften (etwa der Steigung) im jeweiligen Abschnitt gegenüberstellen möchte.

Eine Betrachtung im Sinne der Grundvorstellung Funktion als Ganzes ist auch beim graphischen Lösen einer Gleichung wie $x^2 = 2^x$ notwendig. Bereits bei der Frage, wie viele Lösungen diese Gleichung haben kann, ist der Blick auf die beiden funktionalen Zusammenhänge $x \mapsto x^2$ und $x \mapsto 2^x$ jeweils als Ganzes – etwa in Form des Funktionsgraphen – erforderlich. Mit Blick auf **Abb. 2** stellt sich aber auch die Frage, ob – neben den beiden erkennbaren Schnittstellen – rechts von der sichtbaren Schnittstelle $x = 2$ eine weitere existiert oder nicht.[1] Hier ist neben der Sicht als Ganzes auch ein Grundwissen zum grundsätzlichen Verlauf von quadratischen und Exponentialfunktionen notwendig. Beides muss im Unterricht erarbeitet werden.

Es spricht vieles dafür, zunächst Funktionen zu thematisieren und erst auf dieser Grundlage Gleichungen im Unterricht zu behandeln, deren Terme auf der linken und rechten Seite der Gleichung als Funktionsterme aufgefasst werden können. Dann stehen nicht spezielle Gleichungstypen im Mittelpunkt, sondern das Konzept der Gleichung kann auf das Konzept der Funktionen aufgebaut und grundlegend mit diesem vernetzt werden (Barzel u. a 2011).

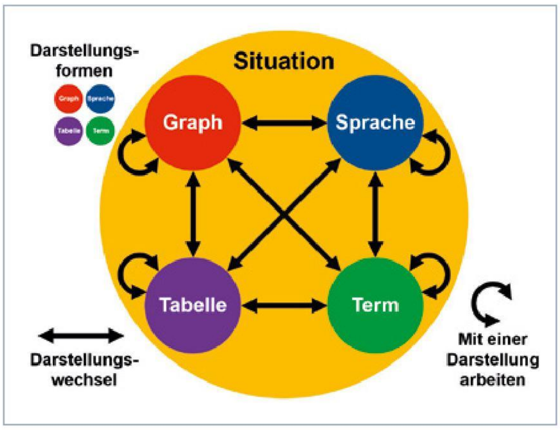

Abb. 3: Darstellungsformen und Darstellungswechsel bei funktionalen Zusammenhängen, die eine Situation beschreiben

Funktionen sind nur über Darstellungen denk- und fassbar

Bei der Auseinandersetzung mit Grundvorstellungen zu Funktionen wurden immer wieder Darstellungen wie zum Beispiel Funktionsgraphen thematisiert. Dies liegt daran, dass man sich mit einem mathematischen Konzept, wie dem der Funktion, nur über geeignete Darstellungen auseinandersetzen kann. Auch die Entwicklung von Grundvorstellungen zu Funktionen selbst kann nur anhand von ihren Darstellungen und deren Vernetzung, das heißt dem Wechsel zwischen solchen Darstellungen, gelingen. Gerade beim Darstellungswechsel werden Grundvorstellungen benötigt und daher auch trainiert.

Abb. 3 zeigt das Zusammenspiel zwischen einer Situation, die mathematisch durch eine Funktion strukturiert werden kann, Darstellungsformen und -wechseln. Eine Funktion stellt eine mathematische Beschreibung einer Situation dar, in der ein funktionaler Zusammenhang enthalten ist oder hineingesehen werden kann. Wie alle mathematischen Begriffe können Funktionen nur anhand von Darstellungen erfasst und verarbeitet werden. Darstellungsformen, die typischerweise für Funktionen genutzt werden, sind Sprache (verbale Beschreibung), Tabelle, Term und Graph. Alle Darstellungen haben spezifische Vor- sowie Nachteile und müssen zunächst gelesen bzw. hergestellt werden können. Für ein tieferes Erfassen funktionaler Zusammenhänge müssen Darstellungen bzgl. aller Grundvorstellungen analysiert werden. Dies geschieht zunächst beim Arbeiten mit und innerhalb einer Darstellung. Bei einer solchen Auseinandersetzung werden aber auch immer andere Darstellungen betrachtet, etwa wenn man sich mit einem Lernpartner über das eigene Vorgehen austauscht und dieses in Sprache fasst. Schon beim Übersetzen von Aktionen an einer mathematischen Darstellung in gesprochene Sprache und umgekehrt sind Grundvorstellungen unabdingbar.

Funktionales Denken tritt gerade bei Darstellungswechseln auf, zu deren Umsetzung Grundvorstellungen angewendet werden müssen, auf. Genau hier, also bei Veränderungen innerhalb einer Darstellung und der Übersetzungen zwischen verschiedenen Darstellungen, entwickelt sich das Verständnis für den funktionalen Zusammenhang und die Fähigkeit zum funktionalen Denken weiter.

Darstellungen spielen einerseits beim Bearbeiten von Aufgaben im Zusammenhang mit Funktionen eine Rolle. Hierbei können Darstellungen gut oder weniger gut zur Aufgabenstellung passen und deshalb die geforderte Problemlösung mehr oder weniger gut ermöglichen. Andererseits stellt sich auch die Frage, welche Darstellung besonders lerneffizient ist, das heißt, von welcher Darstellung aus das an ihr entwickelte funktionale Denken besonders gut auf andere Darstellungen übertragen und dort angewendet werden kann. Tobias Rolfes konnte zeigen, dass Aspekte funktionalen Denkens, die mit Funktionsgraphen gelernt wurden, auch gut mit Tabellen bearbeitbar sind, während der Transfer von der Tabelle hin zum Funktionsgraphen deutlich schwieriger ist (Rolfes 2019, vgl. **Tab. 1**).

So gesehen lohnt es sich, frühzeitig Graphen für das Lernen funktionalen Denkens einzusetzen. Dabei kann man zur Erarbeitung dieser Darstellung auf Tabellen zurückgreifen, die bereits aus der Grundschule bekannt sind, insbesondere als heuristisches Hilfsmittel beim systematischen Probieren und beim Arbeiten mit (Mess-)Daten. Zur Einführung des neuen Konzepts der Funktionen ist die komplexere Darstellungsform des Funktionsgraphen besonders gut geeignet, weil der Transfer zu anderen Darstellungsformen von hier aus besser gelingt. Dies ist also ein Plädoyer dafür, über die Darstellung Funktionsgraph in das Thema funktionale Zusammenhänge einzusteigen und – vom Funktionsgraphen aus – die Vernetzungen zu anderen wesentlichen Darstellungen von Funktionen anzustoßen. Dazu muss diese wichtige Darstellungsform aber zunächst erfasst und in der Art der Darstellung eines funktionalen Zusammenhangs durchschaut werden.

Darstellungen erfassen: Von der Situation über die Datentabelle zum Graphen

Die Darstellungsform (Funktions-)Graph muss, wie alle anderen Darstellungsformen auch, in der Art, in der sie den jeweiligen funktionalen Zusammenhang darstellt, zunächst inhaltlich erfasst werden. Wie eine Reihe von Untersuchungen zeigt, kommt es sonst zu typischen Fehlern beim Interpretieren von und Arbeiten mit Funktionsdarstellungen (vgl. **Tab. 1** Nitsch 2015 sowie den Beitrag **Typische Fehler im Umgang mit Funktionen** in dieser Ausgabe).

Grundsätzlich bietet es sich an, Darstellungen für funktionale Zusammenhänge jeweils an einer konkreten Situation zu entwickeln, damit die Darstellung zu jedem Zeitpunkt inhaltlich mit der

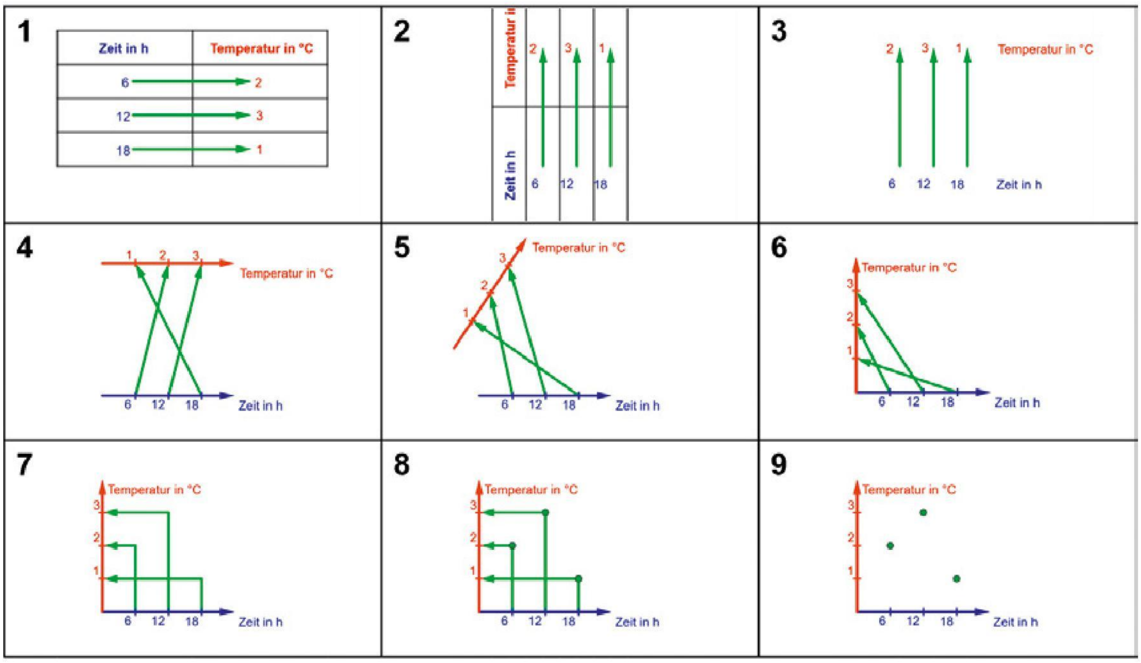

Abb. 4: So entsteht der Funktionsgraph als Punktmenge im Koordinatensystem

Situation abgeglichen werden kann. Hier soll das am Beispiel folgender Situation geschehen:

> **Temperatur:** An einem Wintertag werden an einer Wetterstation in Landau in Abständen von 6 Stunden jeweils die Lufttemperaturen gemessen.
> Um 6 Uhr sind es 2 °C, um 12 Uhr werden 3 °C gemessen und um 18 Uhr zeigt das Thermometer 1 °C an.

Zunächst werden die Daten (Messwerte) aus der Situation in einer Tabelle zusammengestellt, in der zu jedem Wert der unabhängigen Größe (hier die Zeit in Stunden) der zugehörige Wert der abhängigen Größe (hier die Temperatur in °C) notiert wird. In der Tabelle wird diese Zuordnung auch jeweils mit einem grünen Zuordnungspfeil hervorgehoben (1). Wie man von dieser Darstellung zu einem Funktionsgraphen des funktionalen Zusammenhangs gelangt, kann interaktiv mit dem Applet unter geogebra.org/m/kknpe5u9 erarbeitet werden. **Abb. 4** zeigt dies in einer Bildfolge aus Screenshots aus dem Applet. Zunächst wird die Tabelle gedreht (2) und anschließend entfernt, sodass nur noch die Zuordnungen übrig bleiben (3). Die Werte der unabhängigen Größe (hier die Zeit in Stunden) sind aufgrund der Situation bereits der Größe nach angeordnet. Sie können auf einem Zahlenstrahl dargestellt werden.

Will man die zugeordneten Werte der abhängigen Größe ebenfalls auf einem Zahlenstrahl darstellen, muss man sie zunächst der Größe nach anordnen (4). Diese Feststellung ist wichtig, da die Möglichkeit zur Anordnung nach der Größe notwendig ist, damit zu einem Zusammenhang ein Funktionsgraph erstellt werden kann. Der Zahlenstrahl der abhängigen Größe (hier: Temperatur in °C) wird nun so bewegt (5), dass er senkrecht auf dem Zahlenstrahl der unabhängigen Größe (hier: Zeit in h) steht und die beiden Nullpunkte zusammenfallen (6). Zusammen bilden die beiden Strahlen nun ein Koordinatensystem.

Die Zuordnungen werden nach wie vor durch Pfeile visualisiert, die einander zugeordnete Werte der unabhängigen und der abhängigen Größe linear verbinden. Wenn man nun die Zuordnungspfeile abknickt, bis sie jeweils einen rechten Winkel bilden (7), kann man schließlich die Knickstellen mit Punkten markieren (8), deren Koordinaten den einander zugeordneten Werten eines Paares von unabhängiger und abhängiger Größe entsprechen. Jetzt kann man die Pfeile weglassen (9), denn die Punkte im Koordinatensystem tragen alle Informationen der Zuordnung und bilden zusammen den Graphen der Funktion. Durch diesen Zugang wird dem Graph-als-Bild-Fehler entgegengewirkt.

Darstellungswechsel: Term ↔ Graph

Bereits im Beispiel des graphischen Lösens der Gleichung $x^2 = 2^x$ wurde ein Wechsel von der Darstellung der funktionalen Zusammenhänge als Funktionsterme x^2 bzw. 2^x hin zur ihrer Darstellung mit den zugehörigen Funktionsgraphen durchgeführt. Dieser Wechsel sollte idealerweise zunächst im Kopf möglich sein, um grob abzuschätzen, wie viele Schnittpunkte die Graphen haben, wie viele Lösungen die Gleichung daher besitzt und wo die Schnittstellen ungefähr liegen werden. Um das durchführen zu können,

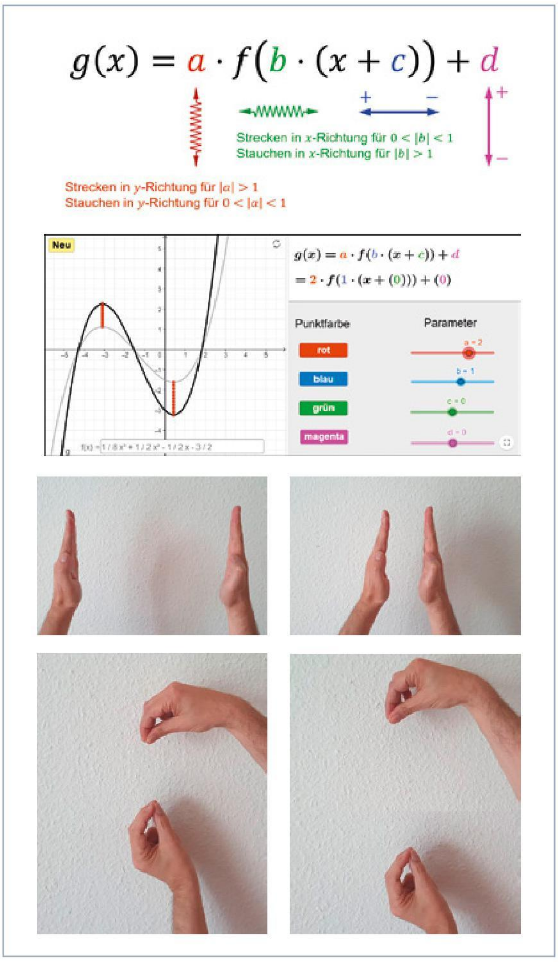

Abb. 5: Auswirkung von Parametern auf Funktionsgraphen

müssen im Unterricht Prototypen für den Verlauf von Graphen verschiedener grundlegender funktionaler Zusammenhänge erarbeitet und verinnerlicht werden. Dies kann und sollte man etwa durch regelmäßige Wiederholungsfragen im Sinne von Kopfübungen und die Aufforderung an die Lernenden, entsprechend prototypische Verläufe von Graphen mit der Hand in die Luft zu zeichnen, wachhalten.

Darüber hinaus sind auch die Auswirkungen von Parametern im Funktionsterm auf die Form und Lage des Funktionsgraphen wesentlich. Dies sollte nicht bei jedem Funktionstyp neu erarbeitet werden, sondern – und das ist entscheidend – querschnittlich als grundsätzliche Eigenschaft von Parametern, die im Funktionsterm an einer bestimmten Stelle stehen (s. **Abb. 5** oben). Besonders gut kann dies interaktiv anhand von Graphen von Funktionen geschehen, die mehrere Extrema aufweisen. In einem dynamischen Mathematiksystem kann man die jeweiligen Extrempunkte farbig markieren, deren Spur ausgeben lassen und so die Veränderungen am Funktionsgraphen, die aus der Variation der Parameter resultieren, sehr gut beobachten. Es empfiehlt sich dabei, wie im Applet geogebra.org/m/tjmr8uwz realisiert, die Färbung der Extrempunkte vor jeder Variation eines anderen Parameters entsprechend zu ändern.

Darüber hinaus muss auch inhaltlich korrekt über die resultierenden Veränderungen, die die Variation eines Parameters an der Form des Graphen und dessen Lage bewirkt, gesprochen[2] und dies auch begleitend richtig mit den Händen angezeigt werden. Wird zum Beispiel der Parameter a der Funktion $x \mapsto a \cdot x^2$ dynamisch variiert, haben viele Menschen den visuellen Eindruck, die Parabel würde dabei in x-Richtung breiter bzw. schmaler. Dies wird sprachlich häufig auch so ausgedrückt und gestisch mit vor dem Körper senkrecht gehaltenen, in x-Richtung aufeinander zu bzw. voneinander weg bewegten Handflächen begleitet (vgl. **Abb. 5** Mitte). Inhaltlich ist beides aber falsch, wie der Funktionsterm zeigt. Im Vergleich zur Quadratfunktion $x \mapsto x^2$ wird an jeder Stelle x der Funktionswert ver-a-facht, wenn $a = 2$ ist, dann wird der y-Wert an jeder Stelle x im Vergleich zum y-Wert der Quadratfunktion also verdoppelt, wenn $a = 1/2$ ist, wird der y-Wert an jeder Stelle halbiert.

Anschaulich und sprachlich handelt es sich also um eine Streckung bzw. Stauchung in y-Richtung, die durch Handbewegungen wie in **Abb. 5** unten unterstützt werden sollte, wobei die Hände das Strecken bzw. Stauchen durch Auseinander- bzw. Aufeinanderzubewegen der Hände in y-Richtung darstellen. Eine entsprechende Änderung ist visuell gut im Applet unter geogebra.org/m/tjmr8uwz erkennbar. Bei quadratischen Funktionen $x \mapsto a \cdot (b \cdot (x + c))^2 + d$ sind die Änderungen, die die beiden Parameter a und b hervorrufen, am Funktionsgraphen visuell nicht unterscheidbar, während das zum Beispiel bei der Sinusfunktion $x \mapsto a \cdot \sin(b \cdot (x + c)) + d$ sehr gut gelingt. Während der Parameter a eine Streckung ($|a| > 1$) bzw. Stauchung ($0 < |a| < 1$) in y-Richtung erzeugt, bewirkt der Parameter b eine Streckung ($0 < |b| < 1$) bzw. Stauchung ($|b| > 1$) in x-Richtung, was jeweils durch die geeigneten Handbewegungen in **Abb. 5** unterstützt werden kann.

Weitere Ideen zum Umgang mit Parametern liefert, am Beispiel der quadratischen Funktionen, der Beitrag **Parameter digital entdecken – wirklich so easy?**

Darstellungswechsel: Situation ↔ Graph

Wie das Zusammenspiel von Situation und Graph gelingen kann, beschreibt der Beitrag **Der Einstieg in Funktionales Denken** in dieser Ausgabe. Dort wird deutlich, dass sich nur bei adäquater Ausgestaltung der Simulationen sowie geeigneter Aufgabenstellung der gewünschte Lerneffekt einstellt.

Dynagraph: Zusammenhang zwischen Änderungen erfassen

Es kann sinnvoll sein, neben den gängigen Darstellungsformen Sprache, Tabelle, Graph und Term gelegentlich auch andere Darstellungen für funktionale Zusammenhänge im Unterricht einzusetzen. Wenn man die Grundvorstellung zum

Änderungsverhalten vertiefen und trainieren möchte, nachdem die Lernenden einige Erfahrungen mit anderen Darstellungsformen und mit wichtigen Funktionstypen gesammelt haben, kann die Darstellungsform *Dynagraph* (Idee: Goldenberg u. a. 1992) gewinnbringend eingesetzt werden. Hier werden zwei Zahlengeraden parallel zueinander angeordnet (**Abb. 6** bzw. geogebra.org/m/snn7renf). Auf der oberen Zahlengerade wird die unabhängige Variable (das Argument) als Punkt x bewegt, auf der unteren Geraden bewegt sich der Funktionswert als Punkt y mit. Bewegt man die unabhängige Variable durch Ziehen mit der Maus am Punkt x, kann man durch Beobachtung der Bewegung des Punktes y, des zugehörigen Funktionswertes, ein Gefühl für dessen Änderungsverhalten gewinnen. Blendet man auch den zugehörigen Zuordnungspfeil ein, wird die Änderung noch besser sichtbar und mit Hilfe der Spur dieses Zuordnungspfeils lässt sich ein statisches Bild dieser Änderung festhalten (vgl. **Abb. 6**). Nach einiger Erfahrung mit dem selbstständigen Bewegen des x-Wertes für verschiedene funktionale Zusammenhänge kann auch bereits die Interpretation dieser Abbildungen durch mentale Variation das Konzept des Änderungsverhaltens trainieren.

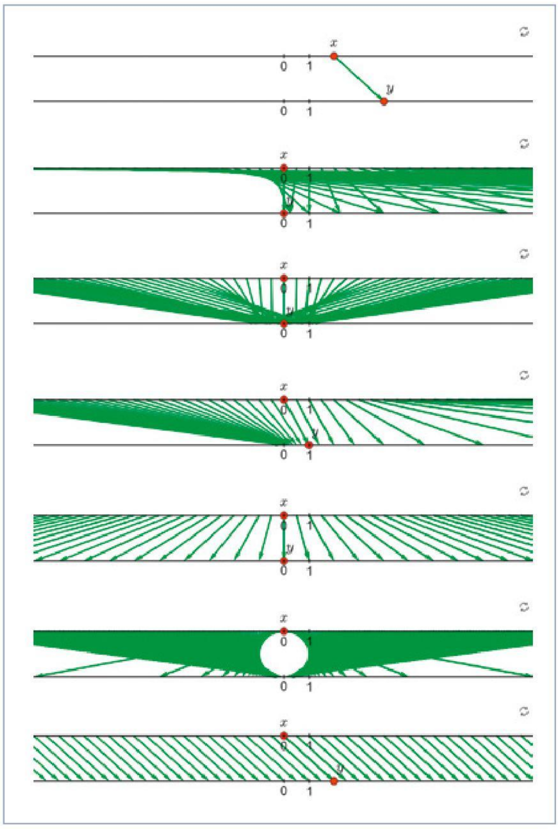

Abb. 6: Dynagraph – eine Darstellungsform zur Analyse des Änderungsverhaltens. Welche Zusammenhänge werden jeweils dargestellt? Zur Kontrolle: $x \mapsto x + 2$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto 2x$, $x \mapsto 2^x$, $x \mapsto 1/x$

Die Darstellungsform Dynagraph ist *nicht* zur Einführung in funktionale Zusammenhänge geeignet. Sie betont aber den häufig vernachlässigten, allerdings wichtigen dynamischen Aspekt des Änderungsverhaltens, also der Wechselbeziehung zwischen der Änderung der unabhängigen Größe und der Änderung der abhängigen Größe. Dynagraphen sind damit sehr gut geeignet, um ein Gefühl für das qualitative Änderungsverhalten verschiedener Funktionstypen zu entwickeln und zu trainieren. Gerade die wechselseitige Analyse des Zusammenhangs zwischen den bekannten Funktionsgraphen im kartesischen Koordinatensystem und den entsprechenden Dynagraphen kann sehr gewinnbringend sein. Dazu wurde im Dynagraph-Applet unter geogebra.org/m/snn7renf die Möglichkeit integriert, die y-Achse zu drehen – so kann derselbe funktionale Zusammenhang in beiden Darstellungen dynamisch analysiert werden und zur Kontrolle, wenn die y-Achse senkrecht auf der x-Achse steht, auch der zugehörige Funktionsgraph eingeblendet werden.

Funktionen mehrerer Veränderlicher: Das Beispiel Zylindervolumen

Neben dem Einbringen von ungewohnten Darstellungen für Funktionen wie dem Dynagraphen lohnt es, auch den Zoo der typischen funktionalen Zusammenhänge der Schule gelegentlich etwas aufzubrechen. In der Realität kommen nur wenige funktionale Zusammenhänge vor, die nur eine unabhängige Funktionsvariable haben, wie das bei den in den Lehrplänen thematisierten Funktionstypen der Fall ist. In aller Regel gibt es davon mehrere. Als Beispiel sei das Zylindervolumen genannt. Die Volumenformel für einen Kreiszylinder lautet bekanntermaßen $V_{\text{Zylinder}} = G \cdot h = r^2 \pi \cdot h$, wobei das Volumen offensichtlich vom Radius r und von der Höhe h des Zylinders abhängt. Funktional betrachtet handelt es sich hier um eine Funktion zweier Veränderlicher: $V_{\text{Zylinder}}(r, h) = r^2\pi \cdot h$

Im Unterricht wird in der Regel eine der Veränderlichen als Parameter aufgefasst, der festgehalten wird – damit wieder eine Funktion einer Veränderlichen vorliegt. Dies kann auf zwei Weisen realisiert werden: Als proportionale Funktion in Abhängigkeit von der Höhe h oder als quadratische Funktion in Abhängigkeit vom Radius r:

$$V_r(h) = (r^2\pi) \cdot h \text{ oder } V_h(r) = (\pi h) \cdot r^2$$

Alle genannten Funktionsterme lassen sich wie in **Abb. 7** in Funktionsgraphen umsetzen, wobei es sich beim Graphen der Funktion $V_{\text{Zylinder}}(r, h) = r^2\pi \cdot h$ um eine räumliche Fläche handelt. Die Darstellung muss also in einem dreidimensionalen Koordinatensystem erfolgen. Die beiden Funktionsvariablen spannen dabei die x-y-Ebene auf. Jedem Punkt mit den Koordinaten (r, h) in der x-y-Ebene wird dabei ein Volumen $V_{\text{Zylinder}}(r, h)$ als Funktionswert zugeordnet und in z-Richtung angetragen. Die Punkte $(r, h, V_{\text{Zylinder}}(r, h))$ bilden zusammen den Funktionsgraphen, hier also die räumliche Fläche. Auch die Graphen der beiden Parameterfunktionen $V_r(h) = (r^2\pi) \cdot h$ und $V_h(r) = (\pi h) \cdot r^2$ lassen sich in dieses

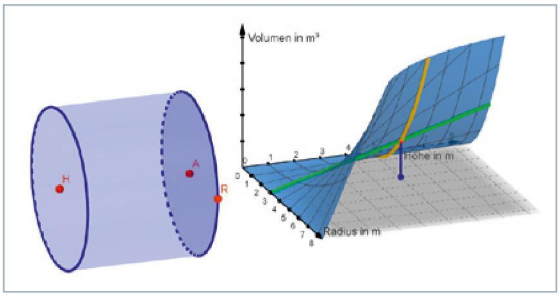

Abb. 7: Zylindervolumen funktional

Koordinatensystem eintragen. Sie finden je einen solchen Graphen für den festgehaltenen Parameter $r = 3$ bzw. $h = 5$ in **Abb. 7** eingezeichnet.[3] Diese Art von Untersuchung an solch vertrauten Zusammenhängen erlaubt es, den Blick auf funktionale Zusammenhänge zu weiten und funktionales Denken zu fördern. Für die Auseinandersetzung im Unterricht kann geogebra.org/m/pbsqwwjh genutzt werden.

Rahmung des Themas Funktionen im Mathematikunterricht

Im Unterricht sollte der Einstieg in das Arbeiten mit Funktionen anhand von Experimenten mit Gegenständen und mit Simulationen zu vielfältigen funktionalen Zusammenhängen unter Verwendung der Darstellungsform Graph erfolgen. So kann sowohl die Grundvorstellung Zuordnung (über Experimente mit gegenständlichen Materialien) als auch die Grundvorstellung Änderungsverhalten (über Experimente mit Simulationen) fundiert aufgebaut werden (Lichti/Roth 2020). Dabei wird eine breite Vorstellungsbasis zu funktionalen Zusammenhängen gelegt, auf die immer wieder zurückgegriffen werden kann.

Insofern lohnt es sich, gerade in diesen Einstieg Unterrichtszeit zu investieren. Durch die vielfältigen Erfahrungen zu verschiedensten funktionalen Zusammenhängen werden lebensweltliche Situationen mit dem mathematischen Konstrukt der Funktion eng verbunden und querschnittlich Grundvorstellungen aufgebaut. Dieses Vorgehen vermindert Übergeneralisierungen bestimmter Funktionstypen, etwa der proportionalen oder linearen Funktionen, in deren Folge alle funktionalen Zusammenhänge als proportional oder linear interpretiert werden.

Erst wenn Lernende über eine breite Basis an Erfahrungen sowie gefestigte Grundvorstellungen zu funktionalen Zusammenhängen verfügen, ist es sinnvoll, verschiedene spezielle Funktionstypen und deren Eigenschaften gezielt zu untersuchen und festzuhalten. Dabei ist es wesentlich, dass jeder neue Funktionstyp mit seinen Eigenschaften mit den bisher schon kennengelernten Funktionstypen verglichen wird. Wenn mehrere Funktionstypen erfasst und in ihren Eigenschaften verinnerlicht sind, kann das eigentliche Denken und Arbeiten mit Funktionen beginnen. Zum Modellieren mit Funktionen beleuchten die Beiträge **Funktionale Zusammenhänge in „(Kon)Texten" erschließen** sowie **Was passt da jetzt nicht: Das Modell oder die Wirklichkeit?** in dieser Ausgabe verschiedene Aspekte. Einen weiteren Zugang bietet der Beitrag **Videoanalyse zur Modellierung von Bewegungen**. Hier schließt sich dann der Kreis.

Anmerkungen

1. Es gibt noch eine Schnittstelle rechts von der Schnittstelle $x = 2$, weil Exponentialfunktionen für große x-Werte schneller wachsen als jede Potenzfunktion. Da der Graph der Quadratfunktion im sichtbaren Bereich des Koordinatensystems oberhalb des Graphen der Exponentialfunktion $x \mapsto 2x$ liegt, muss der Graph der schneller wachsenden Exponentialfunktion den Graphen der Quadratfunktion bei irgendeinem x-Wert größer 2 noch einmal schneiden und dann immer oberhalb der Normalparabel bleiben.
2. Weitere sprachliche Anforderungen beim Umgang mit funktionalen Zusammenhängen nennt Zindel (vgl. Tab. 1).
3. Durch Drehen des Koordinatensystems ist auch die typische Ansicht der Quadratfunktion (Ansicht senkrecht zur x-z-Ebene) bzw. der proportionalen Funktion (Ansicht senkrecht zur y-z-Ebene) erkennbar. Der Zylinder kann direkt auf das Koordinatensystem geschoben und so der Zusammenhang zwischen den relevanten Größen noch deutlicher herausgestellt werden.

Literatur

Barzel, B./Holzäpfel, L. (2011): Gleichungen verstehen – In: mathematik lehren 169, S. 2–7.

Beckmann, A. (2007): Was verändert sich, wenn … Experimente zum Funktionsbegriff. – In: mathematik lehren 141, S. 44–51.

Büchter, A. (2014): Das Spiralprinzip: Begegnen – Wiederaufgreifen – Vertiefen. – In: mathematik lehren 182, S. 2–9.

Ganter, S. (2013): Experimentieren – ein Weg zum funktionalen Denken: Empirische Untersuchung zur Wirkung von Schülerexperimenten. Hamburg: Kovač.

Göbel, L. (2021): Technology-Assisted Guided Discovery to Support Learning: Investigating the Role of Parameters in Quadratic Functions. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Goldenberg, P./Lewis, P./O'Keefe, J. (1992): Dynamic representation and the development of an understanding of function. – In: Harel, G./Dubinsky, E. (Hrsg.): The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Höfer, T. (2008): Das Haus des funktionalen Denkens. Hildesheim: Franzbecker.

Klinger, M. (2018): Funktionales Denken beim Übergang von der Funktionenlehre zur Analysis: Entwicklung eines Testinstruments und empirische Befunde aus der gymnasialen Oberstufe. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Lichti, M. (2019): Funktionales Denken fördern: Experimentieren mit gegenständlichen Materialien oder Computer-Simulationen. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Lichti, M./Roth, J. (2020): Wie Experimente mit gegenständlichen Materialien und Simulationen das funktionale Denken fördern. – In: Zeitschrift für Mathematikdidaktik in Forschung und Praxis (ZMFP), 1, 1–35. https://zmfp.de/

Nitsch, R. (2015): Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge: Eine Studie zu typischen Fehlermustern bei Darstellungswechseln. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Rolfes, T. (2018): Funktionales Denken: Empirische Ergebnisse zum Einfluss von statischen und dynamischen Repräsentationen. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Vollrath, H.-J. (1978): Schülerversuche zum Funktionsbegriff. – In: Der Mathematikunterricht 24(4), S. 90–101.

Vollrath, H.-J. (1989): Funktionales Denken. – In: JMD (10), S. 3–37.

Zindel, C. (2019): Den Kern des Funktionsbegriffs verstehen: Eine Entwicklungsforschungsstudie zur fach- und sprachintegrierten Förderung. Wiesbaden: Springer Spektrum.

screenshot: © geogebra.org

	Schwerpunkt der Forschungsarbeit	Nutzen für den Unterricht
Thilo Höfer (2008)	Die Fähigkeit des funktionalen Denkens wird auf Basis des dazu entwickelten Analysemodells „Haus des funktionalen Denkens" beschrieben. Das Modell nutzt die Fähigkeiten der Lernenden, zwischen verschiedenen Darstellungen von Funktionen zu übersetzen.	Mit dem „Haus des funktionalen Denkens" lässt sich die Fähigkeit des funktionalen Denkens der Schülerinnen und Schüler unter Berücksichtigung der Grundvorstellungen verorten.
Sandra Ganter (2013)	Welchen Einfluss haben Lernumgebungen mit gegenständlichen Experimenten bzw. mit Videos auf die Entwicklung der Grundvorstellungen *Zuordnung* und *Kovariation* des funktionalen Denkens in Jahrgangsstufe 7?	Die Arbeit mit gegenständlichen Materialien übt einen größeren Einfluss auf die Fähigkeit des funktionalen Denkens aus als die Arbeit mit Videos.
Renate Nitsch (2015)	Welche systematischen Fehler und Fehlermuster ergeben sich, unter Berücksichtigung von Grundvorstellungen, beim Darstellungswechsel von Funktionen? Beispiele: Graph-als-Bild-Fehler und die Verwechslung von Funktionswert und Steigung (*slope height confusion*)	Die systematische Darstellung der immer wieder auftretenden Fehler bei der Arbeit mit Funktionen und deren Vernetzung mit den Grundvorstellungen hilft dabei, diese bei Lernenden wahrzunehmen, ihre Ursachen zu kennen und im Unterricht darauf eingehen zu können. Es ist ein Diagnoseinstrument entstanden, mit dem Fehlvorstellungen zu linearen und quadratischen Funktionen diagnostiziert werden können (codi-test.de).
Tobias Rolfes (2018)	Studie zum Einfluss von statischen bzw. dynamischen Darstellungsformen auf das funktionale Denken sowie zur Lern- und Nutzungseffizienz von Tabelle, Graph und Säulendiagramm beim Bearbeiten von Aufgaben zu funktionalen Zusammenhängen. Die Unterscheidung zwischen quantitativem und qualitativem funktionalen Denken wird herausgearbeitet.	Dynamische Darstellungsformen haben einen signifikant höheren Einfluss auf die Entwicklung des funktionalen Denkens als statische und sollten daher im Unterricht zum Einsatz kommen. Es ist dabei unerheblich, ob eine Animation verwendet wird, die zum Beobachten einlädt, oder eine Simulation, die zudem Aktionen von den Lernenden fordert. Ein Graph ist lerneffizienter für die Arbeit mit Funktionen, d. h., die Übertragung von Gelerntem auf andere Darstellungsformen gelingt besonders gut.
Marcel Klinger (2018)	Untersucht wird die Fähigkeit des funktionalen Denkens in der Einführungsphase der Oberstufe. Betrachtet werden mögliche Leistungsprofile und geschlechtsspezifische Leistungsdifferenzen. Hierzu wird ein Kompetenzstrukturmodell zur Aufgabenentwicklung für die Oberstufe entwickelt, das die Grundvorstellungen mit dem Wechsel zwischen den Darstellungsformen verknüpft sowie zusätzlich die Funktionsebenen (Funktion → manipulierte Funktion → differenzierte Funktion) berücksichtigt.	Zusammenhänge zwischen Eigenschaften unterschiedlicher Funktionstypen sollten immer wieder hervorgehoben und konzeptuelles Wissen gestärkt werden. Hierzu bieten sich z. B. Aufgaben zum graphischen Differenzieren an. Es zeigen sich erhebliche geschlechtsspezifische Unterschiede zugunsten der Jungen (zum Teil durch ein geringes Selbstkonzept der Mädchen erklärbar). Ein reflektierter Umgang mit diesem Befund durch die Lehrkraft und ein gezieltes Ansprechen der Mädchen ist wünschenswert.
Michaela Lichti (2019)	Verglichen wird der Einfluss auf das funktionale Denken von Experimentieren in einer digitalen Lernumgebung (Simulationen) mit dem Einfluss realer Experimente (gegenständliche Materialien).	Um das Verständnis von Zuordnung zu fördern, sollten gegenständliche Materialien verwendet werden. Um die Entwicklung der Grundvorstellungen *Kovariation* und *Funktion als Objekt* zu unterstützen, ist eine mittels Simulationen zum Experimentieren anregende digitale Lernumgebung geeigneter.
Carina Zindel (2019)	Eine Lernumgebung zur Bewältigung konzeptueller und sprachlicher Anforderungen beim Umgang mit funktionalen Zusammenhängen wird gestaltet und die Bearbeitungs- und Lernwege in dieser Lernumgebung werden untersucht. Der „Kern" des Funktionsbegriffs wird konzeptualisiert durch Vernetzen von Größen und die Richtung ihrer Abhängigkeit.	Der „Kern" sollte immer wieder thematisiert werden. Fokusfragen sind dabei: *Um welche Größen geht es? Welche Größe hängt von welcher ab?* Auch sprachliche Anforderungen, die funktionale Zusammenhänge mit sich bringen, sollten spiralcurricular bedacht werden. So sollte z. B. von Anfang an von Zusammenhängen und Abhängigkeiten gesprochen werden.
Lisa Göbel (2021)	Verglichen werden klassischer Funktionenplotter, Zugmodus und Schieberegler sowie der Zugang ohne technische Visualisierung am Beispiel der Manipulation von Parametern quadratischer Funktionen.	Dynamischen Visualisierungen mittels Zugmodus und Schiebereglern ist der Vorzug zu gewähren. Die im Rahmen der Studie entwickelte Lernumgebung kann für den Unterricht adaptiert werden.

Tab. 1: Forschungsarbeiten (Dissertationen) rund um funktionales Denken und deren Bedeutung für den Unterricht